KARAKTERISTIK BILANGAN CATALAN DENGAN *LATTICE PATH* DAN KOMBINATORIAL

(Skripsi)

Oleh

IRA NURDIANA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2016

ABSTRACT

CHARACTERISTIC OF CATALAN NUMBER WITH *LATTICE PATH* AND KOMBINATORIAL

By

IRA NURDIANA

Catalan number is a positive integer obtained by calculating the structure of the combination of a sequence. Catalan Number can be expressed in the form of recursive and can be solved in many ways, such as by *lattice path*, *balanced paranthesis*, combinatorial principle characteristic equation and the moment generating function. By completing the modification of a combinatorial problem and the relationship to the Catalan number, obtained by a recursive equation solution Catalan numbers are

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$$

Form of recursive equation is balanced parenthesis

$$P_n = P_0P_{n-1} + P_1P_{n-2} + \ \dots + P_{n-1}P_0$$

Which has similarities with the Catalan number form.

Form the moment generating function Catalan number is

$$C_i = \frac{1}{i-1}\binom{2i}{i}$$

Keywords : Catalan number, *lattice path*, recurrence relation, *balanced paranthesis*.

ABSTRAK

KARAKTERISTIK BILANGAN CATALAN DENGAN *LATTICE PATH* DAN KOMBINATORIAL

Oleh

IRA NURDIANA

Bilangan Catalan merupakan bilangan bulat positif yang diperoleh dengan menghitung struktur kombinasi dari suatu barisan. Bilangan Catalan dapat dinyatakan dalam bentuk rekursif dan dapat diselesaikan dengan banyak cara, diantaranya dengan *lattice path*, *balanced paranthesis*, persamaan karakteristik prinsip kombinatorial dan fungsi pembangkit momen. Dengan menyelesaikan modifikasi dari suatu persoalan kombinatorial dan mencari hubungannya dengan bilangan Catalan, diperoleh solusi persamaan rekursif bilangan Catalan adalah

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$$

Bentuk persamaan rekursif *balanced paranthesis* adalah

$$P_n = P_0P_{n-1} + P_1P_{n-2} + \ \dots + P_{n-1}P_0$$

Yang memiliki kesamaan dengan bentuk bilangan Catalan.

Bentuk fungsi pembangkit momen bilangan Catalan adalah

$$C_i = \frac{1}{i-1}\binom{2i}{i}$$

Kata kunci : Bilangan Catalan, *lattice path*, relasi rekurensi, *balanced paranthesis*.

KARAKTERISTIK BILANGAN CATALAN DENGAN *LATTICE PATH* DAN KOMBINATORIAL

Oleh

IRA NURDIANA

Skripsi
Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2016

Judul Skripsi : **KARAKTERISTIK BILANGAN CATALAN DENGAN *LATTICE PATH* DAN KOMBINATORIAL**

Nama Mahasiswa : *Ira Nurdiana*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1217031037

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Amanto, S.Si., M.Si.
NIP 19730314 200012 1 002

Agus Sutrisno, M.Si.
NIP 19700831 199903 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Agus Sutrisno, M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **27 Juni 2016**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Ira Nurdiana**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1217031037**

Program Studi : **Matematika**

Jurusan : **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagai persyaratan penyelesaian studi pada universitas atau institut lain.

Bandar Lampung, Juni 2016

Yang menyatakan

METERAI TEMPEL
3AD70ADC002842745
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Ira Nurdiana

NPM. 1217031037

RIWAYAT HIDUP

Penulis di lahirkan di Kediri, Jawa Timur tepatnya pada tanggal 04 Agustus 1993, sebagai putri pertama dari pasangan Bapak Sukirno dan Ibu Buini.

Penulis menamatkan pendidikan Taman Kanak-kanak (TK) di TK Harapan Jawa Timur pada tahun 2000, Sekolah Dasar (SD) di SD Negeri Sengon 02 Jawa Timur pada tahun 2006, Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMP Negeri 02 Purwosari Jawa Timur pada tahun 2009, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA Negeri 1 Seputih Banyak Lampung Tengah pada tahun 2012.

Pada tahun 2012 penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam jurusan Matematika, melalui jalur PMPAP. Selama menjadi mahasiswa, penulis bergabung di Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) yang diamanahkan sebagai Anggota Biro Dana dan Usaha periode 2013-2014.

Pada bulan Maret 2015 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Dinas Peternakan dan Kesehatan Hewan Provinsi Lampung guna mengaplikasikan ilmu yang telah didapat sewaktu kuliah. Pada bulan Januari 2016 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Moris Jaya, Kecamatan Banjar Agung, Kabupaten Tulang Bawang.

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillahirobil'alamin serta dengan segala syukur, rahmat, dan hidayah serta karunia Allah SWT dapat memberikanku kesempatan untuk menuntut ilmu di Universitas Lampung.
Sebuah pengorbanan waktu, tenaga, fikiran, yang harus diluangkan demi menyelesaikan karya kecil ini sebagai syarat kelulusan. Kupersembahkan karya kecilku ini teruntuk:

Dua nama yang sangat berjasa yaitu Bapak (Bp Sukirno) dan Mamak (Ibu Buini) yang selalu memberikan doa, semangat, dorongan, nasihat, dukungan moril maupun materil, kasih sayang serta pengorbanan yang tak tergantikan hingga aku selalu kuat menjalani setiap rintangan yang ada di depanku.
Bapak…Mamak…terimalah bukti kecil ini sebagai kado keseriusanku untuk membalas semua pengorbanan kalian yang ikhlas tanpa kenal lelah berjuang separuh nyawa hingga segalanya demi hidupku.

Hidup ini terlalu berat untuk mengandalkan diri sendiri tanpa bantuan Allah SWT dan orang lain. Untuk itu kupersembahkan untaian terima kasih kepada saudara sekandungku yaitu Adik-adikku (Pebri Hamsah dan Pepi Emiliana) yang selalu memberi nasihat, dan dukungan, serta pengalaman yang lebih dahulu sebagai pembelajaran yang indah untukku.

Untuk ribuan tujuan yang harus dicapai, untuk jutaan impian yang akan di kejar, untuk sebuah pengharapan, agar hidup jauh lebih bermakna, tiada lain kalian adalah semangat terbesar dalam hidupku.

KATA INSPIRASI

Pengetahuan akan membawa kita kepada kesempatan

Untuk membuat perbedaan

Calon manusia sukses tidak akan pernah mengeluh tapi

akan sibuk memperbaiki diri dari kesalahan

yang pernah dibuatnya

Jika tak mampu jadi yang terbaik

Jadilah yang mampu membahagiakan

SEMANGATKU...

Ketika aku mulai merasa lelah, aku selalu ingat pesan dan

raut wajah beliau ketika pertama kali menghantarkanku

kuliah dan menaruh harapan besar di pundakku

SANWACANA

Alhamdulilahirabbil'alamin dengan rasa syukur kehadirat Allah SWT serta rahmat dan karunia Nya skripsi ini dapat diselesaikan. Skripsi dengan judul "**KARAKTERISTIK BILANGAN CATALAN DENGAN *LATTICE PATH* DAN KOMBINATORIAL**" disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Universitas Lampung. Selesainya skripsi ini, adalah juga berkat motivasi dan pengarahan serta bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis ingin menyampaikan banyak terima kasih kepada:

1. Bapak Amanto, S.SI., M.Si, selaku Dosen Pembimbing 1 yang telah meluangkan waktu dan membimbing penulis selama menyusun skripsi.
2. Bapak Agus Sutrisno, M.Si, selaku Dosen Pembimbing 2 yang telah memberi banyak masukan dan arahan kepada penulis selama menyusun skripsi.
3. Bapak Drs. Tiryono Rubby, M.Sc., Ph.D, selaku Dosen Penguji yang memberi masukan dan evaluasi kepada penulis selama menyusun skripsi.
4. Ibu Ir. Netti Herawati, M.Sc.,Ph.D, selaku Pembimbing Akademik yang telah mengarahkan penulis dari awal sampai lulus kuliah.
5. Bapak Drs. Tiryono Rubby, M.Sc., Ph.D, selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas lampung.
7. Dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung yang telah memberikan ilmu serta bantuan kepada penulis.
8. Bapak dan Mamak ku tersayang yang telah memberikan motivasi, do'a, dan kasih sayang yang begitu besar serta dukungan moril maupun materil kepada penulis.
9. Adik-adikku tersayang yang selalu memberi motivasi kepada penulis.
10. Sahabat yang kini menjadi Saudaraku Abdurrohman, Astuti, Siti, Maya, Tri, Desi, Shela, Sri dan Tika yang menjadi pendengar keluh kesah penulis saat menempuh pendidikan di Universitas Lampung.
11. Teman-teman angkatan 2012 yang selalu memberikan motivasi dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini
12. Seluruh pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu, atas peran dan dukungannya dalam menyusun skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, sehingga kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat berguna bagi pembaca sebagai acuan di penelitian selanjutnya.

Bandar Lampung, Juni 2016

Penulis

Ira Nurdiana

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

1. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang dan Masalah

Dalam ilmu matematika dikenal bermacam-macam bilangan. Tiap bilangan mempunyai definisi masing-masing beserta aplikasinya. Salah satu bilangan tersebut adalah bilangan Catalan. Bilangan Catalan (*Catalan number*) adalah suatu bentuk bilangan yang terdiri dari bilangan bulat positif yang diperoleh dengan menghitung struktur kombinasi dari suatu barisan. Barisan adalah daftar urutan bilangan dari kiri ke kanan yang mempunyai karakteristik atau pola tertentu. Salah satu barisan yang terkenal adalah barisan Fibonacci yang didefinisikan sebagai $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2$ dimana $F_0 = 0$ dan $F_1 = 1$. Dengan melakukan subtitusi untuk nilai-nilai n, maka diperoleh beberapa suku pertama dari barisan Fibonacci, yaitu $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21\ , 34, 55, \ldots$. (Zaky, 2013).

Bilangan Catalan ditemukan pada tahun 1844 oleh seorang matematikawan asal Belgia, Eugène Charles Catalan ketika mempelajari bentuk barisan *parentheses* (barisan bentuk kurung). *Parentheses* dibuat dari semua string seimbang yang dibentuk dari n tanda kurung sebelah kiri dan n tanda kurung sebelah kanan dengan jumlah dari tanda kurung sebelah kanan tidak boleh melebihi tanda kurung sebelah kiri. Catalan menghitung banyaknya cara suatu rantai dari $n + 1$ simbol yang bisa dibentuk dengan n pasang tanda kurung sehingga setiap pasangan memiliki 2 simbol, sebuah ekspresi kurung dan sebuah simbol atau dua ekspresi kurung. Sebagai contoh, untuk $n = 3$, dapat dibentuk string seperti ()()() dan (( ))( ), namun tidak diizinkan membentuk string seperti (( ))) atau ( ))(( ). Bilangan ini telah lama ditemukan namun tidak diketahui karena tidak diperkenalkan di dalam buku cetak. Barisan bilangan catalan (C_n) memiliki definisi $C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-1}$, $n \geq 0$. Dimana $C_0 = 1$,maka diperoleh $C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \ldots C_n C_0$ untuk $n \geq 0$ atau dapat juga dinyatakan dalam $C_n = \frac{1}{n+1} C(2n, n)$.

Dalam perkembangannya banyak buku atau artikel tentang bilangan catalan yang membahas bentuk-bentuk bilangan ini. Bilangan catalan sangat bermanfaat untuk memecahkan masalah-masalah dalam ilmu komputer. Selama ini pembelajaran tentang bilangan ini dipenuhi oleh metode yang rumit sehingga banyak orang awam yang sulit memahami bilangan ini. Karena itulah bilangan ini akan diperkenalkan dengan cara yang lebih mudah dan menarik sehingga akan dihindari teorema-teorema yang tidak umum (Arianto, 2008).

Dalam penelitian ini akan dibahas tentang bilangan bilangan Catalan berdasarkan karakteristiknya. Karena itu, penulis memilih judul **“KARAKTERISTIK BILANGAN CATALAN DENGAN *LATTICE PATH* DAN KOMBINATORIAL”.**

1.2. Tujuan Penelitian

Mengkaji karakteristik bilangan Catalan dan mencari solusi persamaan rekursifnya dengan menggunakan kombinatorial.

1.3. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Dapat memperoleh pengetahuan tentang bilangan Catalan.
2. Dapat memberikan pemikiran dalam rangka memperluas dan memperdalam pengetahuan ilmu matematika khususnya mengenai bilangan Catalan.
3. Dapat memperoleh pengetahuan tentang karakteristik bilangan Catalan dengan *lattice path*
4. Dapat memperoleh pengetahuan tentang persamaan rekursif dengan menggunakan kombinatorial.

1.4. Batasan Masalah

Pembahasan masalah ini terbatas pada pengenalan bilangan Catalan melalui *lattice path* , persamaan rekursif dengan struktur kombinatorial, dan menentukan suatu bilangan Catalan ditinjau dari karakteristiknya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa konsep dasar, definisi mengenai teori diskrit dan teori bilangan yang mendukung proses penelitian. Dalam penyelesaian bilangan Catalan akan dibutuhkan tentang konsep koefisien binomial sebagai berikut.

2.1. Koefisien Binomial

Koefisien binomial merupakan bilangan-bilangan yang muncul dari hasil penjabaran penjumlahan dua peubah yang dipangkatkan, misalnya $(a + b)^n$. Sepintas terlihat bahwa ekspresi $(a + b)^n$ tidak ada hubungannya dengan kombinasi, tetapi bisa mendapatkan rumus untuk penjabaran $(a + b)^n$.dengan menggunakan rumus banyaknya kombinasi r dari n unsur. Teori untuk menurunkan rumus yang diperoleh dari penjabaran $(a + b)^n$ dengan menggunakan kombinasi dikenal dengan Teorema Binomial. Sebelum membahas teorema ini, perhatikan ilustrasi berikut ini dalam aljabar

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Penjabaran dari $(a + b)^3$ yang merupakan perkalian 3 faktor $(a + b)$ yaitu

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$$

adalah pemilihan baik a maupun b dari masing-masing ketiga faktor $(a + b)$ tersebut, selanjutnya hasil pemilihan tersebut dikalikan bersama-sama dan kemudian hasil kalinya dijumlahkan. Misalnya, jika memilih a dari setiap faktor dan mengalikannya, maka diperoleh aaa. Jika memilih a dari faktor pertama, a dari faktor kedua dan b dari faktor ketiga kemudian mengalikannya, maka diperoleh aab, dan seterusnya. Sehingga semua kemungkinan pemilihan baik a maupun b dari masing-masing faktor adalah

$$aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb$$

Atau kalau dikalikan diperoleh

$$a^3, a^2b, a^2b, ab^2, a^2b, ab^2, ab^2, b^3$$

Jika semua suku-suku diatas dijumlahkan, maka hasilnya adalah

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Bilangan 3 yang merupakan koefisien dari a^2b muncul dari pemilihan a dari 2 faktor dan b dari 1 faktor sisanya. Hal ini bisa dilakukan dalam $C(3,2)$ atau $C(3,1)$ cara. Cara yang sama bisa dilakukan untuk memperoleh koefisien b^3 yang dalam hal ini merupakan pemilihan a dari 0 faktor dan b dari 3 faktor lainnya yang dapat dilakukan dalam $C(3,0)$ atau $C(3,3)$ cara, dan seterusnya. Sehingga secara umum koefisien-koefisien tersebut bisa ditentukan berdasarkan teorema binomial berikut (Johnsonbaugh, 1997)

Teorema 2.1.1(Johnsonbaugh, 1997)

Jika a dan b adalah bilangan real dan n adalah bilangan bulat positif, maka

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k$$

Bukti

Penjabaran dari $(a+b)^n$ merupakan perkalian $(a+b)$ sebanyak n faktor, yaitu

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\ldots(a+b)$$

Koefisien dari $a^{n-k}b^k$ dapat ditentukan dengan banyaknya cara pemilihan a dari $n-k$ faktor diantara n faktor yang ada atau pemilihan b dari k faktor diantara n faktor. Hal ini bisa dilakukan dengan $C(n,n-k)$ atau $C(n,k)$ cara. Penentuan koefisien ini berlaku untuk setiap $k = 0, 1, \ldots, n$. Sehingga

$$(a+b)^n = C(n,0)a^{n-0}b^0 + C(n,1)a^{n-1}b^1 + \ldots + C(n,n)a^{n-n}b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k$$

Contoh 2.1.1

1. Jabarkan $(a+b)^4$

penyelesaian

$$(a+b)^4 = C(4,0)a^{4-0}b^0 + C(4,1)a^{4-1}b^1 + C(4,2)a^{4-2}b^2 + C(4,3)a^{4-3}b^3 + C(4,4)a^{4-4}b^4$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

2. Tentukan koefisien dari a^5b^6 dalam penjabaran $(a+b)^{11}$

penyelesaian

$$C(11,6) = \frac{11!}{5!\,6!} = \frac{11.10.9.8.7}{5.4.3.2.1} = 462$$

Teorema 2.1.2 (Johnsonbaugh, 1997)

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)$$

Untuk $1 \leq k \leq n$.

Bukti

Misalkan X sebuah himpunan dengan n unsur. Ambil $a \notin X$ sehingga $C(n+1,k)$ merupakan banyaknya sub himpunan k unsur dari $Y = X \cup \{a\}$. Sub himpunan k unsur dari Y bisa dibagi menjadi dua kelas yang saling lepas, yaitu

1. Sub himpunan dari Y yang tidak mengandung a
2. Sub himpunan dari Y yang mengandung a

Subhimpunan dari kelas 1 merupakan subhimpunan k unsur dari X dan banyaknya adalah $C(n,k)$. Sedangkan subhimpunan dari kelas 2 merupakan subhimpunan $k-1$ unsur dari X digabung dengan a dan banyaknya adalah $C(n,k-1)$. Dengan demikian

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)$$

Identitas pada teorema di atas disebut dengan identitas kombinatorial. Sedangkan argumen yang dipakai untuk pembuktiannya disebut dengan argumen kombinatorial.

Contoh 2.1.2

Gunakan Teorema 2.1.1 untuk menunjukkan bahwa

$$\sum_{i=k}^{n} C(i,k) = C(n+1,k+1)$$

Dengan menggunakan Teorema 2.1.1, diperoleh

$$C(i+1,k+1) = C(i,k) + C(i,k+1)$$

Sehingga

$$C(i,k) = C(i+1,k+1) - C(i,k+1)$$

Berikutnya menjabarkan $\sum_{i=k}^{n} C(i,k)$, yaitu

$$\sum_{i=k}^{n} C(i,k) = C(k,k) + C(k+1,k) + C(k+2,k) + \ \dots + C(n,k)$$

$$= 1 + C(k+2,k+1) - C(k+1,k+1)$$

$$+C(k+3,k+1) - C(k+2,k+1)$$

$$+ \ \dots + C(n+1,k+1) - C(n,k-1)$$

$$= C(n+1,k+1)$$

Secara umum koefisien binomial $\binom{n}{r}$ dapat didefinisikan sebagai berikut.

Misalkan n dan r adalah bilangan buat non negatif.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Dengan $0 \leq r \leq n$. Jika $r > n$, maka $\binom{n}{r}$ didefinisikan sebagai 0 (Koshy, 2009)

Teorema 2.1.3 (Koshy, 2009)

Misalkan n dan r adalah bilangan bulat non negatif, maka

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Bukti

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-(n-r)!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)r!}$$

$$= C(n,r)$$

2.2. Relasi Rekurensi

Ketika mempelajari barisan dari bilangan a_n, akan didapatkan suatu hubungan antara a_n dan a_{n-1} atau antara beberapa nilai sebelum a_i , $i < n$, untuk suatu bilangan bulat nonnegatif n. Hubungan inilah yang disebut dengan relasi rekurensi (Rosen, 2012).

Suatu barisan dikatakan rekursif jika kondisi awal barisan ditentukan, dan suku-suku barisan selanjutnya dinyatakan dalam hubungannya dengan suku-suku sebelumnya. Sebuah barisan dikatakan solusi dari suatu relasi rekurensi jika tiap suku barisan tersebut memenuhi relasi rekurensi tersebut.

Contoh 2.2.1

Solusi dari relasi rekurensi $a_n = 3a_{n-1}$, jika diketahui $a_0 = 2$

$$a_n = 3a_{n-1}$$

$$a_n = 3(3a_{n-2}) = 3^2 . a_{n-2}$$

$$a_n = 3\big(3(3a_{n-3})\big) = 3^3 . a_{n-3}$$

$$.$$

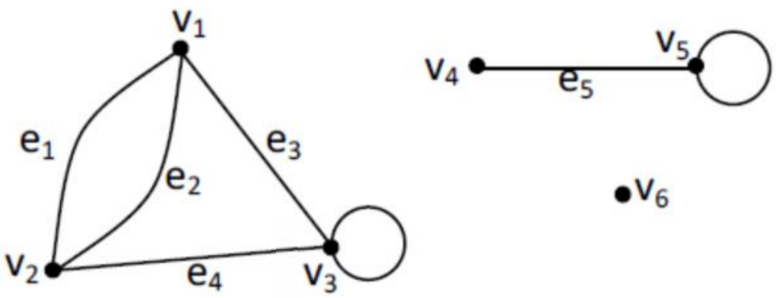
$$.$$

$$a_n = 3^n . a_{n-n} = 3^n . a_0$$

$$a_n = 2. 3^n$$

2.3. Konsep Dasar Teori Graf

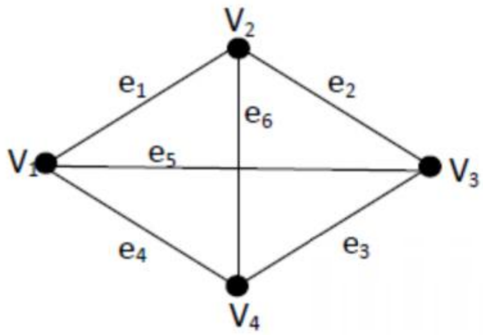
Graf G adalah suatu struktur (V, E) dengan $V(G)$ himpunan tak kosong yang elemen – elemennya disebut titik / *vertex* di G, sedangkan $E(G)$ (tidak kosong) adalah himpunan pasangan tak terurut dari elemen – elemen di V(G) yang anggotanya disebut sisi / *edge.* (Deo, 1989)



Gambar 1. Contoh Graf G dengan 6 titik/*vertex* dan 5 garis/*edge*.

2.3.1 *Walk*

Suatu barisan bergantian antara titik dan garis, yang dimulai dan diakhiri oleh titik sedemikian sehingga setiap garis menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Tidak ada sisi yang muncul lebih dari satu kali (Deo, 1989)



Gambar 2. Graf yang memuat *walk* : $V_1, e_1, V_2, e_2, V_3, e_5, V_1, e_4, V_4$

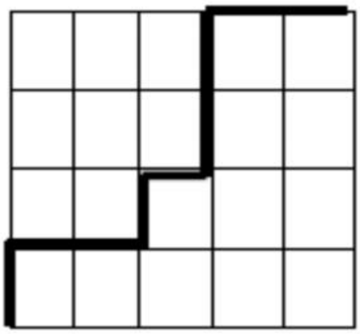
2.3.2. *Path* / Lintasan

Path / lintasan adalah suatu *walk* yang tidak memiliki pengulangan titik / *vertex* (Deo, 1989)

Berdasarkan gambar 2. graf yang memuat *path*/lintasan : $V_1, e_1, V_2, e_2, V_3, e_3, V_4$

2.4. *Lattice Path*

Lattice adalah suatu model matematika dalam ruang diskrit yang terdiri dari dua himpunan, suatu himpunan *vertex* $V \subset \mathcal{R}^n$ dan suatu himpunan *edge* $E \subset \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n$dengan tidak lebih dari dua sisi diantara dua titik (Koshy, 2009)



Gambar 3. contoh *lattice*

Lattice path adalah route cara perjalanan dari titik awal $(0,0)$ ke titik (n, n) dengan syarat hanya boleh berjalan ke atas dan ke kekanan saja.

2.5. Bilangan Catalan

Bilangan Catalan merupakan urutan bilangan bulat positif yang didapat dengan menghitung stuktur kombinasi dari suatu barisan untuk menyelesaikan persoalan pada persamaan bilangan secara ekuivalen yang terdiri atas urutan-urutan secara rekursif. Bilangan Catalan dapat dituliskan dalam bentuk $C_n = \frac{1}{n+1} C(2n, n)$ dimana untuk $n \geq 0$, atau dapat ditulis dalam barisan yaitu : $C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-1}$, untuk $n \geq 0$. Beberapa suku pertama dalam barisan Catalan yaitu $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, \ldots$ (Zaky, 2013).

Definisi 2.5.1

Bilangan Catalan $C_n$untuk $n \geq 0$, yaitu

$$C_n = \frac{1}{n+1} C(2n, n)$$

Nilai-nilai dari C_n untuk $n \geq 0$ diberikan pada tabel berikut

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1.430	4.862	16.796

Tabel 4.3.1. sebelas pertama bilangan Catalan.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Waktu dan tempat penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada semester genap tahun ajaran 2016/2017.

3.2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penyelesaian tugas akhir ini adalah memperkenalkan bilangan catalan melalui *Lattice path*, struktur kombinatorial dan relasi rekurensi.

Langkah-langkah yang dilaksanakan yaitu :

1. Mengkaji bilangan catalan untuk mendapatkan bentuk dan sifat-sifat dari bilangan ini dengan *lattice path*
2. Mengkaji solusi persamaan rekursif bilangan catalan dengan menggunakan kombinatorial.

V. SIMPULAN

Dari hasil pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa :

1. *Path* memiliki kesesuaian nilai dengan bilangan Catalan, begitu juga *balanced paranthesis* memiliki kesesuaian nilai dengan bilangan Catalan. Sehingga $T_n = P_n = C_n$.
2. Solusi dari persamaan rekursif bilangan Catalan adalah

   $$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$$

3. Fungsi pembangkit dalam mencari rumus bilangan Catalan diperoleh

   $$C_i = \frac{1}{i-1}\binom{2i}{i}$$

DAFTAR PUSTAKA

Deo, Narsingh. 1989. *Graph Theory With Aplications to Enginering and Computer Science.* New Delhi: Prentice Hall.

Koshy, Thomas. 2009. *Catalan Numbers with Applications*. Oxford: Oxford University Press.

K. H. Rosen. 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications 7th*. New York: McGraw-Hill.

R. Jhonsonbaugh. 1997. *Discreate Mathematics 4 th*. Prentice Hall.

Teddy, Arianto. 2008. Bilangan Spacetime. Skripsi. Jurusan Matematika. Universitas Lampung. Bandar Lampung.

Zaky, Ahmad. 2012. *Persamaan Rekursif Bilangan Catalan* . Institut Teknologi Bandung.Bandung. 43 hlm.