PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TAK TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE MAKSIMAL EMPAT

(Tesis)

Oleh

RENI PERMATA SARI

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2016

PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TAK TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE MAKSIMAL EMPAT

Oleh

Reni Permata Sari

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
MAGISTER SAINS

Pada

Jurusan Matematika Program Studi Magister Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2016

ABSTRAK

PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TAK TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE MAKSIMAL EMPAT

Oleh

RENI PERMATA SARI

Graf G disebut graf terhubung jika untuk setiap dua titik yang berbeda di G, terdapat suatu *path* yang menghubungkan dua titik tersebut, jika tidak maka disebut graf tidak terhubung. Suatu graf dapat diberi label pada titik atau garisnya. Jika hanya titik yang diberi label disebut pelabelan titik, jika hanya garis disebut pelabelan garis, dan jika titik dan garis yang diberi label maka disebut pelabelan total. Suatu garis pada graf yang memiliki titik awal dan titik akhir sama disebut *loop*, sedangkan dua garis disebut garis paralel jika dua garis tersebut menghubungkan dua titik yang sama. Jika diberikan n titik dan m garis, banyak graf yang dapat dibentuk, baik terhubung atau tidak terhubung, sederhana ataupun tidak. Pada penelitian ini diperoleh rumus untuk menghitung banyaknya graf tak terhubung berlabel titik dengan *loop* atau garis paralel untuk n = 3, 4, dan m ≥ 1 sebagai berikut:

a. untuk n = 3, $\mathrm{N}(G_{3,m}) = (m+1)\binom{m+2}{2}$
b. untuk n = 4, $\mathrm{N}(G_{4,m,g_i}) = \binom{m+3}{3} + \frac{3}{2}m\binom{m+3}{3} + 15\binom{m+3}{5} + 4\binom{m+3}{6}$

Kata Kunci : graf tak terhubung, pelabelan titik, *loop*, sisi paralel.

ABSTRACT

COUNTING THE NUMBER OF DISCONNECTED VERTEX LABELLED GRAPHS WITH MAXIMAL FOUR ORDER

By

RENI PERMATA SARI

A graph G is called to be connected if for every pair of vertices in G there exists a path connecting them, otherwise, G is disconnected. A graph can be labeled. If only the vertices are labeled then it is called as vertex labelling, if only edges are labeled then it is called as edge labeling, and if both vertices and edges are labeled, it is called as total labeling. The edge that has the same starting and end point is called a loop, and two edges that connect the same vertices are called parallel edges. Given n vertices and m edges there are a lot of possible graphs can be constructed either connected or not, simple or not. In this research we discuss about counting the number of disconnected graph if given n = 3, 4 and m ≥ 1. The result is :

a. for n = 3, the formula is $N(G_{3,m}) = (m+1)\binom{m+2}{2}$
b. for n = 4, the formula is $N(G_{4,m,g_i}) = \binom{m+3}{3} + \frac{3}{2}m\binom{m+3}{3} + 15\binom{m+3}{5} + 4\binom{m+3}{6}$

Key words : disconnected graph, vertex labelling, loop, parallel edges.

Judul Tesis : **PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TAK TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE MAKSIMAL EMPAT**

Nama Mahasiswa : *Reni Permata Sari*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1427031003

Jurusan / Program Studi : Matematika / Magister Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.	**Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**
NIP 19631108 198902 2 001	NIP 19760411 200012 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**	....
Sekretaris	: **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

3. Direktur Program Pascasarjana

Prof. Dr. Sudjarwo, M.S.
NIP 19530528 198103 1 002

Tanggal Lulus Ujian Tesis : **20 Juli 2016**

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan dengan sebenarnya bahwa:

1. tesis yang berjudul Penentuan Banyaknya Graf Tak Terhubung Berlabel Titik Berorde Maksimal Empat adalah karya saya sendiri dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan atas karya penulis lain dengan cara yang tidak sesuai dengan tata etika ilmiah yang berlaku dalam masyarakat akademik atau yang disebut plagiarisme,
2. hak intelektual atas karya ilmiah ini diserahkan sepenuhnya kepada Universitas Lampung.

Atas pernyataan ini, apabila dikemudian hari ternyata ditemukan adanya ketidakbenaran, saya bersedia menanggung akibat dan sanksi yang diberikan kepada saya, saya bersedia dan sanggup dituntut sesuai dengan hukum yang berlaku.

Bandar Lampung, 20 Juli 2016

Pembuat Pernyataan

METERAI TEMPEL

9D351ADF652722584

6000

ENAM RIBU RUPIAH

Reni Permata Sari

NPM. 1427031003

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Ganjar Agung pada 02 Maret 1992, anak pertama dari dua bersaudara pasangan Bapak Hermanto dan Ibu Jemanis. Penulis menempuh pendidikan Taman Kanak-Kanak di TK LKMD 2 Trimurjo pada tahun 1997, dilanjutkan ke pendidikan dasar di SD N 2 Trimurjo pada tahun 1998. Setelah lulus pada jenjang tersebut pada tahun 2004, penulis melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMPN 3 Metro. Penulis menyelesaikan pendidikan menengah akhir di SMAN 1 Trimurjo pada tahun 2010 dan pada tahun yang sama diterima di Universitas Lampung Jurusan Matematika FMIPA dengan jalur SNMPTN, dan penulis telah menyelesaikan studi S1 tahun 2014. Pada tahun tersebut, penulis terdaftar sebagai mahasiswa Pascasarjana Program Studi Magister Matematika, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.

Moto

Sebelum berusaha janganlah menyerah

Dengan usaha dan do'alah yang akan membantu kita dalam

berbagai kesulitan

Tidak ada kata terlambat jika ingin mencoba.

(Reni Permata Sari)

PERSEMBAHAN

Kupersembahkan karya sederhana ini untuk :

Mama

Papa dan adik

Saiful Afriyanto

Sebagai Ungkapan Rasa Terimakasih dan Bakti Atas Segala Do'a

dan Kasih Sayang Serta Pengorbanan Dari KeberhasilanKu ini

SANWACANA

Alhamdulillah dengan rasa syukur kehadirat Allah SWT atas berkat rahmat dan karunia-Nya dalam menyelesaikan tesis ini. Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar magister sains pada program studi Magister Matematika, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.

Selesainya penulisan tesis ini, adalah juga berkat motivasi dan pengarahan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada :

1. Ibu Dra. Wamiliana, M.A, Ph.D selaku pembimbing pertama yang selalu sabar dalam membimbing dan mengarahkan penelitian tesis ini.
2. Ibu Asmiati, S.Si., M.Si. selaku pembimbing kedua yang memberi semangat dan motivasi dalam menyelesaikan tesis ini.
3. Bapak Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D. selaku pembahas dan Ketua Program Studi yang telah membimbing dan memberikan arahan dalam menyelesaikan tesis ini.
4. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si selaku pembimbing akademik yang selalu member saran dan dukungan selama masa perkuliahan.

5. Bapak Tiryono Ruby, Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D. selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Bapak Hermanto dan Ibu Jemanis selaku orang tua yang telah banyak memberikan dukungan dan motivasi dalam menyelesaikan tesis ini.
8. Adikku tersayang (Ageng) dan keluarga besar yang dapat disebutkan satu persatu yang telah banyak memberikan motivasi kepada penulis.
9. Saiful Afriyanto yang telah memberikan motivasi dan dukungannya dalam proses menyelesaikan tesis ini.
10. Teman-teman seperjuangan Pak Heri dan Pak Devri yang telah memberikan kesan dan pengalaman berharga selama kuliah.
11. Pak Yoko yang selalu memberikan semangat dan dukungan selama menyelesaikan tesis ini.
12. Almamaterku tercinta Universitas Lampung.

Penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk kesempurnaan tesis ini. Akhirnya penulis mengucapkan terimakasih, semoga tesis ini dapat memberikan manfaat bagi kita semua.

Bandar Lampung, 20 Juli 2016

Penulis

Reni Permata Sari

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

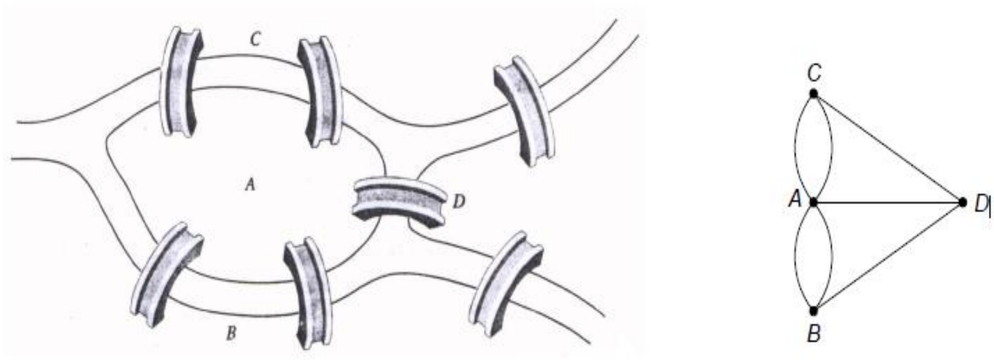
Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang. Dengan menggunakan teori graf dapat mempermudah dalam menyelesaikan suatu masalah. Salah satu contoh permasalahan yang dapat diselesaikan dengan teori graf yaitu permasalahan desain jaringan.

Pada tahun 1736 teori graf diperkenalkan oleh Leonhard Euler sewaktu menyelesaikan masalah Jembatan Konigsberg. Terdapat tujuh jembatan di atas sungai Pregel di kota Konigsberg. Masalah Jembatan Konigsberg adalah mungkinkah seseorang mulai dari satu daratan, melintasi tepat satu kali setiap jembatan yang menghubungkan empat daratan yang dihubungkan oleh tujuh jembatan tersebut dan kembali ke tempat semula. Masalah jembatan Konigsberg ini dipresentasikan dalam bentuk gambar yang kemudian dikenal sebagai representasi graf, dengan titik menyatakan suatu daerah dan garis menyatakan jembatan yang menghubungkan dua daerah. Euler membuktikan bahwa tidak mungkin melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali kegaris semula. Karena jumlah jembatan yang menghubungkan ganjil, maka tidak mungkin dapat melintasi tepat satu kali setiap jembatan yang menghubungkan ke empat daratan dan kembali ke tempat semula. Agar dapat melalui setiap jembatan tepat sekali diperlukan jumlah jembatan yang menghubungkan setiap daratan berjumlah genap. Ilustrasi dalam permasalahan tersebut dan bentuk representasinya dapat dilihat pada Gambar 1.



(a) (b)

Gambar 1. (a) Jembatan Konigsberg dan (b) graf yang mempresentasikan jembatan Konigsberg.

Suatu graf G = G (V,E) didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E), dengan V adalah himpunan titik yang tak kosong dan E adalah himpunan pasangan tak terurut (mungkin kosong) dari titik-titik yang disebut garis. Banyaknya titik pada G dinotasikan dengan $|V|$ dan banyaknya garis dinotasikan dengan $|E|$.

Suatu graf dapat diberi label pada titik atau garisnya. Jika hanya titik yang diberi label disebut pelabelan titik, jika hanya garis disebut pelabelan garis dan jika titik dan garis yang diberi label disebut pelabelan total. Label pada tiap titik dapat berbeda-beda bergantung pada masalah yang dimodelkan.

Graf G disebut graf terhubung jika untuk setiap dua titik yang berbeda di G, terdapat suatu *path* (lintasan) yang menghubungkan dua titik tersebut, jika tidak terdapat *path* (lintasan) yang menghubungkan dua titik tersebut maka disebut graf tidak terhubung. *Loop* merupakan suatu garis pada graf yang memiliki titik awal dan titik akhir sama, sedangkan dua garis disebut garis paralel jika dua garis tersebut menghubungkan dua titik yang sama.

Suatu graf yang tidak memuat *loop* atau garis paralel disebut graf sederhana. Jika diberikan n titik m garis maka banyak graf yang dapat terbentuk, baik sederhana ataupun tidak, maupun terhubung atau tidak.

Enumerasi graf pertama kali dilakukan oleh Cayley (1874) sewaktu menemukan formula untuk menghitung isomer hidrokarbon. Pada tahun 2007, Bodirsky mengenalkan langkah-langkah mengenumerasi graf planar tidak berlabel.

Untuk menghitung graf berlabel, pada tahun 2014 Rohandi menginvestigasi graf-graf tak terhubung berlabel titik tanpa *loop* dengan banyak titik adalah 3 dan 4, dan mendapatkan formula untuk $n = 3$ dan $n = 4$ dengan $1 \leq m \leq 10$. Pada tahun 2015, Winarni menginvestigasi banyaknya graf tak terhubung berlabel titik tanpa garis paralel. Berdasarkan hasil yang didapat oleh Rohandi (2014) dan Winarni (2015) penulis tertarik untuk meneliti banyaknya graf tak terhubung berlabel titik dengan *loop* atau garis paralel untuk $n = 3$ dan 4 dengan $m \geq 1$.

1.2 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini pembahasan dibatasi hanya untuk graf tak terhubung berlabel titik dengan *loop* atau garis paralel jika n = 3 dan 4 dengan m $\geq$ 1, n adalah banyaknya titik pada graf yang dinotasikan $|V(G)| = n$, sedangkan m adalah banyaknya garis pada graf yang dinotasikan $|E(G)| = m$.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah menentukan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik dengan *loop* atau garis paralel jika n = 3 dan 4 dengan m $\geq$ 1, yaitu:

1. Mengetahui banyaknya graf yang dapat terbentuk menggunakan n = 3 dan 4 dengan m $\geq$ 1.
2. Mengetahui pola yang terbentuk untuk menentukan bentuk umum graf menggunakan n = 3 dan 4 dengan m $\geq$ 1.
3. Memberikan konjektur (dugaan) rumus jumlah graf terbentuk untuk n = 3 dan 4 dengan m $\geq$ 1.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah:

1. Menambah wawasan tentang teori graf terutama tentang graf tak terhubung dengan *loop* atau garis paralel.
2. Sebagai referensi bagi pembaca untuk penelitian selanjutnya dan dapat memberikan motivasi dalam mempelajari ilmu matematika dibidang graf.

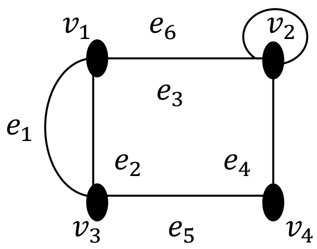
II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa istilah, definisi serta konsep-konsep yang mendukung dalam penelitian ini.

2.1 Konsep Dasar Graf

Berikut ini akan diberikan konsep dasar teori graf yang bersumber dari Deo (1989) :

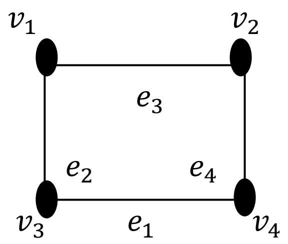
Graf adalah himpunan terurut (V(G), E(G)), dengan V(G) menyatakan himpunan titik dari G dengan V(G) $\neq \emptyset$, dan E(G) menyatakan himpunan garis yaitu pasangan tak terurut dari V(G). Banyaknya himpunan titik V(G) disebut orde dari graf G. Banyaknya titik pada graf G dinyatakan sebagai $|V(G)| = n$, dan banyaknya garis pada graf G dinyatakan sebagai $|E(G)| = m$.



Gambar 2. Contoh graf G dengan 4 titik dan 6 garis.

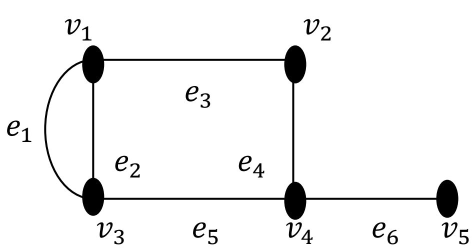
Pada suatu graf, dua titik disebut bertetangga *(adjacent)* jika terdapat satu atau lebih garis yang mengaitkan keduanya. Dua garis disebut bertetangga jika kedua garis tersebut menempel pada titik yang sama. Himpunan titik yang bertetangga dengan titik v disebut tetangga *(neighbor)* dari v, dinyatakan sebagai N(v). Jika suatu titik v merupaka titik akhir atau ujung dari garis e, maka titik v dikatakan menempel (*incident)* pada garis e. Untuk contoh dari Gambar 2 dapat dilihat bahwa garis e_6 menempel pada titik v_2 serta untuk titik v_4 bertetangga dengan v_2 dan v_3.

Graf sederhana merupakan graf yang tidak memuat *loop* ataupun garis paralel.



Gambar 3. Contoh graf sederhana dengan titik 4 dan garis 4.

Walk merupakan barisan berhingga dari titik dan garis yang dimulai dan diakhiri dengan titik, sedemikian sehingga setiap garis yang menempel pada titik sebelum dan sesudahnya. *Walk* yang berawal dan berakhir dititik yang sama disebut *walk* tertutup. Sedangkan jika *walk* yang berawal dan berakhir dititik berbeda disebut *walk* terbuka.

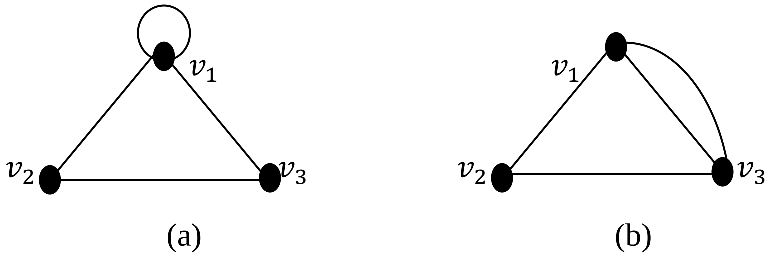


Gambar 4. Contoh graf yang memiliki *walk* tertutup dan terbuka

Salah satu contoh *walk* tertutup pada Gambar 4 yaitu $v_1, e_3, v_2, e_4, v_4, e_5, v_3, e_2, v_1$, dan salah satu contoh *walk* terbuka yaitu $v_1, e_3, v_2, e_4, v_4, e_6, v_5$.

Path merupakan *walk* yang semua titiknya berbeda. Salah satu contoh *path* yang dapat dibentuk dari Gambar 4 yaitu: v_1, v_2, v_4, v_5. *Path* tertutup disebut sirkuit.

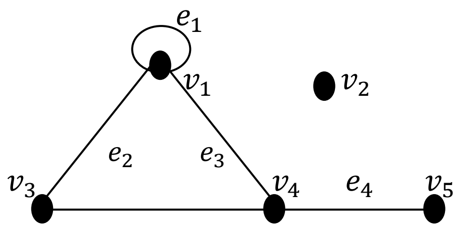
Loop merupakan suatu garis yang memiliki titik ujung yang sama. Sedangkan garis paralel adalah dua garis atau lebih yang menghubungkan dua titik yang sama.



Gambar 5. (a) Contoh graf dengan *loop* dan (b) contoh graf dengan garis paralel

Derajat (*degree*) dari suatu titik *v* pada graf G dinotasikan *deg*(*v*), adalah banyaknya garis yang menempel pada titik *v* dengan *loop* terhitung dua. Untuk contoh dapat dilihat pada Gambar 5 (a) bahwa *deg*(v_1) = 4, *deg*(v_2) = 2, dan *deg*(v_3) = 2.

Titik terasing merupakan titik yang memiliki derajat nol, sedangkan titik *pendant* (daun) adalah titik yang memiliki derajat satu.



Gambar 6. Contoh graf dengan 1 titik terasing dan 1 titik *pendant*

Pada Gambar 6 titik v_2 merupakan titik terasing yang berderajat nol dan titik v_5 merupakan titik *pendant* yang berderajat satu.

Berikut ini adalah lemma yang menyatakan kaitan antara jumlah derajat semua titik pada suatu graf G dengan banyak garisnya.

Lemma 1. Misalkan G(V,E) adalah graf terhubung dengan $|E| = e$, maka :

$$\sum_{i=1}^{n} deg(v_i) = 2e$$

Bukti : Dalam sebarang graf, masing-masing garis menghubungkan dua titik, sehingga setiap garis menyumbangkan tepat dua untuk jumlah derajat titik. Jadi jumlah derajat pada titik sama dengan dua kali jumlah garis.

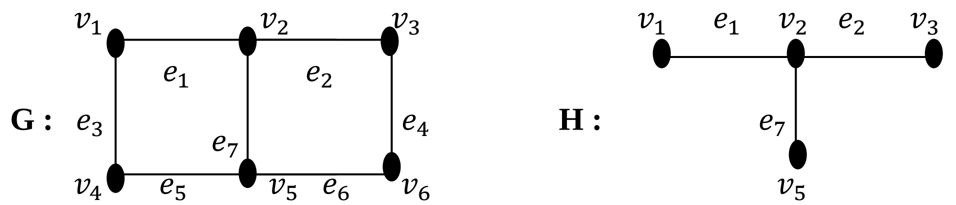
Lemma 2. Untuk sembarang graf G, banyaknya titik yang berderajat ganjil, selalu genap.

Bukti : MisalkanV_{genap} dan V_{ganjil} masing-masing adalah himpunan-himpunan titik yang berderajat genap dan berderajat ganjil pada G(V,E). Maka persamaan dapat ditulis sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{V_{genap}} d(v_j) + \sum_{V_{ganjil}} d(v_k)$$

Karena $d(v_j)$ untuk setiap v_j Є V_{genap}, maka suku pertama dari ruas kanan persamaan harus bernilai genap. Ruas kiri persamaan juga harus bernilai genap. Nilai genap pada ruas kiri hanya benar bila suku kedua dari ruas kanan juga harus genap. Karena $d(v_k)$ untuk setiap v_k Є V_{ganjil}, maka banyaknya titik v_k didalam V_{ganjil} harus genap agar jumlah seluruh derajatnya bernilai genap. Jadi banyaknya titik yang berderajat ganjil selalu genap. ∎

Suatu subgraf H disebut subgraf dari G, ditulis H ⊆ G, jika V(H) ⊆ V(G) dan E(H) ⊆ E(G).

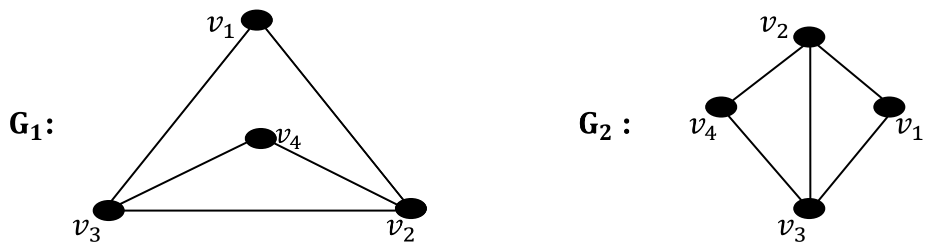


Gambar 7. Contoh subgraf H dari graf G

Suatu subgraf H dari graf G dikatakan *spanning* subgraf, jika V(H) = V(G) dan E(H) ⊂ E(G). Subgraf terhubung maksimal dari graf G disebut komponen dari graf G.

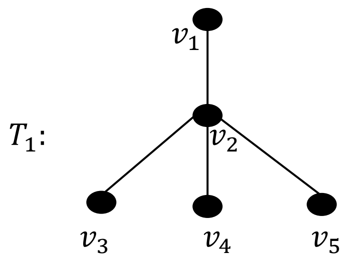
Gambar 8. Contoh *spanning* subgraf H dari G

Dua graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfis, jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik di G_1 dengan titik-titik di G_2, serta antara garis - garis di G_1 dengan garis - garis di G_2, sedemikian sehingga hubungan ketetanggaan tetap terjaga.



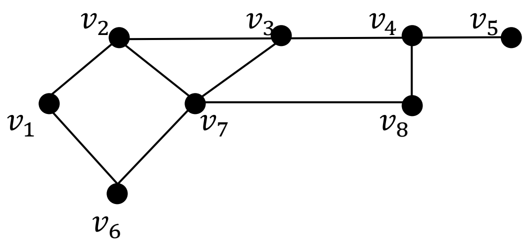
Gambar 9. Contoh isomorfis graf G_1 dan G_2

Suatu graf T disebut *tree* atau pohon jika graf T merupakan graf terhubung yang tidak memiliki *cycle* atau sirkuit. Suatu graf T disebut *spanning tree* dari suatu graf G jika graf T adalah *tree* dan memuat semua titik dari graf G atau dengan kata lain graf T adalah *spanning* subgraf dari graf G yang tidak memuat *cycle* atau sirkuit. Gabungan dari *tree* disebut dengan *forest* (hutan).

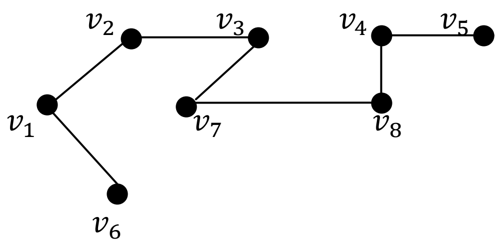


Gambar 10. Contoh *tree*

Pada Gambar 10, titik $v_{1,}v_{3,}$ $v_{4,}$ v_5 disebut *pendant vertex* (daun).



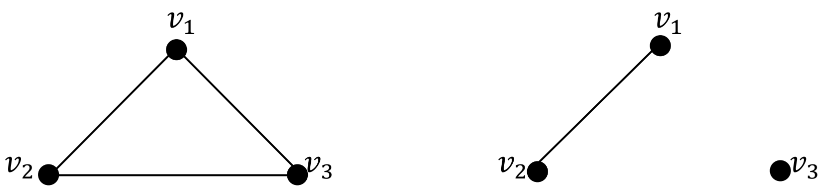
(a)



(b)

Gambar 11. Graf (b) merupakan salah satu contoh *spaning tree* dari graf (a)

Graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik yang berbeda di G ada *path* yang menghubungkan titik tersebut. Jika tidak ada *path* yang menghubungkan maka G dikatakan tidak terhubung.



(a) (b)

Gambar 12. (a) Contoh graf terhubung dan (b) contoh graf tak terhubung

2.2 Konsep Dasar Teknik Pencacahan

Istilah pada konsep pencacahan ini diambil dari Rosen (2012).

Dalam proses pencacahan terdapat dua kaidah yang digunakan yaitu kaidah penjumlahan dan kaidah perkalian. Pada kaidah penjumlahan, jika percobaan 1 mempunyai m_1 hasil percobaan yang mungkin terjadi dan percobaan 2 mempunyai m_2 hasil percobaan yang mungkin maka jika hanya salah satu dari dua percobaan itu saja yang dilakukan, maka terdapat $m_1 + m_2$ hasil jawabannya.

Pada kaidah perkalian, jika terdapat n_1 cara untuk mengerjakan suatu pekerjaan pertama dan n_2 cara untuk mengerjakan suatu pekerjaan kedua setelah pekerjaan pertama selesai, maka ada $n_1 \text{ x } n_2$ cara untuk mengerjaan suatu pekerjaan tersebut.

Nilai n! (dibaca "*n factorial*" didefinisikan sebagai hasil kali semua bilangan bulat positif antara 1 sampai n, dengan n ∈ N.

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots..3.2.1$$

Teorema 1

0! = 1 dan 1! = 1

Bukti :

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots..3.2.1$$

$$n! = n(n-1)!$$

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}$$

Untuk n = 1

$$(1-1)! = \frac{1!}{1}$$

$$0! = \frac{1}{1}$$

$$0! = 1 \qquad \blacksquare$$

Untuk n = 2

$(2\text{-}1)! = \frac{2!}{2}$

$1! = \frac{2}{2}$

$1! = 1$ ■

Permutasi merupakan susunan dari urutan berbeda yang dibentuk oleh sebagian atau keseluruhan objek yang diambil dari kelompok objek yang tersedia. Perulangan tidak diperbolehkan ketika menggunakan teknik permutasi, karena objek yang sudah dipilih tidak diperbolehkan dipilih kembali.

Teorema 2

Banyaknya permutasi n objek yang diambil sebanyak r objek adalah

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Bukti :

$n! = n(n\text{-}1)(n\text{-}2)(n\text{-}3)\ldots.(n\text{-}r\text{+}1)$

$= n(n\text{-}1)(n\text{-}2)(n\text{-}3)\ldots.(n\text{-}r\text{+}1) \text{ x } \frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\ldots3.2.1}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\ldots3.2.1}$

$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.(n-r+1)(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\ldots3.2.1}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\ldots3.2.1}$

$= \frac{n!}{(n-r)!}$ ■

Suatu kombinasi r dari himpunan n objek adalah pemilihan secara acak tanpa memperhitungkan urutan sebanyak r objek yang diambil dari n objek. Misalkan untuk semua n dan r adalah bilangan bulat, dengan $0 \leq r \leq n$.

Teorema 3

Banyaknya kombinasi r objek dari n objek adalah:

$$\mathrm{C}(\mathrm{n},\mathrm{r}) = \frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{r}!\,(\mathrm{n}-\mathrm{r})!}$$

Bukti :

$\mathrm{P}(\mathrm{n},\mathrm{r}) = \mathrm{C}(\mathrm{n},\mathrm{r})$ x r!

$\mathrm{C}(\mathrm{n},\mathrm{r}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{n},\mathrm{r})}{\mathrm{r}!}$

$\mathrm{C}(\mathrm{n},\mathrm{r}) = \frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{r}!(\mathrm{n}-\mathrm{r})!}$ ■

2.3 Barisan Aritmetika Orde Tinggi

Barisan aritmetika tingkat ke-p adalah sebuah barisan yang memiliki selisih yang sama tiap suku berurutannya setelah p tingkatan (Imail, 2012). Rumus umum suku ke-p pada barisan aritmetika adalah

$$U_n = \frac{m_0}{0!} + \frac{(n-1)m_1}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)m_2}{2!} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)m_p}{p!}$$

dengan:

U_n= suku ke-n

m_0 = suku awal pada barisan semula

m_1 = suku awal pada barisan tingkat pertama yang dibentuk

m_2 = suku awal pada barisan tingkat kedua yang dibentuk

m_p = suku awal pada barisan tingkat ke-p yang dibentuk

2.4 Penelitian yang telah dilakukan

Adapun penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, antara lain:

1. Agnarsson dan Raymon (2007).

   Diberikan m,n dengan $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$, m,n Є N, maka banyaknya graf sederhana g_n dengan n titik adalah:

   $$g_n = 2^{\binom{n}{2}}$$

   Sedangkan banyaknya graf $g_n(m)$ dengan n titik dan m sisi adalah:

   $$g_n(m) = \binom{\binom{n}{2}}{m}$$

2. Rohandi (2014)

   Diberikan n titik, m sisi tanpa *loop* dan r garis maksimal yang membuat graf tidak terhubung tanpa adanya garis rangkap yang terbentuk dengan n,m Є N. Untuk n = 3, m ≥ 1 dan r = 1,2 rumus yang diperoleh yaitu

   $$G_{3,m,r} = 3$$

   Untuk n = 4, m ≥ 1 dan r = 1,2, 3 rumus yang diperoleh yaitu

   - m ≤ n

     $$\sum_{r=1}^{m} G_{4,m,r} = 6 + \sum_{r=1}^{m-1} \binom{m-1}{m-r+1} \binom{\binom{4}{r+1}}{r+1}$$

   - m ≥ n

     $$\sum_{r=1}^{n-1} G_{4,m,r} = 6 + \sum_{r=1}^{n-1} \binom{m-1}{m-r+1} \binom{\binom{4}{r+1}}{r+1}$$

3. Winarni (2015)

Diberikan n titik, m sisi tanpa sisi paralel dengan n,m $\in$ N. Untuk n = 3 dan m $\geq$ 1 rumus yang diperoleh yaitu $\binom{2m+2}{2}$, dan untuk n = 4 m $\geq$ 1 rumus yang diperoleh yaitu $\binom{3m+1}{3} - \binom{m+1}{3} + \binom{2m+2}{2}$.

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di Program Studi Magister Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada semester ganjil tahun ajaran 2015/2016.

3.2 Metode Penelitian

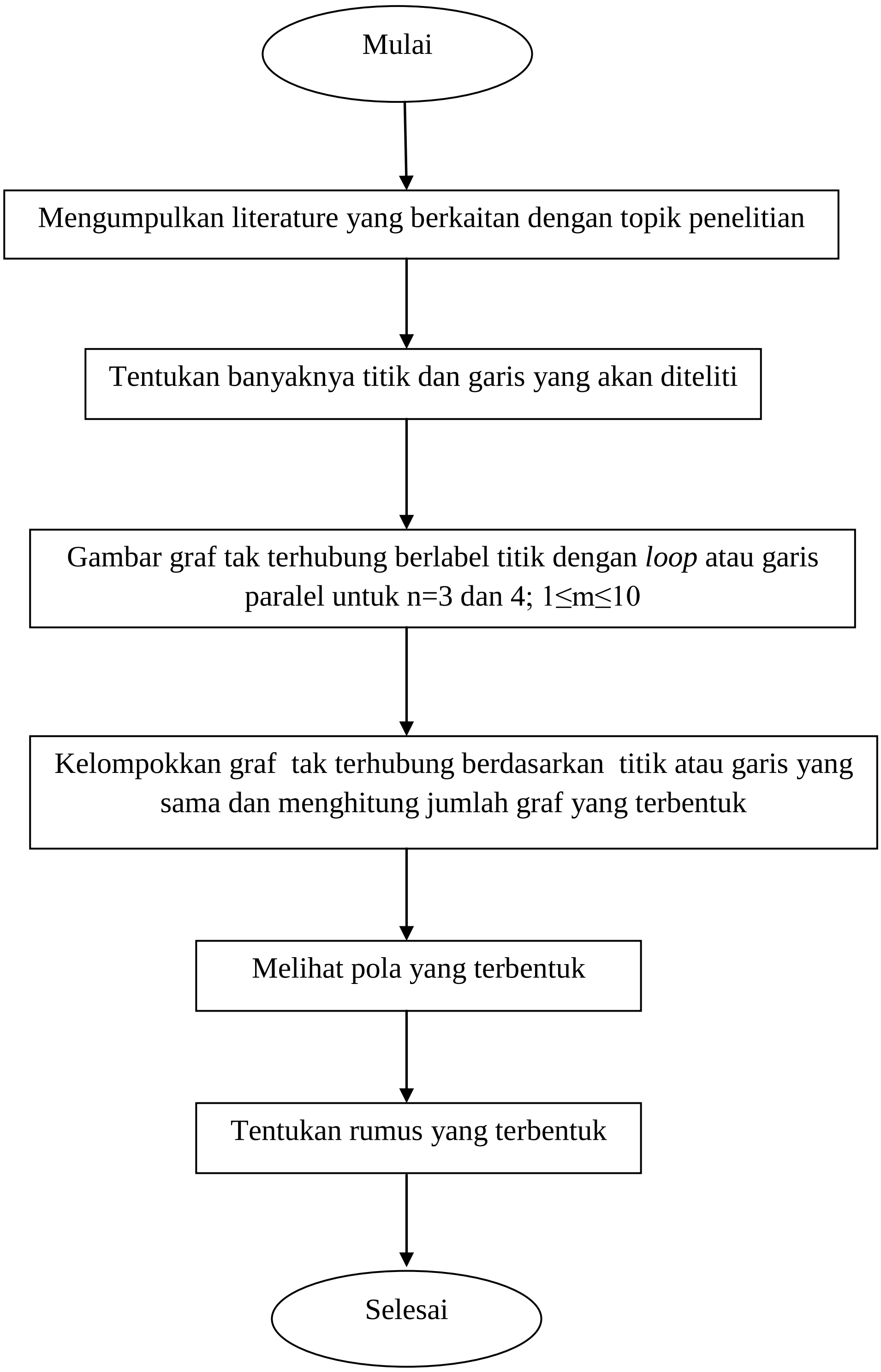
Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah :

1. Mengumpulkan bahan *literature* serta studi kepustakaan yang berhubungan dengan graf.
2. Menentukan banyaknya titik dan garis dari graf yang akan dicari.
3. Menggambarkan graf tak terhubung berlabel titik dengan *loop* atau garis paralel untuk $n = 3$ dan 4 dengan $1 \leq m \leq 10$.
4. Mengelompokkan graf tak terhubung berdasarkan n titik dan m garis yang sama.
5. Menghitung jumlah graf tak terhubung berdasarkan n titik dan m garis yang sama.
6. Melihat pola yang terbentuk pada n titik dan m garis yang sama.

7. Menentukan rumus umum untuk menghitung jumlah graf tak terhubung berlabel titik dengan *loop* atau garis paralel pada $n = 3$ dan 4 dengan $1 \leq m \leq 10$.

Langkah-langkah tersebut dapat dinyatakan dalam diagram alir sebagai berikut:

Penyajian dalam bentuk diagram alir



Gambar 13. Diagram Alir Langkah-Langkah Penelitian

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil kontruksi dan observasi terhadap penentuan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik menggunakan garis paralel atau *loop,* maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Untuk n = 3 dan m ≥ 1, diperoleh rumus umum yaitu:

   $$N(G_{3,m}) = (m+1)\binom{m+2}{2}$$

   dengan n = banyaknya titik pada graf

   m = banyaknya garis pada graf

2. Untuk n = 4 , 1 ≤ m ≤ 10, dan 0 ≤ g_i ≤ 3, i = 0,1,2,3 diperoleh rumus umum yaitu:

   a. Untuk n = 4, 1 ≤ m ≤ 10, dan g_0 diperoleh rumus umum sebagai berikut:

   $$N(G_{4,m,g_0}) = \binom{m+3}{3}$$

b. Untuk n = 4, $1 \leq m \leq 10$, dan g_1 diperoleh rumus umum sebagai berikut:

$$N(G_{4,m,g_1}) = \frac{3}{2} m \binom{m+3}{3}$$

c. Untuk n = 4, $1 \leq m \leq 10$, dan g_2 diperoleh rumus umum sebagai berikut:

$$N(G_{4,m,g_2}) = 15 \binom{m+3}{5}$$

d. Untuk n = 4, $1 \leq m \leq 10$, dan g_2 diperoleh rumus umum sebagai berikut:

$$N(G_{4,m,g_3}) = 4 \binom{m+3}{6}$$

Jadi, untuk n = 4 , $1 \leq m \leq 10$, dan $0 \leq g_i \leq 3$, i = 0,1,2,3, rumus umum untuk menentukan banyaknya graf adalah:

$$N(G_{4,m,g_i}) = N(G_{4,m,g_0}) + N(G_{4,m,g_1}) + N(G_{4,m,g_2}) + N(G_{4,m,g_3})$$

$$N(G_{4,m,g_i}) = \binom{m+3}{3} + \frac{3}{2} m \binom{m+3}{3} + 15 \binom{m+3}{5} + 4 \binom{m+3}{6}$$

dengan:

n = banyaknya titik

m = banyaknya garis

g_i = banyaknya garis bukan *loop* pada G dengan garis paralel dihitung satu

i = 0,1,2,3

G_{n,m,g_i} = Graf tak terhubung berlabel dengan garis paralel atau *loop*,dengan n titik, m garis dan g_i banyaknya garis bukan *loop* pada G dengan garis paralel dihitung satu

$N(G_{n,m,g_i})$ = Jumlah G_{n,m,g_i}

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan untuk menentukan rumus umum banyaknya graf tak terhubung berlabel dengan garis paralel atau *loop* untuk n = 5, 6, 7,… dan m≥1.

DAFTAR PUSTAKA

Agnarsson, G and Raymon, D. G. 2007. *Graph Theory Modeling Aplications and Algorithms. Pearson/Prentice Education Inc*, New Jersey.

Bodirsky, Manuel. 2007. 10 Steps to Counting Unlabeled Planar Graphs: 20 Years Later. http://algo.inria.fr/seminars/sem07-08/bodirsky-slides.pdf. Diakses Tanggal 25 Juli 2016 pukul 16.00.

Cayley, A. 1874. On the Mathematical Theory of Isomers. *Philosophical Magazine*, Vol 47, pp. 444-446.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. *Prentice Hall Inc*, New York.

Imail, S. 2012. *Suku Ke-n Barisan Aritmetika*. http://www.repository.ung.ac.id/get/ karyailmiah.pdf. Diakses Tanggal 21 Juli 2016, pukul 10.20.

Rohandi. 2014. *Penentuan Banyaknya Graf Tak Terhubung Tanpa Loop*. Skripsi. Bandar Lampung: Universitas Lampung.

Winarni, Yunita. Dwi. 2015. Penentuan Banyaknya Graf Tak terhubung Berlabel Tanpa Garis Paralel. Skripsi. Bandar Lampung: Universitas Lampung.