

**KARAKTERISTIK PENDUGA *EMPIRICAL BAYES*
PADA PENDUGAAN AREA KECIL
DENGAN MODEL POISSON-GAMMA**

(Skripsi)

Oleh

DYTA OMPUMONA



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2016**

ABSTRAK

KARAKTERISTIK PENDUGA *EMPIRICAL BAYES* PADA PENDUGAAN AREA KECIL DENGAN MODEL POISSON-GAMMA

Oleh

DYTA OMPUMONA

Area kecil merupakan himpunan bagian dari populasi dimana suatu peubah menjadi perhatian. Pendugaan area kecil didefinisikan sebagai suatu teknik statistika untuk menduga parameter area kecil. Metode *Empirical Bayes* (EB) merupakan salah satu metode pendugaan area kecil yang digunakan pada data biner atau cacahan. Pendugaan pada metode EB didasarkan pada distribusi posterior yang parameternya diduga dari data. Metode yang dapat digunakan untuk menduga parameter posteriornya adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Salah satu penerapan metode EB untuk data cacahan adalah model Poisson-Gamma. Dalam penelitian ini dikaji karakteristik penduga EB dan *Mean Square Error* (MSE) penduga EB pada pendugaan area kecil, baik secara teori maupun empiris melalui data simulasi. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa penduga EB bersifat bias. Dengan nilai MSE yang relatif kecil pada jumlah area berukuran kecil, sedang dan besar.

Kata Kunci: Area Kecil, *Empirical Bayes* (EB), Model Poisson Gamma, Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE).

ABSTRACT

CHARACTERISTICS EMPIRICAL BAYES ESTIMATOR IN SMALL AREA ESTIMATION FOR POISSON GAMMA MODEL

By

DYTA OMPUMONA

The small area is a subset of a population where a variable concern. Estimation of small area is defined as a statistical technique to estimate parameters of a small area. Empirical Bayes (EB) method is method in small area estimation for count or binary data. Estimation with EB method based on posterior which its parameter be estimated by data. One of method that can be used to estimate parameter of posterior is Maximum Likelihood Estimation (MLE). One application of EB methods for binary data is Poisson-Gamma model. This research will be reviewing characteristics of EB estimator in small area estimation and Mean Squared Error (MSE) EB estimator in theory and empirical through simulation data. These results so that the EB estimator is biased and the MSE is small with amount of area which small, medium and large size.

Keyword: Small Area, Empirical Bayes (EB), Poisson-Gamma Model, Maximum Likelihood Estimation (MLE).

**KARAKTERISTIK PENDUGA *EMPIRICAL BAYES*
PADA PENDUGAAN AREA KECIL
DENGAN MODEL POISSON-GAMMA**

Oleh

DYTA OMPUMONA

Skripsi

**Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
SARJANA SAINS**

Pada

**Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2016**

Judul Skripsi

: **KARAKTERISTIK PENDUGA *EMPIRICAL BAYES* PADA PENDUGAAN AREA KECIL DENGAN MODEL POISSON-GAMMA**

Nama Mahasiswa

: **Dyta Ompumona**

Nomor Pokok Mahasiswa

: **1217031023**

Jurusan

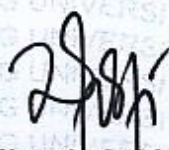
: **Matematika**

Fakultas

: **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing



Widiarti, S.Si., M.Si.

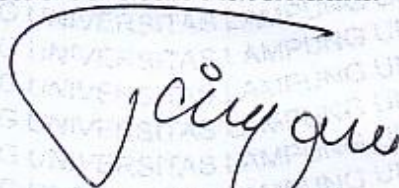
NIP 19800502 200501 2 003



Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.

NIP 19690305 199603 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika



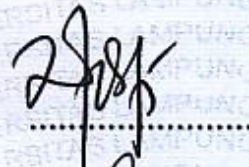
Drs. Tiryono Ruby, Ph.D.

NIP 19620704 198803 1 002

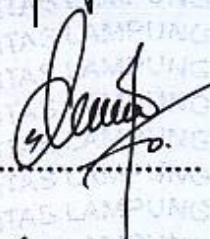
MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

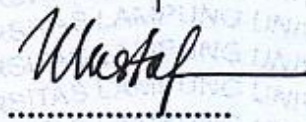
Ketua : **Widiarti, S.Si., M.Si.**



Sekretaris : **Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.**



Penguji
Bukan Pembimbing : **Mustofa Usman, Ph.D.**



2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.

NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **10 Juni 2016**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **“Karakteristik Penduga *Empirical Bayes* Pada Pendugaan Area Kecil Dengan Model Poisson-Gamma”** adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Juni 2016
Yang menyatakan



Dyta Ompumona
NPM. 1217031023

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Dyta Ompumona, dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 15 Oktober 1994. Sebagai anak pertama dari tiga bersaudara, dari Bapak Hendy Jaya dan Ibu Yunita Febriani.

Pendidikan Taman Kanak-kanak (TK) Pratama diselesaikan tahun 2000, Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SDN 2 Sawah Lama Bandar Lampung pada tahun 2006, Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMPN 5 Bandar Lampung pada tahun 2009, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA Perintis 2 Bandar Lampung pada tahun 2012.

Tahun 2012, penulis terdaftar sebagai mahasiswi Jurusan Matematika FMIPA UNILA. Selama menjadi mahasiswa penulis pernah menjadi asisten praktikum Eksplorasi Data dan Statistika Dasar. Penulis juga aktif bergabung di Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unila periode 2013/2015 sebagai anggota di Biro Dana dan Usaha. Pada bulan Januari 2015 melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) Di Desa Fajar Asri Kecamatan Panca Jaya Kabupaten Mesuji selama 30 hari bersama lima teman saya. Selanjutnya bulan Juli-September 2015 melaksanakan Kuliah Praktek (KP) di Badan Pusat Statistik (BPS) Kota Bandar Lampung guna mengaplikasikan serta menerapkan ilmu yang telah diperoleh dalam perkuliahan.

KATA INSPIRASI

*Hiduplah seperti kamu akan mati esok
dan berbahagialah seperti kamu akan hidup selamanya*
(B.J. Habibie)

*Seberat apapun beban masalah yang kamu hadapi saat ini,
percayalah bahwa semua itu tak pernah melebihi batas
kemampuanmu*
(Anonim)

*Kita tidak bisa memecahkan masalah dengan menggunakan
cara berpikir yang sama ketika kita menciptakannya*
(Albert Einstein)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan Alhamdulillah, puji dan syukur kehadiran Allah SWT kupersembahkan karya kecil sangat sederhana ini kepada :

Ayahku Hendy Jaya & Ibuku Yunita Febriani

Terimakasih Ayah, Ibu yang telah mangasihi dan menyayangiku dengan penuh rasa tulus dan telah berjuang dengan penuh ikhlas, tak kenal lelah dan waktu

Adik-adikku (Auryn & Wahyu) & Oma Nina

Serta Sofyan Saputra

Terimakasih karena kalian telah memberikan semangat, senyuman, doa dan nasihat yang tiada habisnya selama ini. Mungkin karya ini tak sebanding dengan pengorbanan yang telah kalian lakukan. Tapi kalian adalah motivasi terbesar dalam hidupku

SANWANCANA

Alhamdulillah segala puji bagi Allah SWT, karena atas rahmat dan hidayah-Nya skripsi ini dapat diselesaikan. Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW, penuntun jalan bagi umat manusia. Skripsi dengan judul “Karakteristik Penduga *Empirical Bayes* Pada Pendugaan Area Kecil Dengan Model Poisson-Gamma” adalah salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana Sains di Universitas Lampung. Dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing utama yang telah meluangkan waktu untuk membimbing, mengarahkan, dan memotivasi penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
2. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc, selaku dosen pembimbing pembantu yang telah memberikan pengarahan dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Mustofa Usman, Ph.D., selaku penguji atas saran dan kritik yang diberikan bagi skripsi ini.
4. Bapak Warsono, Ph.D., selaku dosen pembimbing akademik yang telah membimbing penulis selama mengikuti perkuliahan.
5. Bapak Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Keluargaku tercinta, terutama Ibu, Oma, Ayah dan Wahyu yang menjadi motivasi terbesar dalam hidup, selalu mendukung dan mendoakan apapun yang dicita-citakan, serta Adikku yang cantik Naurah Fitriani Auryn selalu menjadi penghibur suka duka selama ini.
8. Sofyan Saputra yang selalu memberikan semangat, motivasi, doanya dan kebersamaannya selama mengerjakan skripsi dan kuliah.
9. Sahabat tersayang Anggy, Audi, Agnes, Dwi, Emon, Erni, Hana, Mput, Mbed, Minti, Oma, Ute, Sube, Suyuy, Gery, Jo, Danar, Cacat, Rendy atas bantuan, semangat dan rasa kekeluargaan yang telah diberikan.
10. Teman-teman angkatan 2012 yang tidak dapat disebutkan satu persatu dan Keluarga HIMATIKA (Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika).
11. Semua pihak yang tidak bisa disebutkan namanya satu persatu, terimakasih untuk semangat dan bantuan yang telah diberikan.

Akhir kata, Penulis menyadari bahwa skripsi ini ketidaksempurnaan skripsi ini, dan penulis berharap penelitian ini dapat berguna dan bermanfaat bagi pembaca. Amiin.

Bandar Lampung, 2016
Penulis

Dyta Ompumona

DAFTAR ISI

	halaman
DAFTAR TABEL	xi
 I. PENDAHULUAN	
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Tujuan Penelitian	3
1.3. Manfaat Penelitian	3
 II. TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 <i>Small Area Estiation</i>	4
2.2 Model Area Kecil	4
2.2.1 Model Level Area Dasar	5
2.2.2 Model Level Area Unit Dasar	5
2.3 <i>Emperical Bayes</i>	5
2.4 Model Poisson-Gamma	6
2.5 Metode <i>Maximum Likelihood Estimation</i>	8
2.6 Metode Newton Raphson	8
2.7 Karakteristik Penduga	10
2.7.1 Tak Bias.....	10
2.7.2 Ragam Minimum.....	11
2.8 <i>Mean Square Error (MSE)</i>	11
 III. METODOLOGI PENELITIAN	
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	12
3.2 Data Penelitian	12
3.3 Metode Penelitian.....	12
 IV. HASIL DAN PEMBAHASAN	
4.1 Model Poisson-Gamma dengan Metode Bayes	14
4.2 Penduga α, β dengan Metode <i>Maximum Likelihood Estimation</i> (MLE).....	18
4.3 Penduga α, β dengan Metode Newton Raphson	19
4.4 Karakteristik Penduga dari θ_i	21

4.5 Hasil Simulasi bagi $\hat{\theta}_i^{EB}$	24
---	----

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan	27
----------------------	----

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
4.1 Hasil Simulasi Bias dan <i>Mean Squared Error</i>	25

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Area kecil merupakan himpunan bagian dari populasi dimana suatu peubah menjadi perhatian. Teknik statistika untuk menduga parameter area kecil disebut pendugaan area kecil (*small area estimation*, SAE). Pendugaan sederhana area kecil didasarkan pada penerapan model desain penarikan sampel (*design-based*) disebut sebagai pendugaan langsung (*direct estimation*). Pendugaan langsung menghasilkan penduga tak bias namun karena ukuran sampel yang kecil mengakibatkan ragam yang besar sehingga tidak dapat memberikan ketelitian yang baik. Dalam mengatasi masalah ini, pendugaan area kecil dilakukan dengan metode pendugaan tidak langsung (*indirect estimation*) yang artinya bahwa penduga tersebut mencakup data dari domain yang lain.

Berbagai metode pendugaan tidak langsung telah dikembangkan untuk memperoleh penduga area kecil. Metode yang sering digunakan yaitu penduga Bayes Empirik (*Empirical Bayes*, EB), penduga Bayes Hirerarkhi (*Hirerarchical Bayes*, HB) untuk data biner atau cacahan sedangkan untuk data kontinu yaitu penduga prediksi takbias linear terbaik empirik (*Empirical Best Linear Unbiased Prediction*, EBLUP). Pendugaan pada metode EB didasarkan pada distribusi posterior yang parameteranya diduga dari data. Salah satu metode yang dapat

digunakan untuk menduga parameter distribusi posterior adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Metode MLE dapat digunakan untuk menduga parameter jika distribusi dari populasinya diketahui.

Salah satu penerapan metode *Empirical Bayes* (EB) untuk data cacahan adalah model Poisson-Gamma. Model poisson merupakan peluang baku untuk data cacahan namun dalam keadaan tertentu rata-rata dan ragamnya tidak sama, yaitu pada saat terjadi overdispersi. Hal ini dapat diatasi dengan informasi tambahan untuk mengakomodasi kelebihan ragam dari pengamatan dan dikenal sebagai distribusi prior. Distribusi gamma merupakan distribusi yang dapat dipilih sebagai prior. Sehingga model poisson menjadi model dua tahap yaitu model Poisson-Gamma.

Menurut Sadik (2009), penduga yang diperoleh pada pendugaan area kecil perlu dievaluasi karena penduga yang diperoleh merupakan penduga berbias namun memiliki ragam minimum. Dengan demikian untuk mengevaluasi penduga yang baik pada pendugaan area kecil dilakukan menggunakan *Mean Square Error* (MSE). Beberapa penelitian terdahulu seperti penelitian oleh Kismianti (2007), Widiarti (2011) dan Partasiwi (2012) mengkaji pendugaan metode EB pada model Poisson-Gamma. Namun dalam penelitian-penelitian tersebut belum dikaji bias, ragam, dan MSE secara teoritis, sehingga penulis tertarik untuk mengkaji bias, ragam dan MSE penduga EB pada model Poisson-Gamma.

1.2 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan penelitian ini adalah

1. Mengkaji bias dan ragam pada metode *Empirical Bayes* untuk pendugaan area kecil.
2. Mengevaluasi *Mean Square Error* (MSE) pada metode *Empirical Bayes* untuk pendugaan area kecil.

1.3 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah menambah wawasan lebih dalam lagi tentang penduga *Empirical Bayes* dan pendugaan area kecil.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan landasan teori mengenai *small area estimation*, *empirical bayes*, model Poisson-Gamma, *maximum likelihood estimation*, metode newton raphson dan karakteristik penduga parameter.

2.1 *Small Area Estimation*

Persoalan statistik area kecil telah menjadi perhatian serius para statistisi sejak 10 tahun terakhir ini, meskipun dasar pemikirannya telah dimulai jauh sebelumnya. Penduga parameter yang bersifat kekar untuk suatu area kecil, saat ini merupakan tujuan penting bagi banyak badan dan penelitian dalam SAE. Area kecil tersebut didefinisikan sebagai himpunan bagian dari populasi dimana suatu peubah menjadi perhatian. *Small Area Estimation* merupakan metode untuk menduga parameter pada suatu subpopulasi dengan ukuran sampel kecil (Rao, 2003).

2.2 Model Area Kecil

Model area kecil merupakan model dasar dalam pendugaan area kecil. Model dikelompokkan menjadi dua yakni model level area dasar dan model level area unit dasar (Rao, 2003).

2.2.1 Model Level Area Dasar

Pada model level area dasar parameter area kecil yang ingin diamati adalah θ_i , dengan y_i merupakan variabel respon. Sehingga model level area dasar yang menjelaskan hubungan tersebut adalah

$$y_i = \theta_i + e_i ; i=1,2,\dots,n \quad (2.1)$$

dengan e_i adalah galat sampel diasumsikan $e_i \sim \text{iid } N(0, \sigma^2_{e_i})$ (Kurnia, 2009).

2.2.2 Model Level Area Unit Dasar

Pada model pendugaan area kecil berbasis unit diasumsikan bahwa data variabel penyerta unit $x_{ij}^T = (x_{ij1}, x_{ij2}, \dots, x_{ijp})^T$ tersedia untuk setiap elemen ke-j pada area ke-i. Selanjutnya variabel respon y_{ij} diasumsikan berkaitan dengan x_{ij} sehingga bentuk persamaan model pendugaan area kecil berbasis unit sebagai berikut:

$$y_{ij} = x_{ij}^T \beta + e_{ij} + v_i ; j=1,2,\dots,m ; i=1,2,\dots,n \quad (2.2)$$

dengan v_i merupakan pengaruh acak area, β merupakan koefisien regresi dan diasumsikan bahwa $E(e_{ij})=0$ dan $\text{Var}(e_{ij}) = \sigma^2_{e_{ij}}$ (Rao, 2003).

2.3 *Emperical Bayes*

Emperical Bayes (Bayes Empirik) merupakan metode dengan menggunakan inferensia dari estimasi posterior untuk menduga parameter. Metode *Emperical Bayes* merupakan metode yang cocok digunakan dalam menangani data biner dan data cacahan pada pendugaan area kecil. Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan sampel acak berukuran n dari distribusi yang mempunyai fungsi kepekatan peluang

berbentuk $f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)$ dan sebaran dari peubah acak θ yaitu $h(\theta)$ sebaran prior.

Metode EB dalam konteks pendugaan area kecil secara ringkas sebagai berikut:

1. Mendapatkan fungsi kepekatan peluang akhir (posterior) dari $x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) \cdot h(\theta)}{\int f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) \cdot h(\theta) d\theta} \quad (2.3)$$

2. Menduga parameter model dari fungsi kepekatan peluang marginal.
3. Menggunakan fungsi kepekatan peluang akhir (posterior) dugaan untuk membuat inferensi parameter area kecil yang menjadi perhatian.

(Kismiantini, 2007)

2.4 Model Poisson-Gamma

Model poisson merupakan model peluang baku untuk data cacahan. Model ini mengalami keterbatasan dalam rata-rata dan ragam ketika digunakan untuk pendugaan parameter tunggal. Umumnya, data cacahan (seperti data jumlah) mengalami overdispersi. Oleh karena itu, dikembangkan suatu formulasi poisson yang mengakomodasi ragam dari pengamatan data sampel, maka diperkenalkan model dua tahap untuk data cacahan yang dikenal dengan model Poisson-Gamma.

Model Poisson-Gamma dapat ditulis sebagai berikut:

Level 1 : $y_i \sim \text{Poisson}(\theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$

Level 2 : $\theta_i \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, $i=1, 2, \dots, n$

Misalkan $y_1, y_2, \dots, y_n$ sampel acak dengan fungsi peluang:

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta_i) = \frac{e^{-\theta_i} \theta_i^{y_i}}{y_i!}; \quad y_i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Dengan fungsi kepekatan peluang gamma:

$$h(\theta_i) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \theta_i^{\alpha-1} e^{-\theta_i/\beta}; \quad 0 \leq \theta_i < \infty \quad (2.5)$$

Maka didapatkan fungsi bersama model Poisson-Gamma sebagai berikut:

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n, \theta_i) = \frac{e^{-\theta} \theta^{y_i}}{y_i!} \cdot h(\theta_i) \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \theta_i^{\alpha-1} e^{-\theta_i/\beta} \quad (2.6)$$

sebaran marginal diperoleh dengan mengintegrasikan fungsi bersama sebagai berikut :

$$k(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \Gamma(y_i + \alpha) \left(\frac{1}{1+1/\beta} \right)^{(y_i+\alpha)} \quad (2.7)$$

Dengan demikian fungsi posterior adalah:

$$\begin{aligned} f(\theta_i | y_1, y_2, \dots, y_n) &= \frac{f(y_1, y_2, \dots, y_n, \theta_i) h(\theta_i)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2, \dots, y_n, \theta_i) h(\theta_i) d\theta_i} \\ &= \frac{\theta^{y_i+\alpha} e^{-\theta_i(1+1/\beta)}}{\Gamma(y_i+\alpha) \left(\frac{1}{1+1/\beta} \right)^{(y_i+\alpha)}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

(Larsen dan Marx, 2012)

Sehingga $\theta_i | y_i, \beta, \alpha \sim \text{Gamma}(y_i + \alpha, 1+1/\beta)$. Dari posterior tersebut diperoleh

penduga bayes bagi θ_i dan ragam bagi θ_i adalah

$$\hat{\theta}_i^B = E(\theta_i | y_i) = (y_i + \alpha) / (1 + 1/\beta) \quad (2.9)$$

$$\text{Var}(\theta_i | y_i) = (y_i + \alpha) / (1 + 1/\beta)^2 \quad (2.10)$$

Penduga EB dapat diperoleh dengan cara menduga parameter prior berdasarkan data sehingga penduga EB yaitu :

$$\hat{\theta}_i^{EB} = (y_i + \hat{\alpha}) / (1 + \hat{\beta}) \quad (2.11)$$

Parameter pada distribusi prior yaitu α dan β dapat diduga dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation*.

2.5 Metode Maksimum Likelihood Estimation

Misalkan terdapat $y_1, y_2, \dots, y_n$ dari suatu populasi yang memiliki fungsi probabilitas $f(y; \theta)$; $\theta \in \Omega$, dimana θ merupakan suatu parameter yang tidak diketahui dan Ω adalah ruang parameter. Karena $y_1, y_2, \dots, y_n$ adalah sampel acak maka fkp bersama dari $y_1, y_2, \dots, y_n$ adalah

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n; \theta) = f(y_1; \theta) f(y_2; \theta) \dots f(y_n; \theta) \quad (2.12)$$

Berdasarkan Hogg and Craig (1995), fungsi likelihood didefinisikan sebagai fkp bersama. Misalkan fungsi likelihood dinotasikan sebagai $L(\theta; y_1, y_2, \dots, y_n) = L(\theta)$ sehingga

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(y_1, y_2, \dots, y_n; \theta) \\ &= f(y_1; \theta) f(y_2; \theta) \dots f(y_n; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dalam metode *maximum likelihood estimation* (MLE), penduga dari θ diperoleh dengan memaksimumkan fungsi *likelihood*. Mencari penduga dari θ yang dengan memaksimumkan fungsi $\ln L(\theta)$ sebut $l(\theta)$. Jadi penduga dari θ dapat diperoleh dengan mencari solusi dari persamaan berikut:

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

2.6 Metode Newton-Raphson

Pada bentuk-bentuk persamaan non linear dengan derajat lebih dari dua, terkadang akan ditemukan kesulitan untuk mendapatkan akar-akarnya. Untuk itu ada metode-metode yang sering digunakan untuk mencari akar bagi persamaan non linear tersebut salah satunya yaitu Newton Raphson. Ada pendekatan dalam menurunkan

rumus metode Newton Raphson yaitu dengan deret Taylor. Dasar dari metode ini adalah pendekatan deret Taylor sebagai berikut:

$$f(\theta^{t+1}) = f(\theta^t) + \sum_{i=1}^p \frac{1}{i!} \frac{\partial^i f(\theta^t)}{\partial (\theta^t)^i} (\theta^{t+1} - \theta^t)^i \quad (2.14)$$

bila pada suku orde-1 maka:

$$f(\theta^{t+1}) = f(\theta^t) + (\theta^{t+1} - \theta^t) f'(\theta^t) \quad (2.15)$$

karena persoalan mencari akar, maka $f(\theta^{t+1}) = 0$ sehingga

$$0 = f(\theta^t) + (\theta^{t+1} - \theta^t) f'(\theta^t)$$

$$\theta^{t+1} = \theta^t - \frac{f(\theta^t)}{f'(\theta^t)} \quad (2.16)$$

Metode ini dapat diperluas untuk menyelesaikan sistem persamaan dengan lebih dari satu parameter. Misal $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ maka itersinya sebagai berikut:

$$\theta^{t+1} = \theta^t - (H^t)^{-1} G^t \quad (2.17)$$

Dengan indeks t menyatakan ukuran iteratif. Untuk G, θ^{t+1} dan θ^t dalam bentuk vektor, dan H dalam bentuk matriks yaitu :

$$\theta^{t+1} = \begin{bmatrix} \theta_1^{t+1} \\ \vdots \\ \theta_k^{t+1} \end{bmatrix} \text{ dan } \theta^t = \begin{bmatrix} \theta_1^t \\ \vdots \\ \theta_k^t \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial (\theta_1)^2} & \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial (\theta_k)^2} & \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial (\theta_k)^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Dan } G = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta_k} \end{bmatrix}$$

Estimator θ^t diiteratif hingga diperoleh nilai jarak antara θ^{t+1} dan θ^t sangat kecil atau $|\theta^{t+1} - \theta^t| = \varepsilon$ (Burden dan Faires, 2010).

2.7 Karakteristik Penduga

Jika θ merupakan parameter yang dapat diduga, maka penduga dari θ dinotasikan $\hat{\theta}$. Berkaitan dengan karakteristik pendugaan maka akan dijelaskan penduga yang baik sebagai berikut:

2.7.1 Takbias

Sifat penduga yang baik salah satunya adalah sifat takbias, adapun definisi takbias suatu penduga sebagai berikut:

Definisi 2.7.1.1 (Takbias)

Misalkan $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ merupakan sampel acak dari fungsi kepekatan peluang kontinu, $f_y(y; \theta)$, dimana θ merupakan parameter yang tidak diketahui. Penduga $\hat{\theta}_n [=h(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)]$ dikatakan takbias bagi θ , jika $E(\hat{\theta}) = \theta$. Untuk konsep dan terminologi yang sama berlaku, jika terdapat data sampel acak $X_1, X_2, \dots, X_n$ yang diambil dari fungsi kepekatan peluang diskret $p_x(k; \theta)$. Suatu penduga $\hat{\theta}_n [=h(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)]$ dikatakan penduga takbias asimtotik bagi θ jika $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$. Jika $E(\hat{\theta}) \neq \theta$ maka penduga dikatakan penduga yang berbias. (Larsen dan Marx, 2012).

2.7.2 Ragam Minimum

Selain sifat ketakbiasan, penduga parameter dikatakan baik apabila memenuhi sifat penduga ragam minimum. Adapun definisi ragam minimum suatu penduga sebagai berikut:

Definisi 2.7.2.1 (Ragam Minimum)

Bila $U(X)$ merupakan penduga bagi $g(\theta)$, maka $U_1(X)$ dikatakan sebagai penduga beragam terkecil, jika:

$$\sigma_{u1(x)}^2 \leq \sigma_{U(X)}^2 \quad (2.18)$$

dimana $U(X)$ merupakan sembarang penduga bagi $g(\theta)$ (Hogg and Craig, 1995).

2.8 Mean Square Error (MSE)

Keakuratan suatu penduga umumnya dievaluasi berdasarkan nilai Kuadrat Tengah Galat (KTG) / *Mean Square Error* (MSE). Nilai MSE dari suatu penduga parameter memiliki peranan penting untuk diketahui, diantaranya adalah untuk mengukur seberapa akurat penduga parameter yang diperoleh.

Jika $\hat{\theta}_i^{EB}$ merupakan penduga bagi θ_i maka MSE tidak bersyarat dari $\hat{\theta}_i^{EB}$ adalah

$$MSE(\hat{\theta}_i^{EB}) = k_1(\alpha, \beta) + E(\hat{\theta}_i^{EB} - \hat{\theta}_i^B)^2 \quad (2.19)$$

$$k_1(\alpha, \beta) = E(\text{Var}(\theta_i|y_i)) = MSE(\hat{\theta}_i^B) \quad (2.20)$$

Jika α dan β tidak diketahui, maka penduga bagi EB yaitu:

$$\hat{\theta}_i^{EB} = (y_i + \hat{\alpha}) / (1 + \hat{\beta}) \quad (2.21)$$

dengan $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ diperoleh dari data (Sharon, 2009).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Waktu penelitian dilakukan pada semester genap 2015-2016.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data simulasi atau data yang dibangkitkan dengan menggunakan software R i386 3.1.0. Pembangkitan data dalam simulasi dilakukan menggunakan model Poisson-Gamma dengan $y_i \sim \text{Poisson}(\theta_i)$ dan $\theta_i \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ Simulasi dirancang untuk mengetahui karakteristik bias dan ragam minimum dari penduga EB pada model Poisson-Gamma dengan jumlah area ditetapkan $n=10$, $n=20$, $n=50$ dan $n=100$ sebagai representasi jumlah area yang berukuran kecil, sedang dan besar.

3.3 Metode Penelitian

Kajian tentang karakteristik dari penduga parameter pada model Poisson-Gamma dilakukan secara teori dan empiris melalui simulasi. Adapun langkah-langkah secara teori yaitu:

1. Menetapkan model dua tahap yaitu model Poisson-Gamma
 Level 1 : $y_i \sim \text{Poisson}(\theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$
 Level 2 : $\theta_i \sim \text{Gamma}(\alpha, 1/\beta)$, $i=1, 2, \dots, n$
2. Mendapatkan fungsi kepekatan peluang akhir (posterior) dari sampel acak $y_i \sim \text{Poisson}(\theta_i)$ dan dengan priornya $\theta_i \sim \text{Gamma}(\alpha, 1/\beta)$
3. Mendapatkan fungsi marginal dari model Poisson-Gamma
4. Menduga parameter θ_i model Poisson-Gamma dari fungsi kepekatan peluang akhir
5. Mendapatkan penduga EB ($\hat{\theta}_i^{EB}$)
6. Menentukan penduga α dan penduga β dengan menggunakan MLE
7. Membuktikan karakteristik ketakbiasan bagi penduga EB
8. Menentukan ragam dan MSE bagi penduga EB.

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam simulasi untuk model Poisson-Gamma yaitu:

1. Membangkitkan θ_i dari sebaran $\theta_i \sim \text{Gamma}(\alpha, 1/\beta)$
2. Membangkitkan y_i dari sebaran $y_i \sim \text{Poisson}(\theta_i)$
3. Mendapatkan nilai $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ dengan metode iterasi Newton Raphson
4. Mendapatkan penduga EB ($\hat{\theta}_i^{EB}$) dengan iterasi 1000
5. Mendapatkan nilai bias, ragam dan MSE dari $\hat{\theta}_i^{EB}$.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa:

1. Karakteristik parameter $\hat{\theta}_i^{EB}$ yang diperoleh pada pendugaan area kecil dengan menggunakan metode EB merupakan penduga yang berbias namun bias yang diperoleh kecil.
2. *Mean Square Error* (MSE) dari parameter $\hat{\theta}_i^{EB}$ yang dihasilkan cukup kecil dengan menggunakan metode EB artinya nilai duga parameter $\hat{\theta}_i^{EB}$ cukup mendekati nilai parameter θ_i yang sebenarnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Burden, R. L., and Faires, J. D. 2010. *Numerical Analysis*. Nine Edition. Brooks and Cole, USA.
- Hogg, R.V., and Craig, A.T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics*, Fifth Edition. Pretice-Hall, Inc., New Jersey.
- Kismiantini. 2007. Pendugaan Statistik Area Kecil Berbasis Model Poisson-Gamma. Tesis. Institut Pertanian Bogor, Bogor.
- Kurnia, Anang. 2009. Prediksi Terbaik Empirik Untuk Model Transformasi Logaritma di Dalam Pendugaan Area Kecil Dengan Penerapan Pada Data Susenas. Disertasi. Institut Pertanian Bogor, Bogor.
- Larsen, Richard J., and Marx, Morris L. 2012. *An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications*. Fifth Edition. Pretice-Hall, Inc., Boston
- Partasiwi, Nurashri. 2012. Pendugaan Parameter Model Poisson-Gamma Menggunakan Algoritma EM (*Expectation Maximization*). Skripsi. Universitas Lampung, Lampung.
- Rao, J.N.K. 2003a *Small Area Estimation*. John Wiley and Sons, New York.
- Sadik, Kusman. 2009. Metode Prediksi Tak Bias-Linear Terbaik Dab Bayes Berhirearki Untuk Pendugaan Area Kecil Berdasarkan Model State Space. Disertasi. Institut Pertanian Bogor, Bogor.
- Sharon, L.L. 2009. Jacknife Estimation of Mean Squared Error of Small Area Predictors in Nonlinear Mixed Models. *Journal of Biometrika*. **96**, 457-468

Widiarti. 2011. Kajian Bias Metode *Area-Spesific Jackknife* Dan Bias Metode *Weighted Jackknife* Dalam Pendugaan Area Kecil Untuk Respon Poisson Dengan Pendekatan Bayes. Tesis. Institut Pertanian Bogor, Bogor.

LAMPIRAN