INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN l^1

(Skripsi)

Oleh
PURNOMO AJI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2016

ABSTRAK

INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN l^1

Oleh

PURNOMO AJI

Telah dilakukan penelitian untuk mengetahui apakah definisi Integral Riemann pada barisan l^1 masih berlaku atau tidak jika suatu fungsi f di R tersebut dirubah menjadi bernilai barisan l^1. Penelitian diawali dengan menstransformasikan fungsi nilai mutlak $|.|$ di R menjadi fungsi norma $\|.\|$ di l^1. Berdasarkan definisi dan teorema-teorema integral Riemann yang ada pada $\mathbb{R}$, akan dibuktikan bahwa definisi dan teorema-teorema integral Riemann yang ada pada $\mathbb{R}$ masih berlaku jika fungsinya menjadi fungsi yang terdefinisi di barisan l^1 dengan mencari dan membuktikan teorema-teorema yang mendukung bahwa fungsi barisan l^1 memenuhi syarat bahwa fungsi tersebut terintegral Riemann.

Kata kunci: Integral Riemann, barisan l^1, norma.

ABSTRACT

INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN l^1

By

PURNOMO AJI

Research was conducted to determine whether the definition ofthe Riemann Integral row l^1 is still valid or if a function f on R is converted into value-row l^1. The study begins with an absolute value function can transform $|.|$ in R be a function ofthe norm $\|.\|$ in l^1. Based on the definitions and theorems of Riemann integral exist in $\mathbb{R}$, will be proven that the definitions and theorems of Riemann integral exist in $\mathbb{R}$ valid if the function becomes a function defined in the row l^1 by finding and proving theorems to support that row function l^1 qualify that the function Riemann integral.

Key words: Integral Riemann, row l^1, the norm.

INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN l^1

Oleh
PURNOMO AJI

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2016

Judul Skripsi	: **INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN l^1**
Nama Mahasiswa	: *Purnomo Aji*
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1217031052
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

DR. Muslim Ansori, M.Si.	**Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.**
NIP 19720227 199802 1 001	NIP 19620513 198603 1 003

2. Ketua Jurusan Matematika

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **DR. Muslim Ansori, M.Si.** ....

Sekretaris : **Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **25 Juli 2016**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"Integral Riemann Bernilai Barisan l^1"** merupakan hasil karya sendiri dan bukan merupakan karya orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 25 Juli 2016

Penulis

Purnomo Aji

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di desa Papanrejo, kecamatan Abung Timur, Kabupaten Lampug Utara, Privinsi Lampung. Penulis adalah anak ketiga dari pasangan Bapak Satiran dan Ibu Ratisem.

Penulis menyelesaikan pendidikan sekolah dasar (SD) pada tahun 2005 di SD Negeri 1 Papanrejo Kecamatan Abung Timur, Lampung Utara. Pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 1 Bungamayang Lampung Utara pada tahun 2008, pendidikan sekolah menengah atas di SMA Negeri 2 Kotabumi Lampung Utara pada tahun 2011. Penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa angkatan 2012 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

MOTTO

"Wahai orang-orang yang beriman! Bersabarlah kamu dan kuatkanlah kesabaranmu dan tetaplah bersiap siaga dan bertaqwalah kepada Allah agar kamu beruntung."

(Q.S. Ali Imran : 200)

"Sesunguhnya bersama kesulitan ada kemudahan"

(Q.S. Al-Insyirah : 5-6)

PERSEMBAHAN

Dengan segala kerendahan hati dan rasa syukur, aku persembahkan karya kecil ku ini untuk-Mu ya Allah, yang selalu memberikan rahmat dan hidayah sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.

Untuk ibu, bapak, kakakku dan adiku yang selalu memberikan dukungan, kasih sayang, dan tempat istimewa di hati kalian, yang selalu memberikanku motivasi untuk tetap semangat dalam melakukan segala aktivitas.

Kepada teman-temanku, yang telah memberi warna indah di setiap langkah juangku, yang tak pernah henti memberi dorongan dan arahan.

Ku persembahkan karya ini untuk kalian...

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan penulisan tugas akhir sebagai salah satu syarat memperoleh gelar sarjana sains di Universitas Lampung ini. Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW, penuntun jalan bagi seluruh umat manusia.

Diselesaikannya penulisan skripsi yang berjudul *"Integral Riemann Bernilai Barisan* l^1*"* ini tidak terlepas dari doa, bimbingan, dukungan serta saran dari berbagai pihak yang telah membantu. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, M.Si., selaku dosen pembimbing utama yang telah meluangkan waktu untuk membimbing, mengarahkan, dan memotivasi penulis sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.
2. Bapak Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D., selaku dosen pembimbing kedua yang telah memberikan pengarahan dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji atas kritik dan saran yang membangun untuk skripsi ini.

4. Ibu Ir. Netti Herawati, M.Sc.,Ph.D., selaku pembimbing akademik yang telah membimbing penulis selama mengikuti perkuliahan di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
5. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si.,DEA.,Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Dosen, staff, dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA UNILA yang telah memberikan ilmu pengetahuan dan bantuan kepada penulis.
8. Ibu, bapak, kakak, dan adik tercinta yang selalu mendoakan dan menyemangatiku.
9. Sahabat seperjuangan di Matematika angkatan 2012, dan keluarga besar Matematika FMIPA UNILA.
10. Semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini, semoga mendapat imbalan yang sesuai dari Allah SWT.

Penulis menyadari skripsi ini jauh dari sempurna dan penulis juga berharap penelitian ini dapat berguna dan bermanfaat bagi pembaca, aamiin.

Bandar Lampung, 25 Juli 2016
Penulis

Purnomo Aji

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Integral adalah salah satu konsep penting dalam Matematika yang dikemukakan pertama kali oleh Isac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz pada akhir abad ke-17. Selanjutnya konsep ini pada tahun 1850 diteliti secara lebih mendalam oleh Bernhard Riemann. Riemann mendefinisikan integral suatu fungsi pada domain berupa interfal tertutup dan terbatas pada himpunan bilangan real sebagai luas daerah dibawah kurva dari fungsi tersebut. Untuk menentukan luas daerah tersebut diawali dengan membagi interval dimana fungsi terdefinisi menjadi subinterval-subinterval yang banyaknya berhingga. Kemudian dibentuk poligon-poligon dengal lebar $[x_{i-1}, x_i]$ dan tinggi $f(x)$ untuk $x \epsilon [x_{i-1}, x_i]$ pada daerah dibawah kurva dari fungsi tersebut. Selanjutnya ditentukan luas polgon-poligon di atas kurva dinotasikan dengan $\sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i$ dan luas polygon-poligon di bawah kurva dinotasikan dengan $\sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i$ dimana $M_i = sup\{f(x): x \epsilon [x_{i-1}, x_i]\}$, $m_i = inf\{f(x): x \epsilon [x_{i-1}, x_i]\}$ dan $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. Dengan penghampiran bahwa poligon tersebut banyaknya menuju tak hingga, maka luas daerah di bawah kurva atau dengan kata lain integral dari suatu fungsi dapat ditentukan jika limit dari jumlah poligon di atas kurva dan limit dari jumlah poligon di bawah kurva bernilai sama. Cara Riemann mendefinisikan integral seperti di atas disebut pendefisian integral secara konstruktif.

Pada tahun 1875, integral Riemann dimodifikasi oleh Jean Gaston Darboux (1842-1917) dengan mengunakan jumlah atas dan jumlah bawah. Integral Darboux ini lebih mudah dipahami daripada integral Riemann itu sendiri, dan ternyata dapat diperlihatkan bahwa integral Darboux ekuivalen dengan integral Riemann.

Pada pendefinisian integral Riemann tersebut, selisih limit jumlah atas atau jumlah bawah dengan nilai integralnya mengunakan nilai mutlak $|.|$. Selanjutnya peneliti tertarik bagaimana jika nilai integralnya diubah menjadi barisan l^1. Hal ini dimungkinkan yaitu dengan mengubah nilai mutlak $|.|$ menjadi norma $\|.\|$ pada l^1. Permasalahanya adalah, apakah definisi integral Riemann masih berlaku atau tidak?

1.2 Tujuan Penelitan

Tujuan dari penelitian ini adalah mengkonstruksikan integral Riemann bernilai barisan l^1.

1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, penulis hanya akan membahas integral Riemann yang bernilai barisan l^1.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penulisan ini adalah:

1. Menambah pengetahuan tentang masalah integral Riemann dan teorema-teorema yang berkaitan mengenai integral Riemann.
2. Dapat memberikan kontribusi pemikiran untuk memperluas dan memperdalam wawasan di bidang analisis.
3. Memberikan informasi tentang integral Riemann bernilai barisan l^1.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Integral Atas dan Integral Bawah Darboux

Jika diketahui selang $[a,b]$, maka himpunan terurut $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ dengan $x_{i-1} < x_i, (i = 1,2,3,4, \ldots, n)$ merupakan **partisi** (partition) atau **partisi Riemann** pada $[a,b]$. Selanjutnya, $[x_{i-1}, x_i]$ disebut **selang bagian** ke-i dan

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

disebut **panjang selang bagian** ke-i, dan $\|P\| = maks\{\Delta_i x; i = 1,2,3, \ldots, n\}$ disebut **norma** (norm) partisi P, (Rudin, 1987).

Jika P_1 dan P_2 masing-masing partisi pada $[a,b]$ dan $P_1 \subset P_2$, maka dikatakan partisi P_2 merupakan **penghalus** (refinement) partisi P_1. Partisi pada $[a,b]$ yang paling sederhana (kasar) adalah $\{a = x_0, x_n = b\}$ yang dihaluskan oleh partisi pada $[a,b]$ yang lain.

Teorema 2.1.1 Jika P_1 dan P_2 masing-masing merupakan partisi pada selang $[a,b]$ dan $P_1 \subset P_2$ maka $\|P_2\| \leq \|P_1\|$, (Darmawijaya, 2006).

Bukti: Jika partisi $P_2 = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots\ , x_n = b\}$

maka terdapat bilangan asli k dengan $1 \leq k \leq n$ sehingga

$$\Delta_k x = \Delta_k - \Delta_{k-1} = \|P_2\| = maks\{\Delta_i x\ ; i = 1,2,3, \ldots\ , n\}.$$

Karena $P_1 \subset P_2$, maka tepat salah satu terjadi:

- $P_1 = P_2$ dalam keadaan seperti ini maka diperoleh

$$\|P_2\| = \|P_1\|$$

- P_1 merupakan himpunan bagian sejati dari himpunan P_2. Jadi ada

  $t \in P_2 - P_1$ dan $t \in (x_j, x_{j-1})$ untuk suatu j. Dalam keadaan ini tentu

$$\|P_2\| = \|P_1\|$$

Dari dua hasil yang diperoleh dapat disimpulkan atau terbukti bahwa

$$\|P_2\| \leq \|P_1\|. \blacksquare$$

Perlu dicatat bahwa jika P_1 dan P_2 masing-masing merupakan partisi pada selang $[a, b]$, maka untuk setiap $i(i = 1,2)$, selalu berlaku $P_1 \cap P_2 \subset P_i \subset P_1 \cup P_2$.

Contoh:

Misalkan

$$P_1 = \left\{0, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}, P_2 = \left\{0, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\},$$

dan

$$P_3 = \left\{0, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

masing-masing partisi pada selang [0,1] dengan

$$\|P_1\| = \frac{1}{2}, \|P_2\| = \frac{1}{4}, dan\ \|P_3\| = \frac{1}{4}$$

mudah dilihat bahwa $P_1 \subset P_2 \subset P_3$ dan

$$\|P_3\| \leq \|P_2\| \leq \|P_1\|.$$

Jumlah atas dan jumlah bawah

Jika diketahui fungsi $f : [a,b] \to R$ terbatas $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots \ , x_n = b\}$ partisi pada $[a,b], x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ titik sebarang, $m_i = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ dan $M_i = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, maka diperoleh $m_i \leq f(x_i^*) \leq M_i$ untuk setiap $i = 1,2,3, \ldots, n$. Karena fungsi f terbatas pada $[a,b]$, maka ada bilangan m dan M sehingga $m_i = inf\{f(x); x \in [a,b]\}$ dan $M_i = sup\{f(x); x \in [a,b]\}$ dan berakibat bilangan m_i dan M_i ada, dan berlaku $m \leq m_i \leq f(x_i^*) \leq M_i \leq M$.

Definisi 2.1.2 Bilangan

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x$$

Disebut ***Jumlah Riemann*** (Riemann Sum) fungsi f pada $[a,b]$, bilangan

$$L(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i x$$

Disebut ***Jumlah Darboux Bawah*** (Lower Darboux Sum) fungsi f pada $[a,b]$, dan bilangan

$$U(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i x$$

Disebut ***Jumlah Darboux Atas*** (Upper Darboux Sum) fungsi f pada $[a,b]$, (Darmawijaya, 2006).

Di atas telah disebutkan bahwa fungsi $f : [a,b] \to R$ terbatas maka $f(x_i^*), m_i$, dan M_i masing-masing ada (hingga). Hal ini berakibat bilangan-bilangan $S(f;P)$, $L(f;P)$, dan $U(f;P)$ ada untuk setiap partisi P pada $[a,b]$. Oleh karena itu diperoleh teorema dibawah ini.

Teorema 2.1.3 Jika fungsi $f : [a,b] \rightarrow R$ terbatas, maka untuk setiap partisi P pada $[a,b]$, diperoleh $S(f;P), L(f;P), dan\ U(f;P)$ masing-masing ada, dan $m(b-a) \leq L(f;P) \leq S(f;P) \leq U(f;P) \leq M(b-a)$, dengan $m = inf\{f(x); x \in [a,b]\}$, dan $M = sup\{f(x); x \in [a,b]\}$, (Darmawijaya, 2006).

Bukti:

Nilai $L(f;P)$ dan $U(f;P)$ masing-masing bergantung pada partisi P, tepatnya setiap partisi P pada $[a,b]$ menentukan tepat satu nlai $L(f;P)$ dan tepat satu nilai $U(f;P)$. Sedangkan nilai $S(f;P)$ tidak hanya bergantung pada partisi P saja tetapi juga bergantung pada pemilihan titik $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Meskipun demikian, apapun pemilihan $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, Teorema 2.1.3 tetap berlaku. Sifat lebih lanjut tentang hubungan nilai tiga jenis jumlah, yaitu jumlah Riemann dan jumlah Darboux tersebut di atas tertuang ke dalam teorema di bawah ini.

Teorema 2.1.4 Jika fungsi $f : [a,b] \rightarrow R$ terbatas, $P_1\ dan\ P_2$ masing-masing partisi pada $[a,b]$, dan $P_1 \subset P_2$, maka
$L(f;P_1) \leq L(f;P_2) \leq S(f;P) \leq U(f;P_2) \leq U(f;P_1)$, (Darmawijaya, 2006).

Bukti: Mengingat teorema 2.1.3 maka akan ditunjukan $L(f;P_1) \leq L(f;P_2)$ dan $U(f;P_2) \leq U(f;P_1)$.

- Katakan $P_1 = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$. Jika untuk suatu k ada $t_{k0}, t_{k1}, t_k, \ldots, t_{ks} \in P_2$ sehingga

$$m_{kj} = inf\{f(x); x \in [t_{k(j-1)}, t_k]\}$$

$$M_{kj} = sup\{f(x); x \in [t_{k(j-1)}, t_k]\}$$

dengan $j = 1,2,3, \ldots, s$.

Mudah dipahami bahwa $m_k \leq m_{kj} \leq M_{kj} \leq M_k$ untuk setiap j dengan $j = 1,2,3, \dots, s, s+1$. Diperoleh suku ke- k dari $L(f; P_1)$ terpecah menjadi $(s+1)$ suku dari $L(f; P_2)$, dengan hubungan sebagai berikut:

$$m_k \,. \Delta_k x = m_k\big(\Delta_{k1}t + \Delta_{k2}t + \cdots + \Delta_{k(s+1)}t\big)$$

$$= m_k . \Delta_{k1}t + m_k . \Delta_{k2}t + \cdots + m_k . \Delta_{k(s+1)}t$$

$$\leq m_{k1} . \Delta_{k1}t + m_{k2} . \Delta_{k2}t + \cdots + m_{k(s+1)} . \Delta_{k(s+1)}t$$

dengan

$\Delta_{kj}x = \Delta_{kj} - \Delta_{k(j-1)}$ dengan $j = 1,2,3, \dots, s+1$.

Oleh karena itu, dengan menjumlahkan seluruh k dapat disimpulkan

$$L(f; P_1) \leq L(f; P_2).$$

- Katakan $P_1 = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots\ , x_n = b\}$. Jika untuk suatu k ada $t_{k0}, t_{k1}, t_k, \dots\ , t_{ks} \in P_2$ sehingga

$$m_{kj} = inf\big\{f(x); x \in [t_{k(j-1)}, t_k]\big\}$$

$$M_{kj} = sup\big\{f(x); x \in [t_{k(j-1)}, t_k]\big\}$$

dengan $j = 1,2,3, \dots, s$.

Mudah dipahami bahwa $m_k \leq m_{kj} \leq M_{kj} \leq M_k$ untuk setiap j dengan $j = 1,2,3, \dots, s, s+1$. Diperoleh suku ke- k dari $L(f; P_1)$ terpecah menjadi $(s+1)$ suku dari $L(f; P_2)$, dengan hubungan sebagai berikut:

$$m_k \,. \Delta_k x = m_k\big(\Delta_{k1}t + \Delta_{k2}t + \cdots + \Delta_{k(s+1)}t\big)$$

$$= m_k . \Delta_{k1}t + m_k . \Delta_{k2}t + \cdots + m_k . \Delta_{k(s+1)}t$$

$$\leq m_{k1} . \Delta_{k1}t + m_{k2} . \Delta_{k2}t + \cdots + m_{k(s+1)} . \Delta_{k(s+1)}t$$

dengan

$\Delta_{kj}x = \Delta_{kj} - \Delta_{k(j-1)}$ dengan $j = 1,2,3, \dots, s + 1$.

Oleh karena itu, dengan menjumlahkan seluruh k dapat disimpulkan

$$U(f; P_2) \leq U(f; P_1).$$

Karena terbukti $L(f; P_1) \leq L(f; P_2)$ dan $U(f; P_2) \leq U(f; P_1)$, maka dengan demikian terbukti bahwa

$$L(f; P_1) \leq L(f; P_2) \leq S(f; P) \leq U(f; P_2) \leq U(f; P_1). \blacksquare$$

Jika $\pi[a, b]$ koleksi semua partisi pada $[a, b]$, dan didefinisikan dua himpunan bilangan:

$$\mathcal{L}(f) = \{L(f; P); P \in \pi[a, b]\}$$

$$\mathcal{U}(f) = \{U(f; P); P \in \pi[a, b]\}$$

dan diperoleh teorema dibawah ini.

Teorema 2.1.5 Jika fungsi $f : [a, b] \to R$ terbatas maka:

(i) $\mathcal{L}(f)$ terbatas ke atas dan f dikatakan **terintegral Darboux bawah** (lower Darboux integrable) pada $[a, b]$.

(ii) $\mathcal{U}(f)$ terbatas ke bawah dan f dikatakan **terintegral Darboux atas** (upper Darboux integrable) pada $[a, b]$, (Darmawijaya, 2006).

Bukti: Karena fungsi $f : [a, b] \to R$ terbatas maka $m = inf\{f(x); x \in [a, b]\}$ dan $M = sup\{f(x); x \in [a, b]\}$ masing-masing ada. Menurut teorema 2.1.3 dan teorema 2.1.4, maka untuk setiap partisi P pada $[a, b]$ berlaku

$L(f; P) \in \mathcal{L}(f), U(f; P) \in \mathcal{U}(f)$ dan $m(b - a) \leq L(f; P) \leq U(f; P) \leq M(b - a)$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\mathcal{L}(f)$ terbatas ke atas dengan salah satu batas aatasnya adalah $M(b-a)$, dan $\mathcal{U}(f)$ terbatas ke bawah dengan salah satu batas bawahnya adalah $m(b-a)$. ■

Berdasarkan teorema 2.1.5 maka dapat disusun pengertian-pengertian sebagai berikut.

Definisi 2.1.6 Diketahui fungsi $f:[a,b]\to R$ terbatas, maka bilangan:

(i) $(\underline{D})\int_a^b f = (\underline{D})\int_a^b f\,dt \equiv sup_{P\epsilon\pi[a,b]}\,\mathcal{L}(f)$ disebut $\boldsymbol{integral\ Darboux}$ $\boldsymbol{bawah}$ $(lower\ Darboux\ integrable)$ fungsi $f\ pada\ [a,b]$

(ii) $(\overline{D})\displaystyle\int_a^b f = (\overline{D})\int_a^b f\,dt \equiv inf_{P\epsilon\pi[a,b]}\,\mathcal{U}(f)$ disebut $\boldsymbol{integral\ Darboux}$ $\boldsymbol{atas}$ $(upper\ Darboux\ integrable)$fungsi f pada $[a,b]$, (Darmawijaya, 2006).

Teorema 2.1.7 Jika fungsi $f:[a,b]\to R$ terbatas, maka $(\underline{D})\int_a^b f \leq (\overline{D})\int_a^b f$, (Darmawijaya, 2006).

Bukti: Karena fungsi f terbatas, maka menurut teorema 2.1.5 $(\underline{D})\int_a^b f$ dan $(\overline{D})\int_a^b f$ ada. Oleh karena itu, untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P_1dan P_2 pada $[a,b]$ sehingga berlaku

$$(\underline{D})\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f;P_1)\,,U(f;P_2) < (\overline{D})\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (A)$$

Karena $P = P_1 \cup P_2$ partisi pada $[a,b]$ dan $P_i \subset P(i=1,2)$, maka diperoleh

$$L(f;P_1) \leq L(f;P) \leq U(f;P) \leq U(f;P_2) \qquad (B)$$

dari $(A)\ dan\ (B)$ diperoleh

$$\left(\underline{D}\right)\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f;P) \leq U(f;P) < \left(\overline{D}\right)\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$$

yang berarti

$$\left(\underline{D}\right)\int_a^b f \leq \left(\overline{D}\right)\int_a^b f. \ \blacksquare$$

2.2 Integral Darboux

Telah diperlihatkan bahwa setiap fungsi f yang terbatas pada suatu selang $[a,b]$ tentu terintegral Darboux atas dan terintegral Darboux bawah pada selang $[a,b]$ dan selalu berlaku $\left(\underline{D}\right)\int_a^b f \leq \left(\overline{D}\right)\int_a^b f$.

Definisi 2.2.1 Diketahui fungsi f terbatas pada $[a,b]$, jika $\left(\underline{D}\right)\int_a^b f = \left(\overline{D}\right)\int_a^b f$, maka dikatakan f **terintegral Darboux** (Darboux Integrable) pada $[a,b]$, dan bilangan

$$(D)\int_a^b f = \left(\underline{D}\right)\int_a^b f = \left(\overline{D}\right)\int_a^b f.$$

disebut **Integral Darboux** fungsi f pada $[a,b]$, (Darmawijaya, 2006).

Teorema di bawah ini merupakan salah satu kriteria apakah suatu fungsi terintegral Darboux atau tidak.

Teorema 2.2.2 Fungsi f yang terbatas pada $[a,b]$ terintegral Darboux pada $[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P pada $[a,b]$ sehingga berlaku $U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$, (Darmawijaya, 2006).

Bukti:

Syarat perlu: Diketahui fungsi f terintegral Darboux pada $[a,b]$, maka

$(D)\int_a^b f = (\underline{D})\int_a^b f = (\overline{D})\int_a^b f$.

Oleh karena itu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi $P_1\ dan\ P_2$ pada $[a,b]$ sehingga berlaku

$$(D)\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} = (\underline{D})\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f;P_1)$$

dan

$$U(f;P_2) < (\overline{D})\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} = (D)\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$$

karena $P = P_1 \cup P_2$ merupakan partisi pada $[a,b]$ dan $P_i \subset P (i = 1,2)$, maka diperoleh

$$L(f;P_1) \leq L(f;P) \leq U(f;P) \leq U(f;P_2)$$

dari kedua hasil di atas, maka diperoleh

$$(\underline{D})\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f;P) \leq U(f;P) < (\overline{D})\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$$

yang berakibat

$$U(f;P) - L(f;P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Syarat cukup: Diketahui bahwa untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P pada $[a.b]$, sehingga

$$U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon.$$

Telah diketahui dari definisi 2.1.6 dan teorema 2.1.7 selalu berlaku

$$L(f;P) \leq (\underline{D})\int_a^b f \leq (\overline{D})\int_a^b f \leq U(f;P)$$

dan ketaksamaan terakhir berakibat $0 < (\overline{D}) \int_a^b f - (\underline{D}) \int_a^b f < \varepsilon$, untuk setiap $\varepsilon > 0$, yang berarti

$$(\underline{D}) \int_a^b f = (\overline{D}) \int_a^b f. \blacksquare$$

Beberapa fungsi yang terintegral Darboux.

Tiga teorema di bawah ini memperlihatkan tiga contoh penting fungsi-fungsi yang terintegral Darboux pada selang tertutup $[a, b]$.

Teorema 2.2.3

(i) Setiap fungsi konstan terintegral Darboux. Lebih tegas, jika $f(x) = k$ untuk setiap $x \epsilon [a, b]$, maka f terintegral Darboux pada $[a, b]$, dan $(D) \int_a^b f = k(b - a)$.

(ii) Setiap fungsi monoton dan terbatas pada suatu selang tertutup terintegral Darboux, (Darmawijaya, 2006).

Bukti:

$(\boldsymbol{i})$ Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dan sebarang partisi $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$. Karena $f(x) = k$ untuk setiap $x \epsilon [a, b]$, maka diperoleh $m_i = k\ dan\ M_i = k$, untuk setiap $i, i = 1,2,3, \dots, n$. Oleh karena itu diperoleh

$$L(f; P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i x = k(b - a)\ \ dan\ U(f; P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i x = k(b - a)$$

yang berakibat $U(f; P) - L(f; P) = 0 < \varepsilon$ atau menurut teorema 2.2.2 fungsi f terintegral Darboux pada $[a, b]$, maka

$$(D)\int_a^b f = sup\,\mathcal{L}(f) = \sup\{k(b-a)\} = k(b-a)\ dan$$

$$(D)\int_a^b f = inf\,\mathcal{U}(f) = \inf\{k(b-a)\} = k(b-a)$$

$(\boldsymbol{ii})$ Diambil sebarang fungsi g yang monoton dan terbatas. Jika g fungsi konstan maka sudah terbukti. Jika g fungsi naik monoton pada $[a,b]$, untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ yang diambil lebih dahulu, dibentuk partisi $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots\ , x_n = b\}$ pada $[a,b]$ dengan $\|P\| = \frac{\epsilon}{g(b)-g(a)}$. Karena fungsi g naik monoton, maka $m_i = g(x_{i-1})\ dan\ M_i = g(x_i)$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned} U(g;P) - L(g;P) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta_i x \\ &< \sum_{i=1}^{n}\{g(x_i) - g(x_{i-1})\}\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \\ &= \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}\sum_{i=1}^{n}\{g(x_i) - g(x_{i-1})\} \\ &= \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}\{g(x_n) - g(x_0)\} = \varepsilon \end{aligned}$$

yang berarti, menurut teorema 2.2.2 maka fungsi naik monoton dan terbatas, dan f terintegral Darboux pada $[a,b]$. Bukti sejalan untuk fungsi turun monoton dan terbatas. ■

Teorema 2.2.4 Setiap fungsi kontinu pada suatu selang tertutup terintegral Darboux pada selang itu, (Darmawijaya, 2006).

Bukti: Diketahui fungsi f kontinu pada selang tertutup $[a,b]$. Fungsi f kontinu seragam pada $[a,b]$ yaitu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ yang tak bergantung pada $x \in [a, b]$ sehingga untuk setiap $u, v \in [a, b]$ dengan $|u - v| < \delta$ berakibat

(A) $\quad |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

Diambil sebarang partisi $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots \ , x_n = b\}$ pada $[a, b]$ dengan $||P|| < \delta$. Jadi $\Delta_i x < \delta$ untuk setiap $i, i = 1,2,3, \ldots, n$. Karena fungsi f kontinu pada setiap selang bagian $[x_{i-1}, x_i]$, dan terdapat $x_i', x_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$ sehingga $m_i = g(x_i')\ dan\ M_i = g(x_i'')$. Karena $|x_i'' - x_i'| \leq \Delta_i x < \delta$, maka menurut A, berlaku

(B) $\quad |f(x_i'') - f(x_i')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

untuk setiap i. Oleh karena itu, diperoleh

$$U(f; P) - L(f; P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta_i x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i'') - f(x_i')\}\Delta_i x$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) < \varepsilon$$

yang berarti terbukti bahwa fungsi f terintegral Darboux pada selang tersebut. ■

Teorema 2.2.5 Setiap fungsi yang terbatas dan kontinu pada suatu selang tertutup kecuali di beberapa titik, maka fungsi tersebut terintegral Darboux pada selang tertutup itu, (Darmawijaya, 2006).

Bukti: Diambil sebarang fungsi terbatas f yang kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ kecuali di titik $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \epsilon [a, b]$. Tak mengurangi arti jika dianggap $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k$. Karena fungsi f terbatas pada $[a, b]$ maka

$m = inf\{f(x); x \epsilon [a, b]\}, dan\ M = sup\{f(x); x \epsilon [a, b]\}$ ada.

Untuk bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang diambil bilangan positif h dengan $0 < h < \frac{1}{2} min\{a_i - a_{i-1}; i = 1,2, \dots, k\}$. Menurut teorema 2.2.3 karena fungsi f kontinu pada selang-selang $I_1 = [a, a_1 - h], I_2 = [a_1 + h, a_2 - h], I_3 = [a_2 + h, a_3 - h], \dots, I_{k+1} = [a_k + b]$ tentu ada partisi $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{k+1}$ berturut-turut pada selang tersebut, sehingga

$$U(f; P_i) - L(f; P_i) < \frac{\varepsilon}{2(k+1)}$$

untuk setiap $i, (i = 1,2,3, \dots, k + 1)$. Bentuk partisi $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \dots \cup P_{k+1}$ jelas bahwa P partisi pada $[a, b]$ jika

$$m_i = inf\{f(x); x \epsilon [a_i - h, a_i + h]\}$$

dan

$$M_i = sup\{f(x); x \epsilon [a_i - h, a_i + h]\}$$

maka diperoleh

$$U(f; P) - L(f; P) = \sum_{i=1}^{k+1} \{U(f; P_i) - L(f; P_i)\} + \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i) 2h$$

$$< \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\varepsilon}{2(k+1)} (M-m) \sum_{i=1}^{k} 2h$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + (M-m)2kh < \varepsilon$$

asalkan $h < \frac{\varepsilon}{4k(M+m)}$. Dengan kata lain, dapat dikontruksikan partisi $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \ldots \cup P_{k+1}$ pada $[a, b]$ sehingga berakibat

$$U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$$

yang berarti terbukti bahwa fungsi f terintegral Darboux pada $[a, b]$. ■

Akibat 2.2.6 Jika fungsi f terbatas dan $f(x) = 0$ untuk setiap $x \epsilon [a, b]$ kecuali dibeberapa titik, maka fungsi f terintegral Darboux pada $[a, b]$ dan $(D) \int_a^b f = 0$, (Darmawijaya, 2006).

Dengan tiga teorema di atas, banyak jenis fungsi dengan secara mudah dapat ditentukan apakah fungsi itu terintegral Darboux pada selang tertutup $[a, b]$ atau tidak.

2.3 Teorema Bolzano Weierstrass

Sebelum membahas tentang teorema Bolzano Weierstrass, ada baiknya terlebih dahulu membahas beberapa teorema di bawah ini yang merupakan landasan dasar dari teorema Bolzano Weierstrass.

Teorema 2.3.1 (Barisan Monoton)

Barisan monoton $\{a_n\}$ konvergen jika dan hanya jika $\{a_n\}$ terbatas. Lebih lanjut

(i) Jika $\{a_n\}$ naik monoton dan terbatas ke atas, maka

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \sup\{a_n; n = 1,2,3,\dots\}$$

(ii) Jika $\{a_n\}$ turun monoton dan terbatas ke bawah, maka

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \inf\{a_n; n = 1,2,3,\dots\}$$

(Berberian, 1996).

Bukti:

(i) Diambil sebarang barisan monoton $\{a_n\}$. Jika $\{a_n\}$ konvergen, maka ada bilangan a sehingga

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = a\ ada$$

jadi $\{a_n\}$ terbatas. Sebaliknya, jika $\{a_n\}$ terbatas ke atas, sebut M sebagai suprimumnya, maka $M = \sup\{a_1, a_2, \dots\}$. Maka untuk setiap bilangan nyata $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli n_0 sehingga

$$M - \varepsilon < a_{n_0}$$

karena $\{a_n\}$ naik monoton dan terbatas ke atas, maka

$$a_n \leq a_{n+1} \leq M$$

untuk setiap bilangan asli n. Dari hasil A dan B diperoleh, untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku

$$M - \varepsilon < a_{n_0} \leq M < M + \varepsilon$$

atau

$$|a_n - M| < \varepsilon.$$

dengan kata lain terbukti bahwa

$$\lim_{n\to\infty} a_n = M = sup\{a_n; n = 1,2,3, \dots\}$$

(ii) Diambil sebarang barisan monoton $\{a_n\}$. Jika $\{a_n\}$ konvergen, maka ada bilangan a sehingga

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = a, ada$$

jadi $\{a_n\}$ terbatas. Sebaliknya, jika $\{a_n\}$ terbatas ke atas, sebut m sebagai infirmumnya, dengan

$$m = inf\{a_1, a_2, \dots\}$$

maka untuk setiap bilangan nyata $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga

$$m - \varepsilon < a_{n_0}$$

karena $\{a_n\}$ naik monoton dan terbatas ke atas, maka

$$a_n \leq a_{n+1} \leq m$$

untuk setiap bilangan asli n. Dari hasil A dan B diperoleh, untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku

$$m - \varepsilon \leq a_{n_0} \leq m \leq m + \varepsilon$$

atau

$$|a_n - m| < \varepsilon.$$

dengan kata lain terbukti bahwa

$$\lim_{n \to \infty} a_n = m = inf\{a_n; n = 1,2,3, \ldots\}$$

jadi terbukti bahwa barisan monoton $\{a_n\}$ konvergen jika dan hanya jika $\{a_n\}$ terbatas. ■

Teorema 2.3.2 (Teorema Selang Susut)

Jika barisan selang tertutup $\{[a_n, b_n]\}$ mempunyai sifat-sifat

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ untuk setiap $n \epsilon N$

(ii) $\lim_{n \to \infty}(b_n - a_n) = 0$

maka terdapat satu bilangan nyata $x_0 \epsilon [a_n, b_n]$ untuk setiap $n \epsilon N$, (Darmawijaya, 2006).

Bukti: Karena $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ untuk setiap bilangan asli n diperoleh barisan $\{a_n\}$ naik monoton dan terbatas ke atas dan barisan $\{b_n\}$ turun monoton dan terbatas ke bawah. Menerut teorema 3.3.1 $\{a_n\}$ konvergen ke suprimumnya dan $\{b_n\}$ konvergen ke infrimumnya, jadi $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ dan $\lim_{n \to \infty} b_n = b$ dengan $a = sup\{a_n; n = 1,2,3, \ldots\}$ dan $b = inf\{b_n; n = 1,2,3, \ldots\}$. Maka salah satu pernyataan berikut benar $a = b, a < b,$ atau $a > b$.

- Untuk $a < b$ tidak mungkin, sebab jika $a < b$ maka mengingat syarat (ii) diperoleh suatu kontradiksi, yaitu:

$$0 < b - a = \lim_{n \to \infty} b_n - \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty}(b_n - a_n) = 0.$$

- Untuk $a > b$ juga tidak mungkin, sebab jika $a > b$ maka mengingat syarat (ii) diperoleh suatu kontradiksi, yaitu:

$$0 < a - b = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty}(a_n - b_n) = 0.$$

- Sehingga pernyataan $a = b$ adalah yang paling tepat.

Diambil $x_0 = a = b$, akan iperlihatkan $x_0 \epsilon \ [a_n, b_n]$ untuk setiap bilangan asli n. Karena $x_0 = b = inf\{b_n; n = 1,2,3, ...\}$ diperoleh $x_0 < b_n$ untuk setiap bilangan asli n. Karena $x_0 = a = sup\{a_n; n = 1,2,3, ...\}$ diperoleh $a_n < x_0$ untuk setiap bilangan asli n. Jadi, dapat disumpulkan bahwa $a_n < x_0 < b_n$ atau $x_0 \epsilon \ [a_n, b_n]$ untuk setiap bilangan asli n. Ketungalan x_0 cukup jelas karena ketungalan a atau ketungalan b. ■

Teorema 2.3.3 Setiap barisan bilangan nyata paling sedikit mempunyai satu barisan bagian yang monoton, (Darmawijaya, 2006).

Bukti: Diambil sebarang bilangan nyata $\{a_n\}$, maka terdapat tiga kemungkinan, paling sedikit satu terjadi, yaitu:

(i) Untuk setiap $k \ \epsilon \ \mathcal{N}$ ada $n_k \ \epsilon \ \mathcal{N}$ sehingga $k < n_k$ dan $a_k = a_{nk}$. Jika hal ini terjadi, maka terdapat barisan bagian $\{a_{nk}\} \subset \{a_n\}$ yang konstan, maka $\{a_{nk}\}$ barisan monoton.

(ii) Untuk setiap $k \ \epsilon \ \mathcal{N}$ ada $n_k \ \epsilon \ \mathcal{N}$ sehingga $k < n_k$ dan $a_k = a_{nk}$. Jika hal ini terjadi, maka terdapat barisan bagian $\{a_{nk}\} \subset \{a_n\}$ yang naik monoton.

(iii) Untuk setiap $k \ \epsilon \ \mathcal{N}$ ada $n_k \ \epsilon \ \mathcal{N}$ sehingga $k < n_k$ dan $a_k = a_{nk}$. Jika hal ini terjadi, maka terdapat barisan bagian $\{a_{nk}\} \subset \{a_n\}$ yang turun monoton. ■

Teorema 2.3.4 (Teorema Bolzano Weierstrass)

Setiap barisan bilangan nyata yang terbatas mempunyai barisan bagian yang konvergen, (Darmawijaya, 2006).

Bukti: Diambil sebarang barisan $\{a_n\}$ yang terbatas. Menurut teorema 2.3.3 $\{a_n\}$ mempunyai barisan $\{a_{n_k}\}$ bagian yang monoton. Jadi $\{a_{n_k}\}$ barisan yang monoton terbatas. Oleh karena itu, menurut teorema 2.3.1 $\{a_{n_k}\}$ konvergen. ■

Teorema Bolzano Weierstrass dapat juga dibuktikandengan mengunakan teorema selang susut. Teorema Bolzano Weierstrass mengatakan bahwa jika $\{a_n\}$ barisan yang terbatas, maka setiap barisan bagianya yang konvergen tidak perlu mempunyai limit yang sama. Tetapi jika setiap barisan bagianya yang konvergen itu mempunyai limit yang sama, maka barisan aslinya akan konvergen ke limit yang sama.

2.4 Integral Riemann

Telah diketahui bahwa jika fungsi $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ terbatas dan P partisi pada [a,b], maka berakibat

$$L(f;P) \leq S(f;P) \leq U(f;P)$$

George Friedrich Bernhard Riemann mengunakan $S(f;P)$ untuk menyusun integralnya (Rudin, 1987).

Definisi 2.4.1 (Integral Riemann)

Fungsi $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Riemann (Riemann Integrable) pada [a,b] jika terdapat bilangan $\boldsymbol{A}$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $\boldsymbol{P} = \{ a = x_0, x_1, ..., x_n = b \}$ partisi pada [a,b] dengan $\|P\| < \delta$ berakibat

$$|A - S(f;P)| = \left| A - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta_i x \right| < \varepsilon$$

A disebut ***nilai integral Riemann*** fungsi f pada [a,b], (Darmawijaya, 2006).

Perlu diingat bahwa pengambilan $x_i^* \epsilon [x_{i-1}, x_i]$ sebarang, dan $\|P\| = maks\ \{ \Delta_i x$, i= 1,2,…,n }. Sehingga menurut definisi 2.4.1 fungsi f terintegral Riemann pada [a,b] jika dan hanya jika

$$\lim_{\|p\| \to 0} (S;P) = \lim_{\|p\| \to 0} . \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta_i x = A$$

Teorema 2.4.2 Jika f terintegral Riemann pada [a,b], maka nilai integralnya tunggal, (Darmawijaya, 2006).

Bukti: Jika A_1 dan A_2 merupakan nilai integral Riemann pada [a,b], maka untuk sebarang bilangan $\varepsilon < 0$ terdapat bilangan $\delta_1 < 0$ dan $\delta_2 < 0$ sehingga jika $P_1 = \{ a = x_0, x_1, \ldots , x_n = b \}$ dan $P_2 = \{ a = x_0, x_1, \ldots , x_n = b \}$ adalah partisi dari [a,b] dengan $\| P_1 \| < \delta_1$ dan $\| P_2 \| < \delta_2$, berturut-turut maka berakibat

$$\left| A_1 - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta_i x \right| < \frac{\varepsilon}{2}\ dan\ \left| A_2 - \sum_{i=1}^{n} f(y_k^*)\, \Delta_k y \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

diambil $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$, partisi $P = \{ a = z_0, z_1, \ldots , z_n = b \}$ dengan $\| P \| < \delta$ dan $Z_I^* \epsilon [Z_{i-1}, Z_i]$. Karena $\| P \| < \delta_i$ dengan i = 1,2 maka diperoleh

$$|A_1 - A_2| \leq \left| A_1 - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta_i Z \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta_i Z - A_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

yang berarti $A_1 = A_2$ dan bukti selesai.

Menurut definisi 2.4.1 dan teorema 2.4.2 jika fungsi f terintegral Riemann pada [a,b] dengan nilai integral Riemannya *A*, yang dapat ditulis dengan

$$A = (R) \int_a^b f = (R) \int_a^b f\ (x)\, dx$$

tunggal.

Teorema 2.4.3. Jika fungsi $f: [a, b]$ terintegral Riemann pada $[a, b]$, maka f terbatas pada $[a, b]$, (Darmawijaya, 2006).

Bukti: Andaikan fungsi f tak terbatas ke atas pada $[a, b]$, maka untuk setiap bilangan asli n terdapat $t_n \epsilon [a, b]$ sehingga

$$f\ (t_n) > n.$$

Untuk setiap partisi $P = \{ a = x_0, x_1, \ldots , x_n = b \}$, tentu $t_n \epsilon [x_{k-1}, x_k]$. Hal ini beratri

$$\lim_{\|p\| \to 0} S (f; P) = +\infty$$

(tidak ada) yang dengan kata lain fungsi f tak terintegral Riemann pada $[a, b]$. Bukti sejalan, apabila diandaikan tak terbatas kebawah.

Teorema 2.4.4. (*Kriteria Cauchy*)

Diketahui fungsi $f : [a, b] \to R$ terbatas. Fungsi f terintegral Riemann pada $[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika P_1 dan P_2 partisi pada $[a, b]$ dengan $\|P_1\| < \delta$ dan $\|P_2\| < \delta$ berakibat $|S(f; P_1) - S(f; P_2)| < \varepsilon$, (Berberian, 1996).

Bukti:

Syarat perlu: Jika f terintegral Riemann pada $[a, b]$, maka ada bilangan A sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika P partisi pada $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berakibat

$$|S(f; P) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Diambil sebarang dua partisi P_1 dan P_2 pada $[a, b]$ dengan $\|P_1\| < \delta$ dan $\|P_2\| < \delta$ berakibat

$$|S(f; P_1) - S(f; P_2)| \leq |S(f; P_1) - A| + |A - S(f; P_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Syarat cukup: Menurut yang diketahui untuk bilangan 1 terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika P_1 dan P_2 masing-masing partisi pada $[a, b]$ dengan $\|P_1\| < \delta$ dan $\|P_2\| < \delta$ berakibat $|S\,(f;\ P_1\,) - S\,(f;\ P_2)\,| < 1$.

Tulis π sebagai koleksi semua partisi P pada $[a, b]$ dengan

$$\|P\| < \delta$$

untuk setiap $P \in \pi$. Diambil $P_0 \in \pi$, untuk setiap $P \in \pi$ diperoleh

$$|S\,(f;\ P_1\,) - S\,(f;\ P_2)\,| < 1$$

atau

$$S\,(f;\ P_0\,) - 1 < S\,(f; P\,) < S\,(f;\ P_0\,) + 1$$

jadi, himpunan bilangan nyata

$$S\,(f) = \{\,S\,(f; P); P \in \pi\}$$

terbatas. Jika angota $S\,(f)$ banyaknya hingga, maka f merupakan fungsi tangga dan oleh karena itu f terintegral Riemann pada $[a, b]$. Jika fungsi f bukan fungsi tangga, maka $S\,(f)$ merupakan himpunan bilangan terbatas yang banyak angotanya tak hingga. Menurut teorema 2.3.4. (Teorema Bolzano-Weierstrass), $S\,(f)$ mempunyai paling sedikit satu titik limit, namakan titik limit itu A.

Hal ini berarti untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat $P_0 \in \pi$, $S\,(F; P) \in S(f; P)$, sehingga

$$|A - S(f; P)| < \varepsilon$$

Dengan kata lain fungsi f terintegral Riemann pada $[a, b]$. ■

Teorema 2.4.3. mengatakan bahwa setiap fungsi yang tak terbatas pada suatu selang tertutup tak akan terintegral Riemann pada selang itu. Teorema dibawah ini akan menunjukan ekuivalensi antara integral Riemann dan integral Darboux.

Teorema 2.4.5. Fungsi f terintegral Riemann jika dan hanya jika f terintegral Darboux pada selang tertutup yang sama. Lebih lanjut

$$(R)\int_a^b f = (D)\int_a^b f$$

(Berberian, 1996).

Bukti:

Syarat perlu: Jika fungsi f terintegral Riemann pada $[a, b]$, maka ada bilangan $A = (R)\ \int_a^b f$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ dan jika $P = \{\, a = x_0, x_1, \dots , x_n = b \,\}$ partisi pada $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berakibat

$$|A - S\,(f; P)| = \left|A - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

atau

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < S(f; P) < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Perlu diingat bahwa pemilihan $x_i^* \epsilon [x_{i-1}, x_i]$ sebarang. Karena

$$m_i = \inf\{f(x);\ x \,\epsilon\, [x_{i-1}, x_i]\}$$

dan

$$M_i = \sup\{f(x);\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

ada, maka untuk setiap $i(i = 1,2, \dots\ , n)$ dapat dipilih $x_i', x_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$ sehingga

$$f(x_i') - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < m_i \ dan \ M_i < f(x_i'') - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

setelah dikalikan dengan $\Delta_i x$ kemudian dijumlahkan, diperoleh

$$S(f;P) - \frac{\varepsilon}{2} < L(f;P) \ dan \ U(f;P) \ \le S(f;P) + \frac{\varepsilon}{2}$$

oleh karena itu

$$S(f;P) - \frac{\varepsilon}{2} < L(f;P) \ \le \ U(f;P) \ \le S(f;P) + \frac{\varepsilon}{2}$$

yang berakibat

$$U(f;P) - L(f;P) \ < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ < \ \varepsilon$$

atau fungsi f terintegral Darboux pada $[a, b]$.

Syarat cukup: Karena f terintegral Darboux pada selang $[a, b]$, maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P pada $[a, b]$ sehingga berlaku

$$U(f;P) - L(f;P) < \ \varepsilon.$$

Tetapi telah diketahui bahwa

$$L(f;P) \le (D)\int_a^b f \le U(f;P) \ dan \ L(f;P) \le S(f;P) \le U(f;P)$$

berdasarkan tiga ketidaksamaan terakhir, dapat disimpulkan bahwa

$$\left|(D)\int_a^b f - S(f;P)\right| < \varepsilon$$

yang berarti bahwa fungsi f terintegral Riemann pada $[a, b]$, dan

$$(R)\int_a^b f = A = (D)\int_a^b f.$$

Setelah diketahui adanya ekuivalensi antara integral Riemann dan integral Darboux, maka akan diselidiki sifat-sifatnya lebih lanjut. Untuk menyingkat penulisan perlu diadakan kesepakatan bersama bahwa jika tidak ada kerancuan atau maksud tertentu, untuk selanjutnya yang dimaksud dengan perkataan **fungsi yang terintegral** adalah fungsi yang terintegral Riemann atau fungsi yang terintegral Darboux dan

$$\int_a^b f = (D)\int_a^b f = (R)\int_a^b f.$$

Himpunan semua fungsi yang terintegral Riemann atau terintegral Darboux pada selang tertutup $[a, b]$ berturut-turut ditulis dengan

$$R\ [a, b] \text{ dan } D\ [a, b]$$

Jadi, jika f terintegral pada $[a, b]$ ditulis dengan

$$f \in R[a, b] \text{ dan } f \in D[a, b].$$

dan untuk lebih menyingkat nilai integralnya maka dapat ditulis dengan $\int_a^b f = \int_a^b f(t)dt$. Jadi

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f = (R)\int_a^b f = (D)\int_a^b f\,. \blacksquare$$

Mudah dipahami bahwa untuk setiap partisi $P = \{ a = x_0, x_1, \dots , x_n = b \}$ pada $[a, b]$, $f, g \epsilon R[a, b]$, sebarang konstanta $\alpha(\alpha \epsilon R), dan\ x_i^* \epsilon [x_{i-1}, x_i]$ untuk setiap i, selalu berlaku:

1. $S(\alpha f; P) = \alpha . S(f; P)$
2. $S(f; P) + S(g; P) = S(f + g; P)$
3. $L(\alpha f; P) = \alpha . L(f; P)$ asalkan $\alpha > 0$
4. $U(\alpha f; P) = \alpha . U(f; P)$ asalkan $\alpha > 0$
5. $L(\alpha f; P) = \alpha . U(f; P)$ asalkan $\alpha < 0$
6. $U(\alpha f; P) = \alpha . L(f; P)$ asalkan $\alpha < 0$
7. $L(f; P) + L(g; P) = L(f + g; P)$
8. $U(f + g; P) \leq U(f; P) + U(g; P)$

Teorema 2.4.6. $R[a, b]$ merupakan ruang linear untuk setiap $\alpha \epsilon R$ dan $f, g \epsilon R[a, b]$ berakibat $\alpha f, f + g \epsilon R[a, b]$. Lebih lanjut

i. $\int_a^b \alpha . f = \alpha . \int_a^b f$

ii. $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

(Stewart, 2002).

Bukti: Karena $f, g \epsilon R[a, b]$, maka menurut teorema 2.4.3. fungsi f dan fungsi g masing-masing terbatas pada $[a, b]$. Namakan

$$M_f = \sup\{|f(x)|;\ x \epsilon [a, b]\}, dan\ M_g = \sup\{|g(x)|; x \epsilon [a, b]\}$$

dan

$$M = maks\ \{|\alpha|, M_f, M_g, 1\}$$

karena $f, g \in R[a,b]$, maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika P partisi pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berakibat

$$\left|\int_a^b f - S(f;P)\right| < \frac{\varepsilon}{M+1}\ dan\ \left|\int_a^b g - S(f;P)\right| < \frac{\varepsilon}{M+1}$$

selanjutnya diperoleh

i. $\left|\alpha \int_a^b f - S(\alpha f;P)\right| = \left|\alpha \int_a^b f - \alpha . S(f;P)\right| = |\alpha| \left|\int_a^b f - D(f;P)\right| < |\alpha| \frac{\varepsilon}{M+1} < \varepsilon$

Dengan kata lain terbukti bahwa $\alpha f \in R[a,b]$ dan

$$\int_a^b \alpha f = \alpha . \int_a^b f.$$

ii. $\left|(\int_a^b f + \int_a^b g) - S(f+g;P)\right| = \left|\int_a^b f + \int_a^b g - (S(f;P) + S(g;P))\right| < \left|\int_a^b f - S(f;P)\right| + \left|\int_a^b g - S(g;P)\right| < \frac{\varepsilon}{M+!} + \frac{\varepsilon}{M+1} < 2\varepsilon.$

Dengan kata lain, terbukti bahwa $f + g\ \varepsilon\ R[a,b]$ dan

$$\int_a^b (+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Menurut akibat 2.2.6. jika fungsi f terbatas dan $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$, kecuali dibeberapa titik, maka fungsi f terintegral dan

$$\int_a^b f = 0$$

dengan mengunakan hasil tersebut akan dibuktikan teorema dibawah ini.

Teorema 2.4.7. Jika $\varepsilon\ R[a,b]$, fungsi g terbatas pada $[a,b]$, dan $g(x) = f(x)$ kecuali di beberapa titik, maka $g\ \varepsilon\ R[a,b]$, dan

$$\int_a^b g = \int_a^b f$$

(Berberian, 1996).

Bukti: Karena fungsi g terbatas pada $[a,b]$ dan $g(x) \leq f(x)$ untuk setiap $x\ \varepsilon\ R[a,b]$, maka fungsi $h = f - g$ mempunyai sifat terbatas pada $[a,b]$ dan $h(x) = 0$ untuk setiap $x\ \varepsilon\ R[a,b]$, kecuali dibeberapa titik. Oleh karena itu menurut akibat 2.2.6 fungsi h terintegral dan

$$\int_a^b h = 0 \Leftrightarrow \int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g = 0 \Leftrightarrow \int_a^b f = \int_a^b g.$$

Teorema 2.4.8 Jika $f\ \varepsilon\ R[a,b]$ dan $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x\ \varepsilon\ [a,b]$, maka

$$\int_a^b f \geq 0,$$

(Berberian, 1996).

Bukti: Karena $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x\ \varepsilon\ R[a,b]$ dan $f\ \varepsilon\ R[a,b]$, maka untuk setiap partisi $P = \{\ a = \ x_0,\ x_1, \ldots\ ,\ x_n = b\ \}$ pada $[a,b]$ diperoleh

$$0 \leq m(b-a) \leq L(f;P) \leq S(f;P) \leq U(f;P) \leq M(b-a)$$

dengan

$$m = \inf\{f(x); x \in [a,b]\}\ dan\ M = \sup\{f(x); x \in [a,b]\}.$$

Hal ini berakibat

$$0 \leq \lim_{\|P\| \to 0} S(f;P) = \int_a^b f.$$

Teorema 2.4.9 Jika $f, g \epsilon R[a, b]$ dan $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \epsilon [a, b]$, maka

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g,$$

(Berberian, 1996).

Bukti: Dibentuk fungsi $h = g - f$. Mudah difahami bahwa $h \epsilon R[a, b]$ dan $h(x) \geq 0$ untuk setiap $x \epsilon R[a, b]$. Menurut teorema 2.4.8 diperoleh

$$0 \leq \int_a^b h = \int_a^b (g - f) = \int_a^b g - \int_a^b f$$

atau terbukti bahwa

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g. \blacksquare$$

Teorema 2.4.10 Diketahui $I = [a, b], c \epsilon I$ dan $f: I \to R$ terbatas. $f \epsilon R[a, b]$ jika dan hanya jika $f \epsilon R[a, c]$ dan $f \epsilon R[c, b]$. Dalam hal ini

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

(Stewart, 2002).

Bukti:

Syarat perlu: Karena $f \epsilon R[a, b]$, maka untuk setiap bilangan $\varepsilon < 0$ terdapat partisi P pada $[a, b]$, sehingga

$$U(f; P) - L(f; P) < \varepsilon \qquad (i)$$

dibentuk $P' = P \cup \{c\}, P_1' = P' \cap [a, c], P_2' = P' \cap [c, b]$. Jelas bahwa $P \subset P'$ dan $P' = P_1' \cup P_2'$ dengan $P_1' = P' \cap [a, b]$ partisi pada $[a, b]$ dan $P_2' = P' \cap [c, b]$ partisi pada $[c, b]$. Oleh karena itu diperoleh

$$L(f:P) \leq L(f;\ P') = L(f;\ P_1') + L(f;\ P_2') \leq U(f;\ P_1') + U(f;\ P_2') = U(f;P')$$

$$\leq U(f;P) \qquad\qquad (ii)$$

dari (i) dan (ii) diperoleh

$$\{U(f;\ P_1') - L(f;\ P_1')\} + \{U(f;\ P_2') - L(f;\ P_2')\}$$

$$= U(f;P') - L(f;P') \leq U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$$

yang berakibat

$$U(f;\ P_1') - L(f;\ P_1') < \varepsilon\ dan\ U(f;\ P_2') - L(f;\ P_2') < \varepsilon$$

dengan kata lain terbukti bahwa $f \in R[a,c]$ dan $f \in R[c,b]$. Lebih lanjut

$$\int_a^b f = \inf\{U(f;P'); P' \in \pi[a,b]\}$$

$$= \inf\{U(f;\ P_1') + U(f;\ P_2');\ P_1' \in \pi[a,c]\ dan\ P_2' \in \pi[c,b]\}$$

$$= \inf\{\ U(f;\ P_1');\ P_1' \in \pi[a,c]\} + \inf\{U(f;\ P_2');\ P_2' \in \pi[c,b]\}$$

$$= \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Syarat cukup: Karena $f \in R[a,c]$ dan $f \in R[c,b]$, maka nilai-nilai limit dibawah ini ada:

$$\int_a^b f = \lim_{\|P_1\| \to 0} S(f;\ P_1)\ dan\ \int_a^b f = \lim_{\|P_2\| \to 0} S(f;\ P_2)$$

dengan P_1 merupakan partisi pada $[a,c]$ dan P_2 merupakan partisi pada $[c,b]$. jelas bahwa $P = P_1 \cup P_2$ partisi pada $[a,b]$. Oleh karena itu

$$\int_a^c f = \lim_{\|P\| \to 0} S(f;P) = \lim_{\|P\| \to 0} S(f;P_1 \cup P_2)$$

$$= \lim_{\|P_1\| \to 0} S(f;P_1) + \lim_{\|P_2\| \to 0} S(f;P_2)$$

$$= \int_a^c f + \int_c^b f. \blacksquare$$

Catatan: Syarat cukup dapat dibuktikan dengan memanfaatkan bahwa fungsi f terintegral Darboux pada $[a, c]$ maupun pada $[c, b]$.

Teorema 2.4.11 Jika fungsi $f: [a, b] \to R$ terintegralkan pada $[a, b]$ serta fungsi $\varphi: [c, d] \to R$ kontinu pada $[a, b]$ dan $f(x) \epsilon [c, d]$ untuk setiap $x \epsilon [a, b]$, maka fungsi $\varphi \circ f : [a, b] \to R$ terintegral pada $[a, b]$, (Berberian, 1996).

Bukti: Karena φ kontinu pada selang tertutup $[c, d]$, maka φ terbatas disana. Jadi, $K = \sup\{\varphi(t); t \epsilon [c, d]\}$ ada. Lebih lanjut, fungsi φ kontinu seragam pada $[c, d]$. Oleh karena itu untuk sebarang bilangan $\varepsilon < 0$ terdapat bilangan $\delta_1 < 0$ sehingga jika $s, t \epsilon [c, d]\ dan\ |s - t| < 0$ berakibat

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2K + b - a + 1} = \varepsilon'.$$

Diambil $\delta_2 = \min\{\delta_1, \varepsilon'\}$. Karena fungsi f terintegral pada $[a, b]$, maka terdapat partisi P pada $[a, b]$ sehingga berlaku

$$U(f; P) - L(f; P) < \delta_2$$

katakana $P = \{ a = x_0, x_1, \dots , x_n = b \}$, dan

$$m_k = \inf\{f(x); x \epsilon [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k = \sup\{f(x);\ x \epsilon [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$m_k' = \inf\{\varphi(x);\ x \epsilon [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k' = \sup\{\varphi(x);\ x \epsilon [x_{k-1}, x_k]\}$$

dibedakan indeks k tersebut menjadi dua kelompok yang terpisah

$$A = \{k;\ M_k - m_k < \delta\}\ dan\ B = \{k;\ M_k - m_k \geq \delta.$$

Jika $k \epsilon A\ dan\ y \epsilon [x_{k-1}, x_k]$, maka diperoleh $|f(x) - f(y)| < M_k - m_k < \delta$ dan berakibat

$$\left|\varphi\big(f(x)\big) - \varphi(f(y))\right| < \varepsilon'$$

oleh karena itu

$$M_k' - m_k' \leq \varepsilon'$$

dan

$$\sum_{k \,\epsilon\, A} (M_k' - m_k')\Delta_k x \leq \varepsilon'(b-a) \qquad (i)$$

jika $k \,\epsilon\, B$, maka diperoleh $M_k' - m_k' \leq 2k$. Oleh karena itu

$$\sum_{k \,\epsilon\, B} (M_k' - m_k')\Delta_k x \leq 2K \sum_{k \,\epsilon\, B} (x_k - x_{k-1}) \qquad (ii)$$

jika $k \,\epsilon\, B$, maka diperoleh $\delta \leq M_k - m_k$ dan

$$\sum_{k \,\epsilon\, B} (x_k - x_{k-1}) \leq \frac{1}{\delta} \sum_{k \,\epsilon\, B} (M_k - m_k)\Delta_k x$$

$$\leq \frac{1}{\delta}\{U(f;P) - L(f;P)\} < \delta \leq \varepsilon'$$

oleh karena itu, untul $k \,\epsilon\, B$ diperoleh

$$\sum_{k \,\epsilon\, B} (M_k' - m_k')\Delta_k x \leq 2K\varepsilon'.$$

dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan

$$U(\varphi \circ f\,;P) - L(\varphi \circ f\,;P) \leq \varepsilon'(b-a) + 2K\varepsilon' < \varepsilon$$

dengan kata lain terbukti fungsi $\varphi \circ f$ terintegral pada $[a, b]$. ■

Teorema 2.4.12 Jika $f, g \in R[a,b]$, maka $f.g \in R[a,b]$, (Gaughan, 1998).

Bukti: karena $f, g \in R[a,b]$, maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika P partisi pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berakibat

$$\left|\int_a^b f - S(f;P)\right| < \frac{\varepsilon}{2(B+1)} \; dan \left|\int_a^b g - S(g;P)\right| < \frac{\varepsilon}{2(A+1)}$$

selanjutnya diperoleh

$$\left|\left(\int_a^b f \,.\, \int_a^b g\right) - S(f.g;P)\right|$$

$$= \left|\int_a^b f \,.\, \int_a^b g - (S(f;P)\,.\,S(g;P)\right|$$

$$= \left|\int_a^b f \,.\, \int_a^b g - \int_a^b f.S(g;P) + \int_a^b f.S(g;P) - (S(f;P)\,.\,S(g;P)\right|$$

$$= \left|\int_a^b f\left(\int_a^b g - S(g;P)\right) + S(g;P)\left(\int_a^b f - S(f;P)\right)\right|$$

$$= \left|A\left(\int_a^b g - S(g;P)\right) + B\left(\int_a^b f - S(f;P)\right)\right|$$

$$\leq \left|A\left(\int_a^b g - S(g;P)\right)\right| + \left|B\left(\int_a^b f - S(f;P)\right)\right|$$

$$\leq A\frac{\varepsilon}{2(A+1)} + B\frac{\varepsilon}{2(B+1)} < \varepsilon$$

dengan kata lain terbukti bahwa $f.g \in R[a,b]$. ■

2.5 Ruang Barisan

Definisi 2.5.1

Deberikan ω yaitu koleksi semua barisan bilangan real, jadi:

$$\omega = \{\bar{x} = \{x_k\}: x_k \,\epsilon\, R\}$$

a. Untuk setiap bilangan real p dengan $1 \leq p \leq \infty$ didefinisikan

   $l^p = \{x \,\epsilon\, \{x_j\} \,\epsilon\, \omega : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\}$ dan norm pada l^p yaitu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

b. Untuk $p = 1$ didefinsikan $l^1 = \{x \,\epsilon\, \{x_j\} \,\epsilon\, \omega : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty\}$ dan norm

   pada l^1 yaitu

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$$

c. Untuk $p = \infty$ didefinisikan $l^{\infty} = \{x \,\epsilon\, \{x_j\} \,\epsilon\, \omega : sup|x_j| < \infty\}$ dan norm

   pada l^{∞} yaitu

$$\|x\|_{\infty} = sup|x_j|, untuk\ j \geq 1$$

   (Darmawijaya, 2007).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada semester ganjil tahun ajaran 2015-2016.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka, yaitu dengan mengkaji buku-buku dan jurnal-jurnal yang berkaitan dengan penelitian ini.

3.3 Langkah-Langkah Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

- Mengetahui definisi tentang integral Riemann dan teorema-teorema yang berkaitan dengan integral Riemann.
- Menganti fungsi nilai mutlak $|.|$ di $\mathbb{R}$ dengan fungsi norma $\|.\|$ di l^1.
- Membuktikan apakah definisi dan teorema-teorema yang terkait dengan integral Riemann bernilai barisan l^1.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Pada penelitian ini telah berhasil dikonstruksikan integral Riemann untuk fungsi-fungsi bernilai barisan l^1 yang merupakan pengembangan dari integral Riemann fungsi-fungsi bernilai real

Fungsi $\bar{f} : [a,b] \to l^1$ dikatakan **terintegal Riemann** pada $[a,b]$ jika ada bilangan $\bar{A} = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots)$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ partisi pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berakibat

$$\left\|A - S(\bar{f}; P)\right\|_{l^1} = \left\|\bar{A} - \sum_{i=1}^{n} \bar{f}(x_i^*)\Delta_i x\right\|_{l^1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left|A_k - \sum_{i=1}^{n} f_k(x_i^*)\Delta_i x\right| < \varepsilon$$

dengan $\bar{A} = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots)$ dan $\bar{f} = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots)$, $\bar{A}$ disebut **nilai integral Riemann** fungsi $\bar{f}$ pada $[a,b]$.

Perlu diingat bahwa pengambilan $x_i^* \epsilon [x_{i-1}, x_i]$ sebarang dan $\|P\| = sup\{\Delta_i x \,; i = 1,2,3, \dots, n, \dots\}$. Selanjutnya fungsi $\bar{f}$ terintegral Riemann pada $[a,b]$ jika dan hanya jika

$$\lim_{\|P\|\to 0}(S;P) = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\bar{f}(x_i^*)\Delta_i x = \bar{A}$$

Jika $\bar{f} : [a,b] \to l^1$ terintegral Riemann pada $[a,b]$, maka nilai integralnya tunggal. Fungsi $\bar{f} = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots) : [a,b] \to l^1$ terintegral Riemann pada $[a,b]$ jika dan hanya jika $f_k : [a,b] \to R, k = 1,2,3, \dots$ masing-masing terintegral Riemann pada $[a,b]$.

5.2 Saran

Pembahasan skripsi ini hanya berfokus pada integral Riemann yang bernilai barisan l^1, sehingga penulis menyarankan agar dilakukan penelitian yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Berberian, S.K. 1996. *Fundamental of real Analysis*. Unyversity of Texas, USA.

Darmawijaya, Soeparna. 2006. *Pengantar Analisis Real*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Darmawijaya, Soeparna. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak.* Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Gaughan, Edward, D. 1998. *Introduction to Analysis*. Fifth Edition. New Mexico State University, Mexico.

Rudin, Walter. 1987. *Principles of Mathematical Analysis*. Third Edition. McGraw-Hill, New York.

Stewart, J. 2002. *Kalkulus*. Edisi keempat, Jilid 1. Alih Bahasa oleh I Nyoman Susila dan Hendra Gunawan. Erlangga, Jakarta.