VARIAN, KUMULAN, MOMEN, DAN FUNGSI KARAKTERISTIK DISTRIBUSI *GENERALIZED PARETO* 3-PARAMETER

(Tesis)

Oleh

Dwi Herinanto

MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2016

ABSTRACT

VARIANCE, CUMULANT, MOMENT, AND CHARACTERISTIC FUNCTION OF THE GENERALIZED PARETO 3-PARAMETER DISTRIBUTION

By

Dwi Herinanto

The Generalized Pareto 3-Parameter Distribution is generalization of Pareto Distribution. Pareto distribution is family of continue probability distribution to describe social, scientific, geophysic, civil engineering, and actuaria phenomenon. The Generalized Pareto 3-Parameter has probability density function as follows:

$$f(x;\theta,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\left(1 + \frac{\theta(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-\left(\frac{1}{\theta}\right)-1} \quad , for\ \theta \neq 0$$

$$f(x;\theta,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\ \exp\left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right) \quad , for\ \theta = 0$$

μ is the location parameter, σ is the scale parameter, θ is the shape parameter where $x \geq \mu$ for $\theta \geq 0$ and $\mu \leq x \leq \mu - \frac{\sigma}{\theta}$ for $\theta < 0$ (Muraleedharan dan Soares, 2014). The Generalized Pareto 3-Parameter Distribution has population characteristic. The form of probability distribution can be obtained by analyzed moment generating function, moment k-th, variance, cumulant and function characteristic of The Generalized Pareto 3-Parameter Distribution. The aim of this paper is to obtain variance, cumulant, moment k-th, and characteristic function of The Generalized Pareto 3-Parameter Distribution.

Keywords: The Generalized Pareto 3-Parameter Distribution, variance, cumulant, moment generating function, moment, characteristic function

ABSTRAK

VARIAN, KUMULAN, MOMEN, DAN FUNGSI KARAKTERISTIK DISTRIBUSI *GENERALIZED PARETO* 3-PARAMETER

Oleh

Dwi Herinanto

Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter adalah bentuk umum dari distribusi peluang *Pareto*. Distribusi *Pareto* merupakan salah satu keluarga distribusi peluang kontinu yang biasa digunakan dalam menggambarkan berbagai fenomena sosial, saintifik, geofisika, teknik sipil dan aktuaria. Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter memiliki fungsi kepadatan peluang

$$f(x;\theta,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}\left(1+\frac{\theta(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-\left(\frac{1}{\theta}\right)-1} \quad ,untuk\ \theta\neq 0$$

$$f(x;\theta,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}\ \exp\left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right),untuk\ \theta=0$$

μ merupakan parameter lokasi, σ parameter skala, θ parameter bentuk dengan $x\geq\mu$ untuk $\theta\geq 0$ dan $\mu\leq x\leq\mu-\frac{\sigma}{\theta}$ untuk $\theta<0$ (Muraleedharan dan Soares, 2014). Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter merupakan distribusi peubah acak kontinu yang juga mempunyai karakteristik populasi. Bentuk suatu distribusi probabilitas dapat ditentukan dengan mengkaji fungsi pembangkit momen, momen, varian, kumulan/semi invarian dan fungsi karakteristik dari distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter. Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan varian, kumulan/semi invarian, momen, dan fungsi karakteristik Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter.

Kata kunci: Distribusi Generalized Pareto 3-Parameter, varian, kumulan/semi invarian, fungsi pembangkit momen, momen, fungsi karakteristik

VARIAN, KUMULAN, MOMEN, DAN FUNGSI KARAKTERISTIK DISTRIBUSI *GENERALIZED PARETO* 3-PARAMETER

Oleh

Dwi Herinanto

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
MAGISTER SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2016

Judul Tesis	: **VARIAN, KUMULAN, MOMEN, DAN FUNGSI KARAKTERISTIK DISTRIBUSI *GENERALIZED PARETO* 3-PARAMETER**
Nama Mahasiswa	: Dwi Herinanto
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1427031002
Jurusan / Program Studi	: Matematika / Magister Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Ir. Warsono, M.S., Ph.D.	**Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.**
NIP 19630216 198703 1 003	NIP 19570101 198404 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Ir. Warsono, M.S., Ph.D.** ....

Sekretaris : **Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

3. Direktur Program Pascasarjana

Prof. Dr. Sudjarwo, M.S.
NIP 19530528 198103 1 002

Tanggal Lulus Ujian Tesis : **22 Juli 2016**

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan dengan sebenarnya bahwa:

1. Tesis yang berjudul "Varian, Kumulan, Momen, dan Fungsi Karakteristik Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter" adalah karya saya sendiri dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan atas karya penulis lain dengan cara yang tidak sesuai dengan tata etika ilmiah yang berlaku dalam masyarakat akademik atau yang disebut plagiarisme,
2. Hak intelektual atas karya ilmiah ini diserahkan sepenuhnya kepada Universitas Lampung.

Atas pernyataan ini, apabila dikemudian hari ternyata ditemukan adanya ketidakbenaran, saya bersedia menanggung akibat dan sanksi yang diberikan kepada saya, saya bersedia dan sanggup dituntut sesuai dengan hukum yang berlaku.

Bandarlampung, 22 Juli 2016

Pembuat Pernyataan

Dwi Herinanto
NPM: 1427031002

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan disuatu kota kecil di wilayah Kabupaten Grobogan Provinsi Jawa Tengah pada tanggal 8 September 1965, anak kedua dari dua bersaudara pasangan Tuan Letda (Purn.) Edi Sutoto dan Nyonya Supatmi. Penulis dididik dan di-besarkan di lingkungan keluarga yang memeluk agama Kristen yang kuat. Sejak kecil, dari pendidikan TK-STM, penulis tinggal bersama Eyang Menasih dan Nenek Soekatji. Penulis menempuh jalur pendidikan di TK Kristen Desa Kaliceret (Jawa Tengah) tamat tahun 1971; SD Kristen Desa Kaliceret tamat tahun 1977; SMP Xaverius Kota Kedungjati tamat tahun 1981; STM Pembangunan Daerah di Kota Gubug tamat tahun 1984; memperoleh gelar Drs. (1990) Pendidikan Matematika S1 dari IKIP PGRI Yogyakarta; S.Si. (2002) MIPA jurusan Statistika S1 Universitas Terbuka; S.E. (2004) Fakultas Ekonomi jurusan Manajemen S1 Universitas Terbuka; semester akhir (2010) FISIP jurusan Administrasi Negara Universitas Terbuka (tidak diselesaikan); pernah menempuh Pendidikan Matematika S1 STKIP Muhammadiyah Pringsewu Lampung tahun 2002 semester akhir tahap penulisan skripsi (tidak diselesaikan).

Sejak tahun 1992, penulis bekerja sebagai guru matematika dengan status sebagai Guru Tetap Yayasan (GTY) di Yayasan Xaverius Tanjung Karang dan ditempatkan di unit kerja SMP Xaverius Pringsewu sampai tahun 2000.

Kemudian dari tahun 2000 sampai sekarang penulis bertugas di SMP Xaverius Pagelaran. Penulis telah mengikuti sertifikasi guru sejak tahun 2007 dengan nomor peserta 07120609400032 dan NUPTK 4240743645200003 serta nomor NRG 071639392001. Selain mengajar di SMP, penulis juga bertugas sebagai guru honor mengajar mata pelajaran matematika di SMA Xaverius Pagelaran dari tahun 1992-2002. Penulis juga pernah mengajar mata pelajaran matematika sebagai guru honor di SMK Santo Yosef Pringsewu pada tahun 1992-1996. Penulis juga aktif mendampingi siswa SMP dan SMA dalam bimbingan belajar les privat mata pelajaran matematika sejak tahun 1992-2010.

Penulis juga aktif sebagai mitra BPS untuk melakukan kegiatan sensus dan survei (SUSENAS, SUPAS, SAKERNAS, dan POTENSI DESA) serta pemetaan blok sensus sejak tahun 1999-2011. Selain kesibukan tersebut di atas, penulis juga aktif dan dipercaya oleh pihak UPBJJ UT Bandarlampung sebagai dosen tutor S1 PGSD sejak tahun 2004 hingga sekarang. Dan juga, sejak tahun 2011 penulis dipercaya menjabat sebagai wakil direktur CV. Samudera Karya Sejahtera. Penulis juga aktif di dunia politik praktis dan pada saat ini duduk sebagai Ketua BALITBANG merangkap Wakil Ketua, serta Sekretaris LPK DPD II Partai Golkar Kabupaten Pringsewu (2009-2015).

Penulis diterima sebagai mahasiswa Program Studi Magister Matematika Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Lampung melalui jalur tes atas biaya sendiri (mandiri) pada Bulan Agustus tahun 2014 .

MOTTO

(1) The measure of a Man is not when He falls but when He tries to rise up after the fall, (Nelson Mandela)

(2) Orang bijak selalu menambah ilmu (Amsal 1:5)

(3) Mgr. Martinus Dogma Situmorang pernah berkata,
"Fides per caritatem operator"
(Iman bekerja lewat kasih)

(4) The only thing we have to fear is fear itself (Franklin D. Roosevelt)

Dengan penuh rasa syukur dan terima kasih kepada Tuhan Yesus Kristus, tesis ini dipersembahkan dengan penuh ketulusan hati kepada:

1. Istriku yang tercinta, terkasih, dan tersayang yang selalu sabar, mendampingi dan mendoakan, Ny. Yasinta Dwi Indriyani Herinanto, S.E., S.Pd.
2. Putriku yang terkasih dan tersayang yang selalu dengan tekun mendoakan, Bernadhita Herindri Samodera Utami, S.Si., S.Pd., yang saat ini sedang menempuh Program Pascasarjana Magister Matematika Universitas Gadjah Mada Yogyakarta, semoga dapat memberikan inspirasi, afirmasi, dan motivasi dalam belajar,
3. Putraku yang terkasih dan tersayang yang selalu dengan tekun mendoakan, Andreas Herindria Statistika Prapaska, yang saat ini sedang duduk di kelas X SMAN 1 Pringsewu, semoga dapat memberikan inspirasi, afirmasi, dan motivasi dalam belajar,
4. Ayahanda tercinta Tuan Letda (Purn.) Edi Sutoto,
5. Ibunda tercinta Ny. Supatmi,
6. Teman-teman seperjuangan Devri Saputra dan Reni Permata Sari,
7. Seluruh Bapak/Ibu dosen dan karyawan,
8. Bapak Paulus Santoso, S.Si. dan Ibu Ir. Herum Fajarwati, M.M. yang telah memberi motivasi dan bantuan dana untuk biaya kuliah S2 Matematika,
9. Almamaterku tercinta Universitas Lampung

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala berkat, kasih dan kemurahan-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul:

“**VARIAN, KUMULAN, MOMEN, DAN FUNGSI KARAKTERISTIK DISTRIBUSI *GENERALIZED PARETO* 3-PARAMETER**”

Dalam proses penyelesaian tugas akhir Tesis ini, banyak pihak yang telah membantu dalam memberikan ide, bimbingan, motivasi serta kritik atau saran kepada penulis. Penulis menyampaikan terima kasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. Bapak Ir. Warsono, M.S., Ph.D. selaku dosen pembimbing pertama yang telah memberikan waktu di sela-sela tugas dan kesibukannya yang dengan penuh kesabaran memberikan bimbingan, ide, saran, perhatian dan arahan kepada penulis sehingga tesis ini dapat terselesaikan dengan baik.
2. Bapak Drs. Mustofa Usman, M.A. Ph.D. selaku dosen pembimbing kedua yang senantiasa dengan penuh ketulusan dan kesabaran memberikan nasehat, bimbingan, dan pengarahan sehingga tesis ini dapat terselesaikan dengan baik.
3. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku pembahas yang telah memberikan banyak saran, masukan, dan pengarahan demi sempurnanya tesis ini.
4. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc. yang telah banyak berdiskusi dan memberikan sumbangan pemikiran dan masukan dalam penyelesaian tesis ini.
5. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si. yang telah banyak berdiskusi dan memberikan sumbangan pemikiran bagi penulis dalam penyelesaian tesis ini.
6. Bapak Amanto, S.Si., M.Si yang telah banyak berdiskusi dan memberikan sumbangan pemikiran yang sangat cemerlang bagi penulis dalam penyelesaian tesis ini.

7. Bapak Tiryono Ruby, Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA.
8. Bapak Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D. selaku Dekan FMIPA.
9. Direktur CV. Samudera Karya Sejahtera, yang telah memberi ijin dan kesempatan yang sangat berharga kepada penulis untuk melanjutkan kuliah pada program pascasarjana Magister Matematika Universitas Lampung,
10. Seluruh dosen, karyawan, staf TU, *security*, dan *office boy* Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
11. Seluruh staf dan karyawan Perpustakaan Jurusan Matematika, Perpustakaan FMIPA, serta Perpustakaan Universitas Lampung.
12. Eyang Menasih dan Nenek Soekatji tercinta yang telah membesarkan penulis dan membiayai pendidikan dari TK-STM.

Semoga Tuhan Yang Maha Kuasa senantiasa memberikan berkat yang berlimpah dan membalas semua kebaikan yang telah diberikan kepada penulis. Kami tutup dengan sebuah pepatah, “Tak ada gading yang tak retak sebab kalau tak retak bukanlah gading”, tidak ada makhluk yang sempurna, begitu pun dengan penulis. Oleh karenanya saran dan kritik yang konstruktif sangat penulis harapkan. Kami akhiri dengan kata bijak LAO-TZU, “Perjalanan sejauh ribuan mill dimulai dengan satu langkah”. Akhirnya, semoga tesis ini berguna bagi para pembaca. Berkat Tuhan bagi kita semua. Syalom. Amin.

Bandar Lampung, 22 Juli 2016

Penulis

Dwi Herinanto

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

I. PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter adalah bentuk umum dari distribusi peluang *Pareto*. Distribusi *Pareto* merupakan salah satu keluarga distribusi peluang kontinu yang biasa digunakan dalam menggambarkan berbagai fenomena sosial (menghitung dan menggambarkan secara lebih sederhana pendapatan setiap individu dalam suatu masyarakat), saintifik (menghitung tinggi gelombang air laut dan analisis curah hujan), geofisika, teknik sipil (menghitung kekuatan dan lamanya pemakaian bangunan) dan aktuaria (menghitung klaim asuransi). Distribusi *Pareto* menurut Nasution dan Rambe (1984) memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\theta+1} & , \theta > 0, x_0 > 0, x > x_0 \ ; \\ 0 & , \quad selainnya. \end{cases}$$

Distribusi *Pareto* ditemukan oleh Vilfredo Pareto, seorang ahli sosiologi, ekonomi, dan teknik sipil berkebangsaan Italia. Pareto menggunakan sifat distribusi ini untuk menghitung dan menggambarkan secara lebih sederhana pendapatan (kekayaan) setiap individu dalam suatu masyarakat.

Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter memiliki fungsi kepadatan peluang

$$f(x;\theta,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\left(1 + \frac{\theta(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-\left(\frac{1}{\theta}\right)-1} \quad ,untuk\ \theta \neq 0$$

$$f(x;\theta,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\ \exp\left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right), untuk\ \theta = 0$$

μ merupakan parameter lokasi, σ parameter skala, θ parameter bentuk dengan $x \geq \mu$ untuk $\theta \geq 0$ dan $\mu \leq x \leq \mu - \frac{\sigma}{\theta}$ untuk $\theta < 0$ (Muraleedharan dan Soares, 2014).

Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter diperkenalkan pertama kali oleh Pikands pada tahun 1975 dengan melakukan transformasi peubah acak Distribusi *Pareto* (Jocković, 2012). Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter merupakan distribusi peubah acak kontinu yang juga mempunyai karakteristik populasi. Bentuk suatu distribusi probabilitas dapat ditentukan dengan mengkaji fungsi pembangkit momen, varian, kumulan/semi invarian, dan fungsi karakteristik dari Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter.

Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter sudah pernah dibahas oleh beberapa peneliti sebelumnya, di antaranya Rossa H. dan A. R. Effendie pada tahun 2006 yaitu dalam jurnalnya yang berjudul "*Estimasi Value-at-Risk dengan Pendekatan Extreme Value Theory Generalized Pareto Distribution (Studi Kasus IHSG 1997-2004)*". Pada tahun 2009, V. P. Singh dan H. Guo juga pernah melakukan penelitian dalam sebuah jurnal yang berjudul "*Parameter Estimation for 3 Parameters Generalized Pareto Distribution by Principle of Maximum Entropy (POME)*". P. Ruckdeschel dan N. Horbenko pada tahun 2010 pernah melakukan penelitian dalam suatu jurnal berjudul "*Robustness Properties of Estimators in Generalized Pareto Models*". Selanjutnya pada tahun 2012, Jelena Jockovic juga pernah melakukan penelitian yang dimuat dalam suatu jurnal yang berjudul "*Quantile Estimation for The Generalized Pareto Distribution with Application to Finance*".

Dari keempat peneliti tersebut di atas, semuanya melakukan pengkajian hanya sebatas pada ruang lingkup mengenai pendugaan/estimasi parameter dari Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter. Karakteristik suatu distribusi probabilitas yaitu varian, kumulan, momen, dan fungsi karakteristik dari Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter masih langka dan jarang dikaji oleh peneliti. Hal inilah yang mendorong penulis untuk melakukan penelitian mengenai Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter meliputi varian, kumulan, momen, dan fungsi karakteristik. Fungsi karakteristik sangat bermanfaat bagi pengembangan ilmu statistika khususnya dalam menghitung kumulan/semi invarian.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah tersebut di atas, maka yang menjadi permasalahan dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana varian dari Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter?
2. Bagaimana kumulan pertama, kedua, ketiga, dan keempat dari Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter?

3. Bagaimana momen pertama, kedua, ketiga, dan keempat dari Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter?
4. Bagaimana fungsi karakteristik yang dimiliki oleh Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter?

C. Batasan Masalah

Dalam penelitian tentang Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter hanya membahas dan membatasi pada:

1. Bentuk fungsi kepadatan peluang Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter

$$f(x;\theta,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\left(1 + \frac{\theta(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-\left(\frac{1}{\theta}\right)-1}$$

   dengan $\mu \leq x \leq \mu - \frac{\sigma}{\theta}$ untuk $\theta < 0$.

2. Selain itu, dalam penelitian ini penulis hanya membatasi pada pencarian varian, kumulan pertama hingga keempat, momen pertama hingga keempat serta momen ke-*k*, dan fungsi karakteristik beserta bentuk umum fungsi karakteristik dari Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter.

D. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dilakukannya penelitian ini antara lain:

1. Menentukan varian Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter.
2. Menentukan kumulan/semi invarian pertama hingga keempat Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter.

3. Menentukan momen pertama hingga keempat serta momen ke-*k* Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter.
4. Menentukan fungsi karakteristik beserta bentuk umum fungsi karakteristik yang dimiliki Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter.

E. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan bermanfaat untuk:

1. Memberikan sumbangan pemikiran dan cakrawala berpikir bagi peneliti lain dalam pengembangan ilmu statistika dan matematika.
2. Memberikan kontribusi mengenai cara menentukan varian, semi invarian (kumulan) pertama hingga keempat, momen pertama hingga keempat serta momen ke-*k*, dan fungsi karakteristik beserta bentuk umum fungsi karakteristik ke-*k* dari Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam proses penelitian untuk mengkaji varian, kumulan, momen, dan fungsi karakteristik Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter, penulis menggunakan definisi, teorema, dan konsep dasar yang berkaitan dengan Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter sebagai berikut:

A. Peubah Acak

Berikut ini akan diberikan definisi tentang peubah acak yang diambil dari Sahoo (2008):

Misalkan E suatu kejadian dan S adalah ruang sampelnya. Suatu fungsi X (ditulis dengan huruf kapital) yang memetakan setiap elemen x di S pada bilangan real, disebut suatu peubah acak. Ada dua macam peubah acak, yaitu peubah acak diskrit dan peubah acak kontinu. Jika nilai yang mungkin dari peubah acak X yaitu himpunan hasil pemetaan adalah R_x, terhingga atau tak hingga tetapi *countable*, maka X disebut suatu peubah acak diskrit. Jika diberikan ruang sampel Ω. Fungsi X dari Ω ke himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ disebut peubah acak kontinu jika $X(\Omega)$ merupakan interval. Selanjutnya $X(\Omega)$ disebut ruang dari peubah acak X dan dinotasikan dengan $\mathcal{A}$.

Berikut ini definisi mengenai fungsi distribusi kumulatif dan fungsi kepadatan peluang yang diambil dari Sahoo (2008):

Diberikan peubah acak kontinu *X* dengan fungsi kepadatan peluangnya adalah *f*. Fungsi $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ yang didefinisikan sebagai

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ disebut fungsi distribusi kumulatif peubah acak kontinu *X*.

Diberikan peubah acak *X* dengan ruang dari *X* adalah $\mathcal{A}$. Fungsi $f: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ disebut fungsi kepadatan peluang (fkp) dari *X* jika *f* mempunyai sifat :

i. $f(x) \geq 0$, untuk setiap $x \in \mathcal{A}$

ii. $\int_{\Omega} f(x)dx = 1$

Berikut ini diberikan definisi mengenai nilai harapan dan varians yang diambil dari Hogg dan Tanis (1977):

Diberikan peubah acak kontinu *X* dengan *f* sebagai fungsi kepadatan peluangnya. Jika *u* merupakan fungsi dari *X* dengan rumus *u(x)*, nilai harapan (*expected value*) dari *u(x)*, dinotasikan dengan $E[u(x)]$ didefinisikan sebagai:

$$E[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot f(x)dx$$

(jika nilai integral tersebut ada).

Jika $u(x) = x$, maka $E[u(x)] = E(X)$ disebut mean dari *X*.

Diberikan peubah acak kontinu *X* dengan *f* sebagai fungsi kepadatan peluangnya. Varians dari *X* dinotasikan dengan *Var (X)* didefinisikan sebagai:

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

Varians digunakan untuk mengukur variabilitas suatu distribusi peluang.

Selanjutnya akan diberikan beberapa teorema tentang varians yang diambil dari Hogg dan Tanis (1977) sebagai berikut:

Teorema 2.1

Jika X adalah peubah acak kontinu dengan f sebagai fungsi kepadatan peluangnya, maka berlaku

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Bukti:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2) \\ &= E(X^2) - 2(E(X)E(X)) + (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - 2\left(E(X)\right)^2 + (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

■

Teorema 2.2

Jika X suatu peubah acak dan c suatu konstanta maka

$$Var(X + c) = Var(X)$$

Bukti:

$$Var(X) = E((X + c)^2) - \left(E(X + c)\right)^2$$

$$= E(X^2 + 2cX + c^2) - \left(E(X + c)\right)^2$$

$$= E(X^2) + E(2cX) + E(c^2) - \left(E(X)\right)^2 - 2cE(X) - c^2$$

$$= E(X^2) + 2cE(X) + c^2 - \left(E(X)\right)^2 - 2cE(X) - c^2$$

$$= E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= Var(X) \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.3

Jika X suatu peubah acak dan c suatu konstanta maka

$$Var(cX) = c^2 Var(X)$$

Bukti:

$$Var(cX) = E((cX)^2) - \left(E(cX)\right)^2$$

$$= E(c^2X^2) - \left(E(cX)\right)^2$$

$$= c^2E(X^2) - \left(cE(X)\right)^2$$

$$= c^2E(X)^2 - c^2\left(E(X)\right)^2$$

$$= c^2\left[E(X^2) - \left(E(X)\right)^2\right]$$

$$= c^2Var(X) \qquad \blacksquare$$

B. Momen suatu peubah acak

Fungsi pembangkit momen (*Moment Generating Function*) dari peubah acak mempunyai beberapa kegunaan antara lain untuk menentukan fungsi kepadatan peluang, mean, momen ke-*k* dari suatu distribusi dan untuk mencari bentuk distribusi peubah acak. Berikut ini diberikan definisi mengenai fungsi pembangkit momen yang diambil dari Hogg dan Craig (1978):

Jika X merupakan peubah acak, maka fungsi pembangkit momen $M_x(t)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

apabila $E(e^{tx})$ ada dan $-h < t < h$ untuk suatu $h > 0$.

Berdasarkan definisi dari nilai harapan matematis, maka dapat dilihat bahwa

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum e^{tx} \cdot f(x)$$

Jika X peubah acak diskrit.

Diberikan peubah acak kontinu X dengan fungsi kepadatan peluang adalah $f(x)$. Fungsi pembangkit momen (*moment-generating function*) dari X dinotasikan dengan $M_x(t)$ dan didefinisikan

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x)\, dx$$

Berikut ini beberapa teorema mengenai fungsi pembangkit momen yang diambil dari Hogg dan Craig (1978):

Teorema 2.4

Jika $M_x(t)$ merupakan fungsi pembangkit momen dari peubah acak kontinu X, maka

$$M'_x(0) = \frac{d}{dt} M_x(0) = E(X)$$

Bukti:

Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x)\, dx$$

diperoleh

$$M_x'(t) = \frac{d}{dt} M_x(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{tx} \cdot f(x)\, dx$$

Akibatnya

$$M_x'(0) = \frac{d}{dt} M_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{0 \cdot x} \cdot f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = E(X)$$

■

Teorema 2.5

Jika $M_x(t)$ merupakan fungsi pembangkit momen dari peubah acak kontinu X, maka

$$M_x''(0) - (M_x'(0))^2 = Var(X)$$

Bukti:

Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen

$$M_x''(t) = \frac{d^2}{dt^2} M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{tx} \cdot f(x)\, dx$$

diperoleh

$$M_x''(0) = \frac{d^2}{dt^2} M_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{0 \cdot x} \cdot f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx = E(X^2)$$

Akibatnya,

$$M_x''(0) - (M_x'(0))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = Var(X)$$

■

Teorema 2.6

Jika $M_x(t)$ merupakan fungsi pembangkit momen dari peubah acak kontinu X, maka

$$M_x^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dt^k} M_x(0) = E(X^k)$$

$E(X^k)$ disebut momen ke-*k* dari peubah acak X.

Bukti:

Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen

$$M_x^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot e^{tx} \cdot f(x)\, dx$$

Akibatnya,

$$M_x^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dt^k} M_x(0)$$

$$M_x^{(k)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot e^{0x} \cdot f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)\, dx$$

$$= E(X^k)$$

■

Teorema 2.8 (Blum dan Rosenblatt, 1972)

Suatu himpunan terhingga vektor random, yakni mempunyai fungsi pembangkit momen bersama, dikatakan independen jika dan hanya jika fungsi pembangkit momen bersama itu dapat ditulis sebagai hasil kali masing-masing fungsi pembangkit momennya.

Bukti:

Misalkan vektor random $\boldsymbol{X}' = (X_1, X_2, \cdots, X_m)$ dan $\boldsymbol{Y}' = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ mempunyai fungsi pembangkit momen bersama $M_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}(t_1, t_2, \cdots, t_m, u_1, u_2, \cdots, u_m) = E(e^{t_1X_1+t_2X_2+\cdots+t_mX_m+u_1Y_1+u_2Y_2+\cdots+u_nY_n})$. Jika vektor random $\boldsymbol{X}$ dan $\boldsymbol{Y}$ independen maka variabel random $exp(t_1X_1 + t_2X_2 + \cdots + t_mX_m)$ dan $exp(u_1Y_1 + u_2Y_2 + \cdots + u_nY_n)$ independen untuk semua himpunan bilangan $t_1, t_2, \cdots, t_m, u_1, u_2, \cdots, u_m$ maka

$$E\big(exp(t_1X_1 + t_2X_2 + \cdots + t_mX_m + u_1Y_1 + u_2Y_2 + \cdots + u_nY_n)\big)$$

$$= E\big(exp(t_1X_1 + t_2X_2 + \cdots + t_mX_m) \cdot exp(u_1Y_1 + u_2Y_2 + \cdots + u_nY_n)\big)$$

$$= E\big(exp(t_1X_1 + t_2X_2 + \cdots + t_mX_m)\big)E\big(exp(u_1Y_1 + u_2Y_2 + \cdots + u_nY_n)\big)$$

$$= M_{\boldsymbol{X}}(t_1, t_2, \cdots, t_m) \cdot M_{\boldsymbol{Y}}(u_1, u_2, \cdots, u_n) \qquad \blacksquare$$

Sebaliknya jika fungsi pembangkit momen bersama $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ merupakan hasil kali fungsi pembangkit momen masing-masing, maka kedua vektor itu independen.

C. Fungsi Karakteristik

Teorema Limit Pusat memberikan distribusi pendekatan untuk mean sampel apabila ukuran sampelnya besar, apapun bentuk distribusi populasinya asalkan itu diketahui. Maka distribusi mean sampel atau statistik-statistik yang lain dapat juga ditentukan. Konsep yang sangat bermanfaat dalam menentukan distribusi atau distribusi limit statistik suatu sampel adalah fungsi karakteristik yang didefinisikan oleh Kendall dan Stuart (1968) sebagai berikut:

Fungsi karakteristik suatu peubah acak X didefinisikan sebagai

$$\phi_x(t) = E\left(e^{itx}\right)$$

dengan $= \sqrt{-1}$.

Keistimewaan dari fungsi karakteristik dibandingkan dengan fungsi pembangkit momen adalah setiap peubah acak mempunyai fungsi karakteristik, tetapi tidak setiap peubah acak memiliki fungsi pembangkit momen karena

$$|\phi_x(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot f(x)dx \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{itx}\right| \cdot f(x)dx$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Lukacs (1970) menuliskan beberapa teorema tentang sifat-sifat yang harus dipenuhi oleh setiap fungsi karakteristik, salah satu teorema tersebut adalah sebagai berikut:

Teorema 2.9

Misalkan $F(x)$ adalah suatu distribusi dengan fungsi karakteristik $\phi_x(t) = E(e^{itx})$, maka

i. $\phi_x(0) = 1$

ii. $|\phi_x(t)| \leq 1$

iii. $\phi_x(-t) = \overline{\phi_x(t)}$ dengan $\overline{\phi_x(t)}$ adalah sekawan dari fungsi karakteristik $\phi_x(t)$

Berikut ini teorema mengenai fungsi karakteristik yang diambil dari Kendall dan Stuart (1968):

Teorema 2.10

Jika peubah acak *X* mempunyai nilai harapan ke-*k* (X^k) , *k=1,2,…,n* maka fungsi karakteristiknya bisa didiferensialkan sampai ke-*n* kali dengan $k \leq n$,

$$\phi_x^{(k)}(0) = i^k \cdot E(X^k)$$

Bukti:

Berdasarkan definisi fungsi karakteristik

$$\phi_x^{(k)}(t) = i^k \int x^k e^{itx} f(x)dx$$

$$\phi_x^{(k)}(t) \leq i^k \int |x|^k e^{itx} f(x)dx$$

Jadi untuk $t = 0$

$$\phi_x^{(k)}(0) = i^k \int x^k e^{i(0)x} f(x)dx$$

$$= i^k \int x^k f(x)dx$$

$$= i^k \cdot E(X^k) \qquad \blacksquare$$

D. Kumulan/Semi Invarian

Berikut ini definisi mengenai kumulan/semi invarian yang diambil dari Kendall dan Stuart (1968):

Kumulan (semi invarian) orde k dari suatu peubah acak X dengan fungsi karakteristik $\phi_x(t)$ didefinisikan sebagai:

$$K_k = i^k \frac{d^k}{dt^k}(\ln \phi_x(0))$$

Kumulan digunakan untuk menghitung *skewness* distribusi data terutama kumulan pertama hingga keempat sehingga diperoleh sifat-sifat kumulan menurut Gnedenko dan Ushakov (1995) sebagai berikut:

1) $K_1 = i^1 \frac{d}{dt}(\ln \phi_x(0)) = -E(X)$
2) $K_2 = i^2 \frac{d^2}{dt^2}(\ln \phi_x(0)) = E(X^2) - (E(X))^2 = Var(X)$
3) $K_3 = i^3 \frac{d^3}{dt^3}(\ln \phi_x(0)) = -[E(X^3) - 3E(X^2) \cdot E(X) + 2(E(X))^3]$
4) $K_4 = i^4 \frac{d^4}{dt^4}(\ln \phi_x(0)) = E(X^4) - 4E(X^3) \cdot E(X) - 3\left(E(X^2)\right)^2 +$

   $12E(X^2)(E(X))^2 - 6(E(X))^4$

E. Distribusi Pareto

Vilfredo Pareto (15 Juli 1848-19 Agustus 1923), seorang pakar ekonomi dan sosiolog abad 19 berkebangsaan Italia, menemukan sebuah fakta bahwa dari 80% tanah di Italia hanya dimiliki oleh 20% penduduk saja. Dari fakta unik tersebut lahirlah Hukum Pareto (*Pareto's law*) yang menyatakan bahwa 20% usaha akan memberi hasil yang sebesar 80%. Oleh karena itu, hukum ini dikenal juga sebagai hukum 20/80 atau *law of the few* (Pu dan Pan, 2013).

Vilfredo Pareto berkontribusi dalam menjelaskan distribusi pendapatan dan pilihan individu melalui pendekatan matematis yang berdasarkan atas teori ekonomi. Untuk menggambarkan fenomena ini, diperkenalkan suatu distribusi peluang yang disebut dengan Distribusi *Pareto* menurut Nasution dan Rambe (1984) sebagai berikut:

Misal suatu peubah acak *X* berdistribusi *Pareto* maka fungsi distribusi kumulatifnya dinyatakan sebagai berikut:

$$F_x(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\theta} & , x \geq x_0 \\ 0 & , x < x_0 \end{cases}$$

Misal suatu peubah acak *X* berdistribusi *Pareto* maka fungsi kepadatan peluangnya dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\theta+1} & , \theta > 0, x_0 > 0, x > x_0 \\ 0 & , \quad selainnya \end{cases}$$

Akan ditunjukkan bahwa *f(x)* merupakan fungsi peluang.

Bukti:

$$f(x) = \lim_{b\to\infty} \int_{x_0}^{b} \frac{\theta}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\theta+1} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{\theta}{x_0} \cdot x_0^{\theta+1} \int_{x_0}^{b} \left(\frac{1}{x}\right)^{\theta+1} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \theta x_0^{\theta} \int_{x_0}^{b} (x)^{-(\theta+1)} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \theta \cdot x_0^{\theta} \cdot \frac{1}{-(\theta+1)+1} (x)^{-(\theta+1)+1} \Big]_{x_0}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \theta \cdot x_0^{\theta} \cdot \frac{1}{-\theta} (x)^{-\theta} \Big]_{x_0}^{b}$$

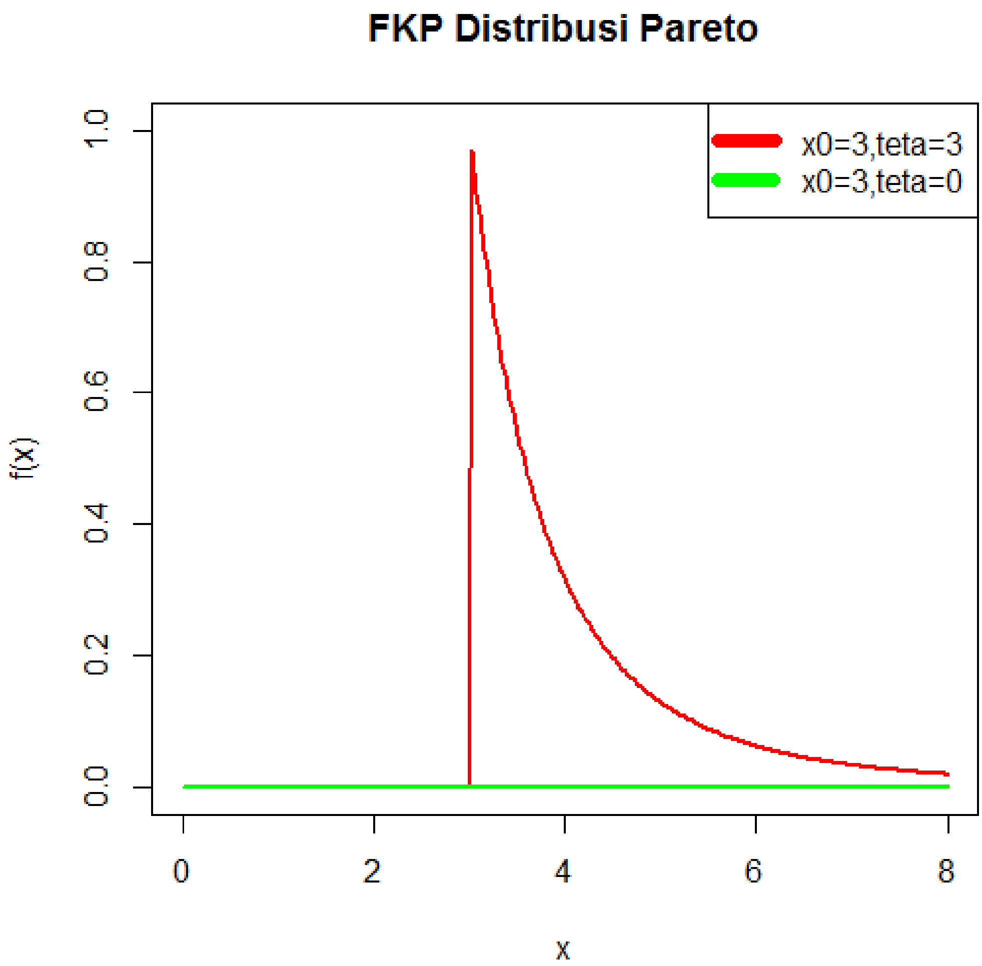
$$= \lim_{b\to\infty} - x_0^{\theta} \cdot \frac{1}{(x)^{\theta}} \Big]_{x_0}^{b}$$

$$= \left(-x_0^{\theta} \cdot 0\right) - \left(-x_0^{\theta} \cdot \frac{1}{(x_0)^{\theta}}\right)$$

$$= \left(0 - (-1)\right)$$

$$= 1 \qquad \blacksquare$$

Berikut ini grafik fungsi kepadatan peluang Distribusi Pareto:



Gambar 2.1. Grafik fungsi kepadatan peluang Distribusi Pareto

Dapat dilihat pada gambar bahwa grafik berwarna merah menyatakan parameter lokasi $x_0 = 3$ dan parameter bentuk $\theta = 3$ sedangkan grafik berwarna hijau menyatakan parameter lokasi $x_0 = 3$ dan parameter bentuk $\theta = 0$. Sesungguhnya pada grafik berwarna merah, $f(x)$ bernilai 0 dari $x = 0$ sampai dengan $x = 3$ kemudian menjadi garis vertikal dan menurun seperti grafik fungsi logaritma. Sedangkan grafik hijau menyatakan bahwa grafik fungsi kepadatan peluang akan bernilai 0 konstan saat parameter bentuk θ bernilai 0.

F. Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter

Dalam statistika, Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter merupakan keluarga distribusi peluang kontinu. Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter mempunyai tiga parameter yaitu parameter lokasi (μ), parameter skala (σ) dan parameter bentuk (θ). Tetapi seringkali hanya dilihat dari parameter skala dan parameter bentuknya (Ruckdeschel dan Horbenko, 2010).

Fungsi distribusi kumulatif standar didefinisikan sebagai berikut:

$$F(z) = \begin{cases} 1-(1+\theta z)^{-\left(\frac{1}{\theta}\right)} & ,untuk\ \theta \neq 0 \\ 1-e^{-z} & ,untuk\ \theta = 0 \end{cases}$$

dengan $z \geq 0$ untuk $\theta \geq 0$. Sehingga fungsi kepadatan peluang (fkp) Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter adalah sebagai berikut:

$$f(z) = \begin{cases} (\theta z+1)^{-\left(\frac{\theta+1}{\theta}\right)} & ,untuk\ \theta \neq 0 \\ e^{-z} & ,untuk\ \theta = 0 \end{cases}$$

Hubungan antara parameter lokasi dan skala parameter skala dari suatu distribusi diperoleh dari menggantikan nilai z dengan $\frac{x-\mu}{\sigma}$ sehingga fungsi distribusi kumulatif Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter menurut (Singh dan Guo, 2009) didefinisikan sebagai berikut:

Fungsi distribusi kumulatif dari Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter adalah

$$F_{(\theta,\mu,\sigma)}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \dfrac{\theta(x-\mu)}{\sigma})^{-\left(\frac{1}{\theta}\right)} & , untuk\ \theta \neq 0 \\ 1 - e^{-\left(\frac{\theta(x-\mu)}{\sigma}\right)} & , untuk\ \theta = 0 \end{cases}$$

untuk $x \geq \mu$ untuk $\theta \geq 0$ dengan $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, \theta \in \mathbb{R}$.

Muraleedharan dan Soares (2014) mendefinisikan fungsi kepadatan peluang Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter sebagai berikut:

$$f(x;\theta,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\left(1 + \frac{\theta(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-\left(\frac{1}{\theta}\right)-1} \quad , untuk\ \theta \neq 0$$

$$f(x;\theta,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\ \exp\left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right), untuk\ \theta = 0$$

μ merupakan parameter lokasi, σ parameter skala, θ parameter bentuk dengan $x \geq \mu$ untuk $\theta \geq 0$ dan $\mu \leq x \leq \mu - \frac{\sigma}{\theta}$ untuk $\theta < 0$.

III. METODOLOGI PENELITIAN

A. Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil (III) tahun akademik 2015/2016, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

B. Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membuktikan Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter suatu fungsi kepadatan peluang.
2. Menentukan varian dari Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter dengan menggunakan definisi.
3. Menentukan kumulan/semi invarian pertama hingga keempat Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter dengan menggunakan turunan pertama hingga keempat dari logaritma natural fungsi karakteristiknya.
4. Menentukan momen pertama hingga keempat dan mencari momen ke-*k* Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter dengan menggunakan fungsi pembangkit momen.

5. Menentukan fungsi karakteristik dan bentuk umum fungsi karakteristik Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan uraian hasil analisis yang telah dibahas, maka diperoleh kesimpulan bahwa Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter yang memiliki fungsi kepadatan peluang

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\left(1 + \frac{\theta(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-\left(\frac{1}{\theta}\right)-1}$$

dengan $\mu \leq x \leq \mu - \frac{\sigma}{\theta}$ untuk $\theta < 0$, memiliki varian, kumulan/semi invarian, momen, dan fungsi karakteristik sebagai berikut:

1. Varian Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter

$$Var(x) = \frac{\sigma^2}{(1-\theta)^2(1-2\theta)}$$

2. Kumulan/semi invarian Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter

   a. Kumulan pertama/semi invarian pertama

$$K_1 = -\left(\mu + \frac{\sigma}{(1-\theta)}\right)$$

   b. Kumulan kedua/semi invarian kedua

$$K_2 = \frac{\sigma^2}{(1-\theta)^2(1-2\theta)}$$

   c. Kumulan ketiga/semi invarian ketiga

$$K_3 = -\left(\frac{6\sigma^3}{(1-\theta)(1-2\theta)(1-3\theta)} - \frac{6\sigma^3}{(1-\theta)^2(1-2\theta)} + \frac{2\sigma^3}{(1-\theta)^3}\right)$$

d. Kumulan keempat/semi invarian keempat

$$K_4 = \frac{24\sigma^4}{(1-\theta)(1-2\theta)(1-3\theta)(1-4\theta)} - \frac{24\sigma^4}{(1-\theta)^2(1-2\theta)(1-3\theta)}$$
$$+ \frac{24\sigma^4}{(1-\theta)^3(1-2\theta)} - \frac{12\sigma^4}{(1-\theta)^2(1-2\theta)^2} - \frac{6\sigma^4}{(1-\theta)^4}$$

3. Sifat-sifat yang dimiliki kumulan/semi invarian pertama hingga keempat adalah sebagai berikut:

$$K_1 = -E(X)$$

$$K_2 = Var(X)$$

$$K_3 = -\left\{E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 2\big(E(X)\big)^3\right\}$$

$$K_4 = E(X^4) - 4E(X^3)E(X) - 3\big(E(X^2)\big)^2 + 12E(X^2)\big(E(X)\big)^2 - 6\big(E(X)\big)^4$$

4. Momen Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter:

a. Momen pertama

$$E(X) = \mu + \frac{\sigma}{(1-\theta)}$$

b. Momen kedua

$$E(X^2) = \mu^2 + \frac{2\mu\sigma}{(1-\theta)} + \frac{2\sigma^2}{(1-\theta)(1-2\theta)}$$

c. Momen ketiga

$$E(X^3) = \mu^3 + \frac{3\mu^2\sigma}{(1-\theta)} + \frac{6\mu\sigma^2}{(1-\theta)(1-2\theta)} + \frac{6\sigma^3}{(1-\theta)(1-2\theta)(1-3\theta)}$$

d. Momen keempat

$$E(X^4) = \mu^4 + \frac{4\mu^3\sigma}{(1-\theta)} + \frac{12\mu^2\sigma^2}{(1-\theta)(1-2\theta)} + \frac{24\mu\sigma^3}{(1-\theta)(1-2\theta)(1-3\theta)} + \frac{24\sigma^4}{(1-\theta)(1-2\theta)(1-3\theta)(1-4\theta)}$$

e. Momen ke-k

$$E\left(X^k\right) = \mu^k + \frac{k\mu^{k-1}\sigma}{(1-\theta)} + \frac{k(k-1)\mu^{k-2}\sigma^2}{(1-\theta)(1-2\theta)} + \frac{k(k-1)(k-2)\mu^{k-3}\sigma^3}{(1-\theta)(1-2\theta)(1-3\theta)}$$

$$+ \cdots + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\mu\sigma^{k-1}}{(1-\theta)(1-2\theta)\cdots(1-(k-1)\theta)}$$

$$+ \frac{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\mu^{k-k}\sigma^k}{(1-\theta)(1-2\theta)\cdots(1-k\theta)}$$

5. Fungsi Karakteristik Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter

$$\phi_x(t) = e^{it\mu}\sum_{j=0}^{n}\frac{(\sigma it)^j}{\prod_{k=0}^{j}(1-k\theta)}$$

B. Saran

Pada penelitian ini penulis melakukan kajian dengan membatasi fungsi kepadatan peluang Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter untuk $\mu \le x \le \mu - \frac{\sigma}{\theta}$ saat $\theta < 0$, bentuk suatu distribusi probabilitas yang meliputi fungsi pembangkit momen, momen, varian, kumulan/semi invarian, dan fungsi karakteristik dari Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter. Oleh karena itu, penelitian ini masih dapat dilanjutkan dengan mengkaji:

1. Fungsi pembangkit kumulan dan fungsi karakteristik Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter menggunakan metode lainnya, misalnya metode ekspansi trigonometri,
2. *Skewness* dan kurtosis Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter,
3. Fungsi kepadatan peluang Distribusi *Generalized Pareto* 3-Parameter dengan $x \ge \mu$ untuk $\theta \ge 0$.

DAFTAR PUSTAKA

Blum, J.R. dan Rosenblatt, J.I. 1972. *Probability an Statistics*. WB Saunders Coy, Philadelphia.

Ellis, S., Steyn, F., dan Venter, H. 2003. Fitting a Pareto-Normal-Pareto Distribution to The Residuals of Financial Data. *Computational Statistics*, 18, 477-491.

Gnedenko, B.V. dan Ushakov, I.A. 1995. *Probabilistic Reliability Engineering*. John Wiley & Sons, Inc. New York.

Hastaryta, R. dan Effendie, A.R. 2006. *Estimasi Value-at-Risk dengan Pendekatan Extreme Value Theory Generalized Pareto Distribution (Studi Kasus IHSG 1997-2004)*. Berkala MIPA Universitas Gadjah Mada.

Hogg, R.V. dan Tanis, E.A. 1977. *Probability and Statistical Inference*. Macmillan Publishing Co, New York.

Hogg, R.V. dan Craig, A.T. 1965. *Introduction to Mathematical Statistics Fifth Edition*. Prentice Hall Inc, New Jersey.

Hogg, R.V. dan Craig, A.T. 1978. *Introduction to Mathematical Statistics*. Macmillan Publishing Co, New York.

Jocković, J. 2012. Quantile Estimation for The Generalized Pareto Distribution with Application to Finance. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 22, 297-311.

Karian, Z.A. dan Dudewicz, E.J. 2000. *Fitting Statistical Distribution The Generalized Lambda Distribution and Generalized Bootstrap Method*. CRC Press, Florida.

Kendall, M.G. dan Stuart, A. 1968. *The Advanced Theory of Statistics.* Hafner Publishing Company, New York.

Lukacs, E. 1970. *Characteristic Functions*. Griffin, London.

Muraleedharan, G. dan Soares, C.G. 2014. Characteristic and Moment Generating Functions of Generalised Pareto (GP3) and Weibull Distributions. *Journal of Scientific Research and Reports*, 14, 1861-1874.

Nasoetion, A.H. dan Rambe, A. 1984. *Teori Statistika untuk Ilmu-Ilmu Kuantitatif*. Bhatara Karya Aksara, Jakarta.

Newman, M.E. 2006. *Power Laws, Pareto Distributions and Zipf's Law.* University of Michigan, U.S.A.

Pu, C. dan Pan, X. 2013. On The Actuarial Simulation of The general Pareto Distribution of Catastrophe Loss. *Lecture Notes in Electrical Engineering*, 242, 1153-1164.

Ruckdeschel, P. dan Horbenko, N. 2010. *Robustness Properties of Estimators in Generalized Pareto Models.* Fraunhofer ITWM, Germany.

Sahoo, P. 2008. *Probability and Mathematical Statistics.* University of Louisville, U.S.A.

Singh, V.P. dan Guo, H.. 2009. Parameter Estimation for 3 Parameter Generalized Pareto Distribution by The Principle of Maximum Entropy (POME). *Hydrological Sciences Journal*, 40, 165-181.