ANALISIS APROKSIMASI FUNGSI DENGAN METODE MINIMUM NORM PADA RUANG HILBERT C[a, b]
(STUDI KASUS : FUNGSI TRANSENDEN)

(Skripsi)

Oleh:

Tika Kristi

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2016

ABSTRAK

ANALISIS APROKSIMASI FUNGSI DENGAN METODE MINIMUM NORM PADA RUANG HILBERT C[a, b]
(STUDI KASUS : FUNGSI TRANSENDEN)

Oleh

TIKA KRISTI

Aproksimasi fungsi dalam proses komputasi sering digunakan hampir di semua bidang analisis numerik. Dua alasan utama penggunaan aproksimasi fungsi adalah untuk memberikan fungsi pendekatan yang efektif dan mendekati suatu fungsi yang rumit dengan fungsi yang lebih sederhana. Diberikan sebuah fungsi *f*, baik secara utuh ataupun hanya beberapa nilai di titik-titik tertentu saja, kita ingin memperoleh hampiran (aproksimasi) untuk *f* yang mempunyai bentuk tertentu (misalnya supaya lebih mudah dianalisis) dengan kesalahan yang dapat kita kontrol. Misalnya kita hendak menghitung $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$, kita hampiri integrannya dengan polinom (suku banyak) berderajat *n* (dengan *n* cukup besar). Masalah optimisasi khususnya aproksmasi fungsi terbaik yang tidak mendapatkan solusi terbaik (ralat yang besar) dalam ruang fisis atau yang dikenal sebagai ruang real , dapat dipecahkan dengan sistem matematis yang sederhana, dengan membawa masalah aproksimasi tersebut ke ruang abstrak (berisi aksioma-aksioma) atau ruang vektor, khususnya pada ruang Hilbert C[a,b]. Masalah tersebut dikenal sebagai masalah minimum norm dalam ruang Hilbert C[a,b]. Dengan menggunakan konsep minimum norm akan diperoleh kesalahan optimal (galat) yang minimum.

Kata kunci: *Aproksimasi, minimum norm, ruang Hilbert C[a,b], fungsi transenden, deret Maclaurin, kesalahan optimal.*

ANALISIS APROKSIMASI FUNGSI DENGAN METODE MINIMUM NORM PADA RUANG HILBERT C[a, b]
(STUDI KASUS : FUNGSI TRANSENDEN)

Oleh

TIKA KRISTI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2016

Judul Skripsi : **ANALISIS APROKSIMASI FUNGSI DENGAN METODE MINIMUM NORM PADA RUANG HILBERT C[a, b] (STUDI KASUS : FUNGSI TRANSENDEN)**

Nama Mahasiswa : Tika Kristi

Nomor Pokok Mahasiswa : 1217031069

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Amanto, S.Si., M.Si.	**Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**
NIP 19730314 200012 1 002	NIP 19760411 200012 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

Penguji : **Drs. Suharsono S., M.Sc., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **17 Oktober 2016**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Tika Kristi
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1217031069
Program Studi	: Matematika
Jurusan	: Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagai persyaratan penyelesaian studi pada Universitas lain atau Institut lain.

Bandar Lampung, 17 Oktober 2016
Yang Menyatakan

Tika Kristi
NPM.1217031069

PERSEMBAHAN

Karya kecil ini ku persembahkan untuk Tuhan Yang Maha Kuasa, yang menjadi kekuatan ketika putus asa. Untuk Mama tercinta yang selalu mengiringi langkah ku dengan ketulusan doa dan kasih sayang yang tiada hentinya. Dan untuk abang ku Asian dan Roberto, dan juga Kak Hevi yang selalu menjadi motivasi, serta untuk Sahabat-sahabat yang selalu menemani dan memberikan semangat tersendiri, dan dosen Pembimbing dan Penguji terimakasih atas bimbingan dan ajarannya.

MOTO:

"Tidak ada yang mustahil jika mau berusaha dan berdoa, semuanya akan indah pada waktunya"

"Selalu bersyukur dalam hal dan keadaan apapun, karena rasa syukur akan membuat merasa cukup dengan segala yang dimiliki atau yang telah diperoleh"

SANWANCANA

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan kasih karunia, anugerah, dan Berkat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan baik.

Skripsi yang berjudul “**Analisis Aproksimasi Fungsi Dengan Metode Minimum Norm Pada Ruang Hilbert C[a, b] (Studi Kasus : Fungsi Transenden)**” adalah salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana Matematika di Universitas Lampung.

Dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Amanto, S.Si., M.Si., selaku dosen Pembimbing Utama yang selalu membimbing penulis dalam penyelesaian skripsi dan selaku Pembimbing Akademik yang selalu membimbing penulis semasa kuliah sampai sekarang;
2. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku Pembimbing Kedua atas kesediaan memberikan bimbingan, kritik, dan saran dalam proses penyelesaian skripsi ini;
3. Bapak Drs.Suharsono S., M.Sc, Ph.D., selaku dosen Pembahas yang telah menguji penulis dan memberikan saran dalam penyelesaian skripsi;
4. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D, selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung;

5. Bapak Prof. Warsito, DEA., Ph.D., selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung;
6. Dosen, staf, dan karyawan FMIPA Universitas Lampung yang telah memberikan ilmu pengetahuan dan bantuan kepada penulis;
7. Ibuku, abang, dan kakakku tersayang yang selalu memberikan semangat dan doa dalam menyelesaikan skripsi ini;
8. Shella Niyyaka, Ira Nurdiana, Sri Agustina, Tri Susilowati, Gesti Nur Roffi, dan MATH 2012 yang selalu memberikan dukungan serta canda tawa;
9. Seluruh pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu, atas peran dan dukungannya dalam menyusun skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih banyak jauh dari kesempurnaan, akan tetapi semoga skripsi ini dapat berguna dan memberikan manfaat bagi kita semua. Amin.

Bandar Lampung, 17 Oktober 2016

Penulis,

Tika Kristi

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Purwodadi Simpang, Lampung Selatan pada tanggal 1 Januari 1994 dan merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara, dari pasangan Bapak H. Sitanggang (alm) dan Ibu N. Sitorus. Penulis mengawali pendidikan Taman Kanak-kanak di TK Kartika Sukarame Bandar lampung pada tahun 2000, Sekolah Dasar di SD Negeri 1 Sukarame pada tahun 2001, kemudian pendidikan Sekolah Menengah Pertama Negeri 24 Bandar Lampung pada tahun 2009, dan pendidikan Sekolah Menengah Atas Negeri 12 Bandar Lampung pada tahun 2012.

Pada tahun 2012 penulis melanjutkan pendidikan Strata Satu (S1) pada Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Ujian Masuk Lokal (UML). Penulis aktif dalam beberapa organisasi, yaitu menjadi anggota Pramuka dan Paskibra di SMP N 24 Bandar Lampung, menjadi anggota OSIS, *English Club*, dan Jurnalis di SMA N 12 Bandar Lampung. Penulis juga pernah menjabat sebagai anggota bidang kesekretariatan (KESTARI) Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) pada tahun 2012.

Penulis telah melaksanakan Kerja Praktek (KP) pada 1 Juli 2015 – 31 Juli 2015 di Dinas Peternakan dan Kesehatan Hewan Provinsi Lampung dan telah menyelesaikan mata kuliah wajib Kuliah Kerja Nyata (KKN) yang dilaksanakan pada 18 Januari 2016 – 18 Maret 2016 di Desa Kerbang Langgar Kecamatan Pesisir Utara Kabupaten Pesisir Barat.

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Persoalan-persoalan di bidang matematika dalam kehidupan sehari-hari biasanya dinyatakan ke dalam bentuk fungsi. Persoalan-persoalan matematika tersebut biasanya tidak dapat dicari solusinya dengan hanya perhitungan biasa (eksak). Fungsi itu mungkin diperoleh dari data numerik dengan interpolasi ataupun regresi. Misalnya persoalan akar-akar persamaan, sistem persamaan linear, pencocokan kurva, integrasi, dan persamaan diferensial biasa. Oleh karena itu, perlu digunakan perhitungan melalui aproksimasi untuk mendapatkan suatu nilai yang mendekati nilai yang diinginkan. Aproksimasi adalah suatu pendekatan untuk memperoleh nilai fungsi yang mendekati dengan nilai fungsi yang lainnya. Perlu diperhatikan bahwa dalam pendekatan memperoleh nilai fungsi, harus diambil nilai fungsi yang mendekati dengan nilai yang sebenarnya.

Cara mencari aproksimasi fungsi tersebut adalah dengan optimisasi. Optimisasi adalah suatu proses memaksimumkan atau meminimumkan suatu fungsi objektif yang memenuhi kendala tertentu. Suatu masalah optimisasi yang tidak mendapatkan solusi terbaik dalam ruang fisis atau ruang real, dapat dipecahkan dengan suatu sistem matematis, yaitu dengan membawa masalah tersebut ke ruang abstrak (berisi aksioma-aksioma) atau ruang vektor (Kreyzig, 1978).

Metode optimisasi dengan metode ruang vektor pada dasarnya adalah mencari vektor dengan norma minimum atau meminimumkan norma suatu vektor (Luenberger, 1969). Untuk membahas aproksimasi fungsi digunakan Teorema Proyeksi [Adkinson (2001) & Luenberger (1969)]. Dalam pemecahan masalah ini, langkah penting yang harus dilakukan adalah pemilihan basis yang bebas linear yang membangun ruang fungsi yang akan diaproksimasi dan penentuan kesalahan optimal atau ralat optimal dari aproksimasi yang diambil. Basis ini tidak tunggal. Pemilihan basis yang berbeda akan menghasilkan aproksimasi fungsi yang sama dan juga kesalahan optimal yang sama pula.

Masalah aproksimasi fungsi di atas dapat diselesaikan pada ruang vektor, yaitu dengan metode optimisasi ruang vektor. Ruang vektor yang digunakan adalah ruang Hilbert. Ruang Hilbert merupakan ruang abstrak yang di dalamnya memuat perpaduan tiga konsep, yaitu Aljabar, Analisis, dan Geometri. Konsep geometri yang digunakan adalah mengenai proyeksi, sebab ruang Hilbert dibangun oleh konsep *inner product* (Berberian, 1961). Penelitian tentang masalah tersebut, diantaranya adalah penyelesaian masalah minimum norm pada ruang Hilbert $L_2[a,b]$ (Amanto dkk., 2003). Selanjutnya penelitian yang sama juga dilakukan pada ruang Hilbert yang lain, yaitu ruang Hilbert C[a,b] (Joko Waluyo, 2003). Dalam hal ini konsep yang digunakan adalah minimum norm pada ruang Hilbert C[a,b]. Fungsi yang akan dicari aproksimasinya adalah fungsi-fungsi kontinu bernilai real yang terdefinisi pada [a,b]. Pada penelitian tersebut baru sampai pada tahap mencari solusinya, belum pada tahap evaluasi atau analisis hasil terkait dengan galat yang dihasilkannya.

Pada penelitian ini akan dibahas evaluasi atau analisis hasil terkait dengan galat pada pemilihan basis pada aproksimasi fungsi dengan metode minimum norm pada ruang Hilbert C[a,b] dengan mengambil kasus untuk fungsi-fungsi transenden.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah menganalisis galat yang terjadi pada aproksimasi fungsi transenden dengan metode optimisasi ruang vektor, yaitu minimum norm pada ruang Hilbert C[a,b] untuk mendapatkan aproksimasi fungsi transenden yang terbaik.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah :

1. Memberikan pemahaman konsep analisis terhadap galat atas pemilihan basis yang dilakukan pada aproksimasi fungsi dengan metode minimum norm pada ruang Hilbert C[a,b] sehingga akan diperoleh aproksimasi fungsi transenden terbaik dengan galat (kesalahan) yang paling kecil.
2. Memberikan kontribusi bagi penelitian tentang metode minimum norm pada ruang Hilbert C[a,b].

3. Dapat memberikan sumbangan pemikiran dan menambah wawasan mengenai metode minimum norm pada ruang Hilbert C[a,b].

1.4 Batasan Penelitian

Pada penelitian ini, yang menjadi batasan masalah adalah membahas analisis aproksimasi fungsi transenden dengan metode minimum norm pada ruang Hilbert C [a,b].

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab II ini, penulis akan menggunakan pengertian-pengertian (definisi), teorema, dan konsep yang mendukung untuk pembahasan pada bab IV. Pengertian (definisi) dan teorema tersebut dituliskan sebagai berikut.

2.1 Pengertian Ruang Hilbert

Definisi 2.1.1

(a) Misalkan X ruang linier. Fungsi dari X x X $\rightarrow \mathbb{C}$ dengan rumus

$(x, y) \rightarrow \langle x, y\rangle \in \mathbb{C}$ yang memenuhi :

(I_1) $\langle x, y\rangle = \langle \overline{x, y}\rangle$ untuk setiap x, y $\in$ X

(I_2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$ untuk setiap x, y $\in$ X dan skalar α

(I_3) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ untuk setiap x, y, z $\in$ X

(I_4) $\langle x, x\rangle \geq 0$ untuk setiap x $\in$ x

$\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$.disebut perkalian dalam (*inner product*).

(b) Ruang linear X yang diperlengkapi dengan suatu perkalian dalam (*inner product*) disebut ruang perkalian dalam (*inner product space*) atau ruang Pre- Hilbert (Atkinson, 2001).

Contoh :

Ruang vektor C [a, b] didefinisikan sebagai koleksi fungsi-fungsi dari interval tertutup [a,b] ke himpunan bilangan riil yang kontinu dan di dalamnya didefinisikan dua operasi :

(i) Penjumlahan

$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in [a,b]$

(ii) $(cf)(x) = cf(x), \forall x \in [a,b]$ dan konstanta c

Selanjutnya pada C[a,b] didefinisikan fungsi$\langle \ldots, \ldots \rangle$: C[a,b] x C[a,b] $\to \mathbb{C}$, dengan

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,\ \forall f, g \in C[a,b], x \in [a,b].$$

Lemma 2.1.1 (Pertidaksamaan Cauchy - Schwarzt)

Untuk setiap x, y dalam ruang perkalian dalam X, berlaku $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$.

Bukti :

(i) Jika x = **0** atau y = **0**, maka diperoleh :

Untuk x = **0**, maka :

$\langle x, y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0$ dan $\|x\|\|y\| = 0.\ \|y\| = 0$

Jadi, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

(ii) Jika y = α x untuk skalar α, diperoleh :

$$
\begin{aligned}
|\langle x,y\rangle| &= |\langle x,\alpha, \ \rangle| \\
&= |\overline{\alpha}\langle x,x\rangle| \\
&= |\overline{\alpha}|\langle x,x\rangle \\
&= |\alpha|\|x\|^2 \\
&= |\alpha|\|x\|\|x\| \\
&= \|x\|\|\alpha x\| \\
&= \|x\|\|y\|
\end{aligned}
$$

Jadi, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

(iii) Jika y $\neq \alpha$ x, x $\neq$ 0 untuk setiap α.

Untuk membuktikan $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ ekuivalen dengan membuktikan :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\|y\|}|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \\
\Leftrightarrow &\left|\left\langle x,\frac{y}{\|y\|}\right\rangle\right| \leq \|x\| \\
\Leftrightarrow &|\langle x,z\rangle| \leq \|x\|
\end{aligned}
$$

Untuk setiap z $\in$ X dengan $z = \dfrac{y}{\|y\|}$, $\|z\| = \left\|\dfrac{y}{\|y\|}\right\| = \dfrac{1}{\|y\|}\|y\| = 1$.

Untuk setiap skalar α berlaku :

$$
\begin{aligned}
0 &\le \|x - \alpha z\|^2 \\
&= \langle x\text{-}\alpha z, x\text{-}\alpha, \rangle \\
&= \langle x,x\rangle - \langle \alpha z,x\rangle - \langle x,\alpha z\rangle + \langle \alpha z,\alpha z\rangle \\
&= \|x\|^2 - \alpha\langle z,x\rangle - \bar{\alpha}\langle \overline{z,x}\rangle + \alpha\bar{\alpha}\langle z,z\rangle \\
&= \|x\|^2 - \alpha\langle \overline{x,z}\rangle - \bar{\alpha}\langle \overline{z,x}\rangle + |\alpha|^2\|z\|^2 \\
&= \|x\|^2 - \langle x,z\rangle\langle \overline{x,z}\rangle + \left(\langle x,z\rangle - \alpha\right)\left(\langle \overline{x,z}\rangle - \bar{\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

Khusus untuk $\alpha = \langle x, z\rangle$, maka berlaku :

$$0 \le \|x\|^2 - |\langle x, z\rangle|^2$$

Jadi, $|\langle x, z\rangle| \le \|x\|$.

Dengan kata lain, terbukti bahwa

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|,\ \forall x, y \in X .$$

Teorema 2.1.2

Pada ruang Pre-Hilbert X, suatu fungsi $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, untuk setiap x $\in$ X adalah norm.

Bukti :

Untuk menunjukkan $\|.\|$ fungsi norm, harus ditunjukkan $\|.\|$ memenuhi aksioma (N_1) – (N_3) dalam Definisi 2.1.1.

(N$_1$) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \forall x \in X$

$\geq$ 0, sebab $\langle$x , x$\rangle \geq$ 0 (Aksioma I_4 Definisi 3.2.1)

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0$$
$$\Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0$$

$\Rightarrow x = \mathbf{0}$ (Aksioma I_4 Definisi 3.2.1)

(N$_2$) Untuk suatu skalar α , diperoleh :

$$\begin{aligned}\|\alpha x\| &= \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle}\\ &= \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle}\\ &= \sqrt{|\alpha|^2\langle x, x\rangle}\\ &= |\alpha|\sqrt{\langle x, x\rangle}\\ &= |\alpha|\|\mathrm{x}\|\end{aligned}$$

(N$_3$) Untuk setiap x $\in$ X , diperoleh :

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x, x\rangle + \langle x.y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle\\ &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2\\ &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle \overline{x, y}\rangle + \|y\|^2\\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2\\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2\end{aligned}$$

Dengan menggunakan pertidaksamaan Cauchy – Schawarzt diperoleh :

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Jadi, berdasarkan aksioma (N_1), (N_2) dan (N_3) terbukti bahwa

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \forall x \in X$ fungsi norm pada ruang Hilbert X.

2.2. Aproksimasi Fungsi

Suatu fungsi tidak memerlukan penyelesaian tetapi fungsi tersebut dapat dievaluasi apabila nilai variabelnya diberikan. Suatu fungsi juga dapat dipresentasikan dalam deret pangkat tak hingga. Suatu fungsi yang diekspansi dalam deret tak hingga $\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{C}_\mathrm{i} Z^i$ tidak dapat diselesaikan dengan perhitungan biasa untuk mendapatkan nilai eksaknya. Oleh karena itu, untuk mencari nilainya dapat dilakukan dengan penggunaan suatu pendekatan. Perhitungan dengan suatu aproksimasi menghasilkan nilai pendekatan (Munir, 2006).

2.3. Teorema Proyeksi

Teorema proyeksi merupakan prinsip dasar dalam penyelesaian masalah optimisasi. Sebelum ke Teorema proyeksi, terlebih dahulu akan diperkenalkan konsep ortogonalitas.

Definisi 2.3.1 (Luenberger, 1969)

Dalam suatu ruang pre-Hilbert X, vektor x,y $\in$ X dikatakan ortogonal jika $\langle x , y\rangle$= 0, dinotasikan dengan x $\perp$ y. Suatu vektor x dikatakan ortogonal dengan himpunan S, dinotasikan x $\perp$ S jika x $\perp$ s untuk setiap s $\in$ S.

Lemma berikut menunjukkan bahwa Teorema Phytagorean dalam geometri bidang merupakan akibat dari konsep ortogonalitas.

Lemma 2.3.1

Misalkan X suatu ruang Hilbert dan $x, y \in X$. Jika $x \perp y$, maka

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Bukti :

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + 0 + 0 + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Selanjutnya akan dibahas suatu masalah optimisasi yang berhubungan dengan Teorema proyeksi. Misalkan X suatu ruang Pre-Hilbert, diberikan suatu vektor $x \in X$ dan M ruang bagian dari X, maka akan ditentukan vektor $m \in M$ yang terdekat ke x, yaitu vektor yang meminimalkan $\|x-m\|$.

Jika x berada di M maka penyelesaiannya trivial, yaitu vektor x sendiri. Secara umum ada empat pernyataan penting dalam penyelesaian masalah tersebut yaitu :

1. Adakah vektor $m \in M$ yang meminimalkan $\|x-m\|$?
2. Apakah penyelesaiannya tunggal ?
3. Kondisi apa yang harus dipenuhi agar ada penyelesaian optimal ?
4. Bagaimana menentukan penyelesaian optimal ?

Pernyataan nomor 1, 2 dan 3 akan dijawab dengan Teorema proyeksi. Ada dua versi Teorema proyeksi, satu versi pada ruang Pre-Hilbert dan satu versi yang lain pada ruang Hilbert dengan hipotesis dan kesimpulan yang lebih kuat.

Teorema 2.3.2 (*Teorema Proyeksi di Ruang pre-Hilbert*)

Misalkan *X* suatu ruang Pre-Hilbert, *M* suatu ruang bagian dari *X* dan *x* sebarang vektor di *X*. Jika ada vektor $m_0 \in M$, sedemikian hingga $\|x - m_o\| \leq \|x - m\|, \forall m \in M$, maka m_0 tunggal. Syarat perlu dan cukup $m_0 \in M$, suatu vektor minimal tunggal di *M* adalah vektor selisih $x - m_0$ ortogonal terhadap *M* (Berberian,1961).

Bukti :

Akan di tunjukkan jika m_0 adalah vektor minimal, maka $x - m_0$ ortogonal terhadap *M*. Andaikan kondisi sebaliknya, terdapat $m \in M$ yang tidak ortogonal terhadap x – m_0. Tanpa mengurangi keumuman bukti, misalkan $\|m\| = 1$ dan $\langle x - m_0 , m\rangle = \partial \neq 0$.

Didefinisikan vektor $m_1 \in M$, sebagai $m_1 = m_0 + \partial m$ maka

$$\|x - m_1\|^2 = \|x - m_0 - \partial m\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle x - m_0 - \partial m, x - m_0 - \partial m \rangle \\
&= \langle x - m_0, x - m_0 \rangle + \langle x - m_0, -\partial m \rangle + \langle -\partial m, x - m_0 \rangle + \langle -\partial m, -\partial m \rangle \\
&= \|x - m_0\|^2 - \langle x - m_0, \partial m \rangle - \langle \partial m, x - m_0 \rangle + |\partial|^2 \|m\|^2 \\
&= \|x - m_0\|^2 - \langle \overline{\partial m, x - m_0} \rangle - \langle \partial m, x - m_0 \rangle + |\partial|^2 \\
&= \|x - m_0\|^2 - \bar{\partial} \langle x - m_0, m \rangle - \partial \langle m, x - m_0 \rangle + |\partial|^2 \\
&= \|x - m_0\|^2 - 2|\partial|^2 + |\partial|^2 \\
&= \|x - m_0\|^2 - |\partial|^2 \\
&\leq \|x - m_0\|^2
\end{aligned}
$$

Ini berarti $\exists$ m_1 dengan $m_1 = m_0 + \partial m$ sehingga $\|x - m_1\|^2 \leq \|x - m_0\|^2$, ini berarti m_0 bukan vektor minimal. Jadi m_0 vektor minimal maka $x - m_0$ ortogonal terhadap M atau $(x - m_0) \perp m, \forall m \in M$.

Dengan demikian jika $x - m_0$ tidak ortogonal terhadap M maka m_0 bukan vektor minimal.

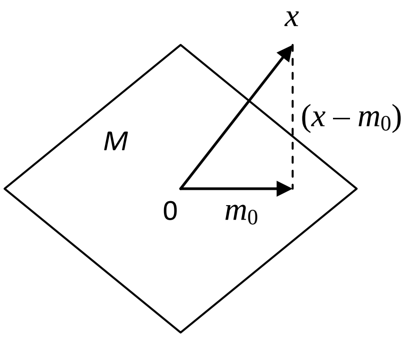
Selanjutnya akan ditunjukkan jika vektor $x - m_0$ ortogonal terhadap M, diambil sebarang $m \in M$, berdasarkan Teorema Phytagorea :

$$
\|x - m\|^2 = \|x - m_0 + m_0 + m\|^2 = \|x - m_0\|^2 + \|m_0 + m\|^2
$$

sehingga $\|x - m\|^2 > \|x - m_0\|^2$ untuk $m \neq m_0$

Dalam dimensi tiga, teorema proyeksi ini dapat dinyatakan sebagai berikut :

Ruang bagian M adalah bidang yang melalui titik asal dan x di ruang dimensi tiga X. Jika ada vektor minimal $m_0 \in M$ maka m_0 tunggal dan vektor selisih $x - m_0$ tegak lurus terhadap bidang M, seperti digambarkan dalam gambar dibawah ini :



Gambar 2.1 Ruang Dimensi Tiga

Teorema di atas belum menjamin keberadaan vektor minimal, tetapi jika ada vektor minimal m_0 , maka m_0 tunggal dan vektor selisih $x - m_0$ ortogonal terhadap ruang bagian M. Dengan hipotesis yang lebih kuat didapatkan kesimpulan yang lebih kuat, yaitu terjaminnya keberadaan vektor minimal. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.3.3 (*Teorema Proyeksi Klasik*)

Misalkan H ruang Hilbert dan M ruang bagian tertutup dari H, maka untuk sebarang vektor $x \in H$, terdapat tunggal vektor $m_0 \in M$ sedemikian hingga $\|x - m_o\| \leq \|x - m\|, \forall m \in M$. Syarat perlu dan cukup $m_0 \in M$,suatu vektor minimal tunggal adalah vektor selisih $x - m_0$ ortogonal terhadap ruang bagian M (Berberian, 1961).

Bukti :

Ketunggalan dan ortogonalitasnya telah dibuktikan pada Teorema 2.3.2, sehingga tinggal membuktikan keberadaan vektor minimal. Jika $x \in M$ dan $m_0 = x$ maka bukti selesai.

Misalkan $x \notin M$ dan didefinisikan $\partial = \inf_{m \in M} \|x - m\|$ akan ditentukan $m_0 \in M$ dengan $\|x - m_0\| = \partial$. Misalkan $\{m_i\}$ suatu barisan vektor dalam M dan $\|x - m_i\| \to \partial$.

Menurut hukum jajaran genjang (*parallelogram)*,

$$\|(m_j - x) + (x - m_i)\|^2 + \|(m_j - x) - (x - m_i)\|^2 = 2\|m_j - x\|^2 + 2\|x - m_i\|^2$$

dengan menyusun kembali persamaan di atas didapatkan :

$$\|m_j - m_i\|^2 = 2\|m_j - x\|^2 + 2\|x - m_i\|^2 - 4\left\|x - \frac{m_i + m_j}{2}\right\|^2 \text{ untuk setiap i, j .}$$

Dan vektor $\frac{m_i + m_j}{2}$ berada di *M.*

Karena *M* ruang bagian linier sehingga dari definisi ∂, $\left\|x - \frac{m_i + m_j}{2}\right\| \geq \partial$

dan didapatkan :

$$\|m_j - m_i\|^2 \leq 2\|m_j - x\|^2 + 2\|x - m_i\|^2 - 4\partial^2$$

karena

$$\{ \|m_i - x\|^2 \} \rightarrow \partial^2 \text{ , i} \rightarrow \infty$$

Maka $\{ \|m_j - m_i\|^2 \} \rightarrow 0$, i, j $\rightarrow \infty$.

Dengan demikian {m_{i}} adalah barisan Cauchy dan karena *M* ruang bagian tertutup dari ruang lengkap, maka barisan {m_{i}} mempunyai limit m_0 di dalam *M*.

Dengan kekontinuan norm maka $\|x - m_0\| = \partial$.

Jadi dalam penulisan ini, Teorema proyeksi klasik menjamin keberadaan dan ketunggalan penyelesaian optimal serta kondisi yang harus dipenuhi agar keberadaan vektor minimal ada penyelesaian optimalnya, penyelesaian optimalnya sendiri belum dapat ditentukan.

Selanjutnya Teorema proyeksi di atas akan ditetapkan untuk membangun sifat struktural tambahan dari suatu ruang Hilbert, antara lain adalah dalam sebarang ruang bagian tertutup dari ruang Hilbert, sebarang vektor dapat ditulis sebagai jumlahan dua vektor, satu vektor di ruang bagian tertutup dan vektor yang lain ortogonal terhadapnya.

Definisi 2.3.3 (Luenberger, 1969)

Misalkan S suatu himpunan bagian dari ruang Hilbert. Himpunan semua vektor yang ortogonal terhadap S disebut komplemen ortogonal dari S dan dinotasikan dengan $S^{\perp}$.

Teorema 2.3.4

Misalkan S dan T himpunan bagian dari ruang Hilbert dan $S^{\perp}$, $T^{\perp}$ berturut-turut menyatakan komplemen ortogonal dari S dan T maka :

1. $S^{\perp}$ adalah ruang bagian tertutup
2. $S \subset S^{\perp\perp}$
3. Jika $S \subset T$ maka $T^{\perp} \subset S^{\perp}$
4. $S^{\perp\perp\perp} = S^{\perp}$

Bukti :

1. Himpunan $S^{\perp}$ merupakan ruang bagian. Ruang $S^{\perp}$ tertutup karena jika $\{x_n\}$ suatu barisan konvergen dari $S^{\perp}$, katakan $x_n \rightarrow x$;

   Kekontinuan perkalian dalam menyatakan $0 = \langle x_n, s\rangle \rightarrow \langle x, s\rangle$ untuk semua $s \in S$, sehingga $x \in S^{\perp}$.
2. Diambil $x \in S$. Hal ini berarti $x \perp y$ untuk semua $y \in S^{\perp}$. Sehingga diperoleh $y \perp z$. Untuk setiap $z \in S^{\perp\perp}$ termasuk $z = x$.

   Jadi untuk $x \in S \rightarrow z \in S^{\perp\perp}$.

3. Ambil x $\in T^{\perp}$. Oleh karena itu maka $y \perp x$ untuk semua $y \in T$.

   Karena $S \subset T$, maka $x \perp z$ untuk setiap z $\in S$. Dengan kata lain $x \in S^{\perp}$.

4. $(S^{\perp\perp})^{\perp} = S^{\perp}$

   Harus dibuktikan :

   (a) $(S^{\perp\perp})^{\perp} \subset S^{\perp}$

   (b) $S^{\perp} \subset (S^{\perp\perp})^{\perp}$

   Bukti :

   (a) Jika S $\subset S^{\perp\perp}$, maka $(S^{\perp\perp})^{\perp} \subset S^{\perp}$.

   (b) Karena S $\subset S^{\perp\perp}$, maka $S^{\perp} \subset (S^{\perp\perp})^{\perp}$.

Definisi 2.3.4 (Luenberger, 1969)

Ruang vektor X dikatakan jumlahan langsung dari ruang bagian *M* dan *N*, jika setiap vektor $x \in X$ dapat ditulis secara tunggal, dalam bentuk $x = m + n$ dengan $m \in M$ dan $n \in N$, dinotasikan dengan $X = M \oplus N$.

Teorema 2.3.5

Jika *M* ruang bagian linear tertutup dari suatu ruang Hilbert *H* maka $H = M \oplus M^{\perp}$ dan $M = M^{\perp\perp}$

Bukti :

Misalkan $x \in H$. Karena M ruang bagian tertutup, maka menurut Teorema proyeksi ada vektor tunggal $m_0 \in M$ sedemikian hingga $\|x - m_0\| < \|x - m\|$ untuk semua $m \in M$ dan $n_0 = x - m_0 \in M^{\perp}$.

Dengan demikian $x = m_0 + n_0$, dengan $m_0 \in$ M dan $n_0 \in M^{\perp}$. Jadi x merupakan jumlahan dari $m_0 \in M$ dan $n_0 \in M^{\perp}$. Untuk membuktikan ketunggalannya, misalkan $x = m_1 + n_1$, dengan $m_1 \in M$ dan $n_1 \in M^{\perp}$ maka : $\mathbf{0} = (m_1 + n_1) - (m_0 + n_0) = m_1 - m_0 + n_1 - n_0$, tetapi $m_1 - m_0$ dan $n_1 - n_0$ ortogonal, sehingga menurut teorema *phytagorean* $\|\mathbf{0}\|^2 = \|m_1 - m_0\|^2 + \|n_1 - n_0\|^2$.

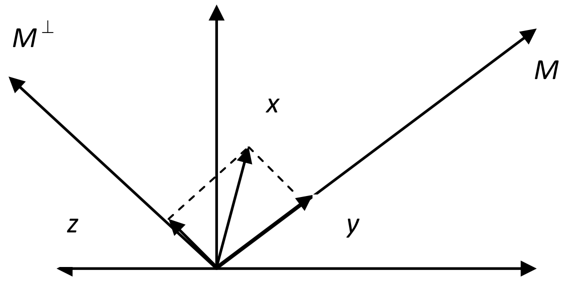
Hal ini menyatakan $m_0 = m_1$ dan $n_0 = n_1$. Jadi untuk setiap vektor di H dapat dinyatakan dengan tunggal sebagai jumlahan dari suatu vektor di M dan suatu vektor di $M^{\perp}$. Dengan kata lain $H = M \oplus M^{\perp}$.

Untuk membuktikan $M = M^{\perp\perp}$ tinggal menunjuKkan $M^{\perp\perp} \subset M$. Diambil $x \in M^{\perp\perp}$ dan akan ditunjukkan $x \in M$. Menurut bagian teorema ini,

$x = m_1 + n_1$ dengan $m_1 \in M$ dan $n_1 \in M^{\perp}$, karena $x \in M^{\perp\perp}$ dan $m \in M^{\perp\perp}$.

Maka $x - m \in M^{\perp\perp}$, yaitu $n_1 \in M^{\perp\perp}$. Tetapi $n_1 \in M^{\perp}$, sehingga $n_1 \perp n_1$ yang menyatakan $n_1 = \mathbf{0}$, sehingga $x - m \in M$ dan $M^{\perp\perp} \subset M$. Terbukti $M = M^{\perp\perp}$.

Dalam dimensi dua bagian pertama teorema di atas dapat dinyatakan sebagai berikut. Jika H suatu bidang dan m suatu garis lurus yang melalui titik asal maka untuk setiap $x \in H$ dapat dinyatakan dengan tunggal sebagai $x = y + z$, dengan $y \in M$ dan $z \in M^{\perp}$. Hal ini dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.2 Ruang Dimensi Dua

Gambar di atas, jika M ruang bagian tetutup dari H maka $H = M \oplus M^{\perp}$. Misalkan M ruang bagian tertutup dari suatu ruang Hilbert H dan vektor x di H. Vektor $m_0 \in M$ dengan $x - m_0 \in M^{\perp}$ disebut proyeksi ortogonal x pada M.

Jadi sampai disini keberadaan dan ketunggalan penyelesaian optimal masalah optimisasi sudah terjawab, namun penyelesaian optimalnya sendiri belum ditentukan. Ada dua cara untuk menentukan penyelesaian optimal, yaitu dengan menyelesaikan persamaan normal dan dengan prosedur ortogonalisasi Gram-Schmidt bersama deret Fourier. Pada penelitian ini akan dibicarakan dengan menyelesaikan persamaan normal dan matriks Gram.

Definisi 2.3.5 (Luenberger, 1969)

Misalkan $y_1, y_2, ..., y_n$ basis dari M. Diberikan sebarang vektor $x \in$ H dan akan dicari vektor m_0 di M yang terdekat ke x. Jika vektor m_0 dinyatakan dalam suku-suku dalam vektor y_i sebagai :

$$m_o = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i$$

Maka masalah tersebut ekuivalen dengan menemukan skalar β_i , i = 1, 2, ..., n yang meminimalkan $\|x - \beta_1 y_1 - \beta_2 y_2 - .... - \beta_n y_n\|$.

Menurut teorema proyeksi, vektor minimal tunggal m_0 adalah proyeksi ortogonal x pada M, atau vektor selisih $x - m_0$ ortogonal terhadap setiap vektor y_i .

Dengan demikian *:* $\langle x - \beta_1 y_1 - \beta_2 y_2 - .... - \beta_n y_n, y_i \rangle = 0$ *untuk i* = 1, 2, ..., *n.*

Atau

$\langle x, y_1 \rangle$ -$\langle \beta_1, y_n, y_1 \rangle$-$\langle \beta_2, y_n, y_1 \rangle$ ....- $\langle \beta$ n, $y_n, y_1 \rangle = 0$

$\langle x, y_2 \rangle$ -$\langle \beta_1, y_1, y_2 \rangle$-$\langle \beta_2, y_2, y_2 \rangle$ ....- $\langle \beta$ n, $y_n, y_2 \rangle = 0$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$\langle x, y_n \rangle$ -$\langle \beta_1, y_1, y_n \rangle$-$\langle \beta_2, y_2, y_n \rangle$ ....-$\langle \beta$ n, $y_n, y_n \rangle = 0$

Atau

$\langle y_1, y_1\rangle\,\beta_1 + \langle y_2, y_1\rangle\,\beta_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \langle \mathrm{y_n}, \mathrm{y}_1\rangle\,\beta\,\mathrm{n} = \langle x, y_1\rangle$

$\langle y_1, y_2\rangle\,\beta_1 + \langle y_2, y_2\rangle\,\beta_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \langle \mathrm{y_n}, \mathrm{y}_2\rangle\,\beta\,\mathrm{n} = \langle x, y_2\rangle$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

$\langle y_1, y_n\rangle\,\beta_1 + \langle y_2, y_n\rangle\,\beta_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \langle \mathrm{y_n}, \mathrm{y_n}\rangle\,\beta\,\mathrm{n} = \langle x, y_n\rangle$

Persamaan dalam koefisien β_{i} sebanyak n kali ini dikenal sebagai persamaan normal untuk masalah minimalisasi.

Matriks n x n yang berhubungan dengan vektor $y_1, y_2, \ldots, y_n$ yaitu :

$$G = G(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) = \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1\rangle & \langle y_1, y_2\rangle \ldots\ldots\ldots & \langle y_1, y_n\rangle \\ \langle y_2, y_1\rangle & \langle y_2, y_2\rangle \ldots\ldots\ldots & \langle y_2, y_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle y_n, y_1\rangle & \langle y_n, y_2\rangle \ldots\ldots\ldots & \langle y_n, y_n\rangle \end{vmatrix}$$

disebut matriks Gram dari $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_n$. Matriks ini adalah tranpose dari matriks koefisien normal.

Teorema 2.3.6

Determinan Gram $g = g(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ jika dan hanya jika $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bebas linear (Luenberger, 1969).

Bukti :

Pernyataan tersebut ekuivalen dengan pernyataan vektor–vektor $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bergantung linear jika dan hanya jika $g = g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$.

Misalkan y_i bergantung linier, berarti terdapat α_i yang tidak sama dengan nol sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$. Karena barisan-barisan pada determinan Gram bergantung pada y_i, maka determinannya nol.

Misalkan $g = g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$. Maka ada kebergantungan linier di antara barisan-barisannya sehingga terdapat konstanta a_i yang tidak semuanya nol sedemikian hingga $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle y_i, y_j \rangle = 0$, untuk semua j. Dengan demikian $\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i, y_j \right\rangle = 0$ atau $\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right\|^2 = 0$. Sehingga $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$ dan vektor y_1, $y_2, \ldots, y_n$ bergantung linier.

Walaupun persamaan normal tidak memiliki penyelesaian tunggal jika y_i bergantung linier, tetapi selalu ada paling sedikit satu penyelesaian. Jika $g = 0$ maka selalu dihasilkan penyelesaian yang tidak tunggal, bukan penyelesaian yang tidak konsisten.

Teorema berikut menyatakan jarak minimum suatu vektor ke ruang bagian dapat dicari dengan determinan matriks Gram.

Teorema 2.3.7

Misalkan $y_1, \ldots\ldots, y_n$ bebas linear dan ∂ jarak minimum vektor x ke ruang bagian M yang dibangun oleh y_i, yaitu :

$$\partial = \min\left\| x - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2 - \ldots\ldots. - \alpha_n y_n \right\| = \left\| x - \hat{x} \right\|$$

maka,

$$\partial^2 = \frac{g(y_1, y_2, \ldots, y_n, x)}{g(y_1, y_2, \ldots., y_n)}$$

Bukti :

Menurut definisi $\partial^2 = \left\| x - \hat{x} \right\|^2 = \left\langle x - \hat{x}, x - \hat{x} \right\rangle = \left\langle x - \hat{x}, x \right\rangle - \left\langle x - \hat{x}, x \right\rangle$

Menurut teorema proyeksi, x - $\hat{x}$ ortogonal terhadap M, sehingga secara khusus karena $\hat{x} \in M$ maka : $\langle x - \hat{x}, \hat{x} \rangle = 0$, sehingga

$$\partial^2 = \left\langle x - \hat{x}, x \right\rangle = \langle x, x \rangle - \left\langle \hat{x}, x \right\rangle = \langle x, x \rangle - \alpha_i \langle y_1, x \rangle - \ldots\ldots - \alpha_n \langle y_n, x \rangle$$

atau

$$\partial^2 + \alpha_1 \langle y_1, x \rangle + \ldots\ldots + \alpha_n \langle y_n, x \rangle = \langle x, x \rangle$$

persamaan ini bersama persamaan normal memberikan n + 1 persamaan linier dalam n + 1 variabel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots.., \alpha_n, \partial^2$. Dengan aturan Cramer didapatkan

$$\partial^2 = \frac{\begin{vmatrix} \langle y_1, y_1\rangle & \langle y_2, y_1\rangle \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \langle y_n, y_1\rangle & \langle x, y_1\rangle \\ \langle y_1, y_2\rangle & \langle y_2, y_2\rangle \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \langle y_n, y_2\rangle & \langle x, y_1\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle y_1, y_n\rangle & \langle y_2, y_n\rangle \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \langle y_n, y_n\rangle & \langle x, y_n\rangle \\ \langle y_1, x\rangle & \langle y_2, x\rangle \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \langle y_n, x\rangle & \langle x, x\rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle y_1, y_1\rangle & \langle y_2, y_1\rangle \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \langle y_n, y_1\rangle & 0 \\ \langle y_1, y_2\rangle & \langle y_2, y_2\rangle \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \langle y_n, y_2\rangle & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle y_1, y_n\rangle & \langle y_2, y_n\rangle \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \langle y_n, y_n\rangle & 0 \\ \langle y_1, x\rangle & \langle y_2, x\rangle \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \langle y_n, x\rangle & 1 \end{vmatrix}} = \frac{g(y_1, \ldots\ldots, y_n, x)}{g(y_1, \ldots\ldots\ldots, y_n)}$$

2.4. Deret Maclaurin

Kasus khusus pada deret Taylor adalah bila fungsi diperluas sekitar t_0=0 maka deretnya dinamakan deret Maclaurin yang juga merupakan deret Taylor baku sebagai berikut :

$$x(t) = x(0) + \frac{x'(0)}{1!} + t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \frac{x'''(0)}{3!}t^3 + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\sim} \frac{x^n(0)}{n!} t^n$$

(Purcell, 2004).

Contoh 2.4.1

Carilah deret Maclaurin untuk sin x pada a.

Jika f(x) = sin x, maka kita punyaf'(x) = cos x, f''(x) = -sin x, f'''(x) = -cos x, f'^{V}(x) = sin x, dan seterusnya.

Jadi, dari rumus deret Maclaurin di atas,

$c_0 = \sin a,\ c_1 = \cos a,\ c_2 = \frac{(-\sin a)}{2!},\ c_3 = \frac{(-\cos a)}{3!},\ c_4 = \frac{(\sin a)}{4!}$, dan seterusnya.

Sehingga diperoleh deret Maclaurin yaitu:

$$\text{Sin x} = \sin a + (\cos a)(x-a) - (\sin a)\frac{(x-a)^2}{2!} - (\cos a)\frac{(x-a)^3}{3!} + (\cos a)\frac{(x-a)^4}{4!} + \cdots$$

2.5. Fungsi Transenden

Fungsi transenden atau fungsi non aljabar adalah fungsi yang tidak dapat dinyatakan dalam sejumlah berhingga operasi aljabar. Fungsi transenden yang bisa dijumpai dalam hal ini terdiri dari fungsi eksponensial, fungsi logaritmik, fungsi trigonometrik, fungsi siklometrik, dan fungsi hiperbolik. Dalam pembahasan selanjutnya, akan diuraikan satu persatu mulai dari definisi, invers, sampai integral dari masing-masing fungsi transenden tersebut.

a. Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial adalah fungsi yang variabel bebasnya menjadi pangkat dari suatu bilangan. Fungi eksponen dinyatakan dalam bentuk umumnya= $f(x) = a^x$, dengan $a \neq 0$ dan $a \in \mathbf{R}$. Sebagai ilustrasi fungsi $y \equiv f(x)=2^x$, $g(x)=10^x$ dan sebagainya.

b. Fungsi Logaritmik

Fungsi logaritmik dengan bilangan dasar $a \neq 1$ adalah invers dari fungsi eksponen dari bilangan dasar *a*. Fungsi eksponen $y = g(x)\ a^x$ dengan a^x, inversnya adalah fungsi logaritmiknya $y = f(x) = {}^2\log x$. $g(x) = \log x$, dan sebagainya.

c. Fungsi Trigonometrik

Fungsi trigonometrik antara lain meliputi fungsi-fungsi $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, dan sebagainya. Dengan *x* menyatakan besar suatu sudut (radian atau derajat) dan *y* menyatakan nilai fungsi.

d. Fungsi Siklometrik

Fungsi siklometrik adalah invers dari fungsi trigonometrik. Seperti $y = \text{arc sin } x$, $y = \text{arc cos } x$, $y = \text{arc tan } x$, dan sebagainya.

e. Fungsi Hiperbolik

Fungsi hiperbolik ada kemiripan dengan fungsi trigonometri. Antara lain meliputi $y = \cosh x$, $y = \sinh x$, $y = \tanh x$ dan sebagainya.

Fungsi hiperbolik didefinisikan sebagai berikut :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(Purcell, 2004).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, pada jurusan Matematika, Universitas Lampung yang dimulai pada semester Genap tahun ajaran 2015/2016.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode yang bersifat studi pustaka, yaitu dengan mempelajari, menganalisis masalah dengan definisi-definisi, dan definisi tersebut menjadi acuan berfikir untuk mengemukakan teori yang sesuai dengan masalah yang bersangkutan, dan kemudian membuat kesimpulan. Sumber literatur yang digunakan yaitu dari Perpustakaan Universitas Lampung, dan sumber-sumber lain yang berhubungan dengan masalah dalam penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Membawa masalah aproksimasi fungsi ke ruang Hilbert C[a,b] dengan cara terlebih dahulu menentukan produk skalar terhadap ruang Hilbert C[a,b] yang sesuai untuk digunakan.

2. Menentukan basis-basis yang akan digunakan.
3. Mencari penyelesaian optimal (aproksimasi fungsi terbaik) dengan persamaan normal.
4. Menentukan kesalahan optimal dari pengambilan basis yang berbeda-beda pada langkah (2) dan melakukan analisis serta evaluasi terhadap galat dan fungsi yang dihasilkan.
5. Melakukan langkah (1) s.d. (4) untuk kasus fungsi yang lain.
6. Melakukan perbandingan dan selanjutnya mengambil kesimpulan atas hasil pada langkah (5).

V. KESIMPULAN

Masalah optimisasi khususnya aproksimasi fungsi terbaik yang tidak mendapatkan solusi terbaik dalam ruang fisis atau yang dikenal sebagai ruang real, dapat dipecahkan dengan sistem matematis yang sederhana, dengan masalah aproksimasi tersebut ke ruang abstrak (berisi aksioma-aksioma) atau ruang vektor, khususnya pada ruang Hilbert C[a,b]. Masalah tersebut dikenal sebagai masalah minimum norm dalam ruang Hilbert C[a,b], dengan studi kasus fungsi transenden. Dengan menggunakan konsep minimum norm akan diperoleh kesalahan optimal (galat) yang minimum.

Dalam penyelesaian masalah minimum norm dengan menggunakan ruang Hilbert C[a,b], maka fungsi aproksimasi tidak tergantung pada pemilihan basis, asalkan basis yang dipilih membangun ruang Hilbert C[a, b]. Jika dibandingkan dengan aproksimasi fungsi dengan deret Maclaurin, maka metode Maclaurin kurang teliti, karena aproksimasi dengan deret Maclaurin tergantung dengan banyaknya suku yang diambil.

DAFTAR PUSTAKA

Amanto, Suharsono, dan Waluyo, J.,2003. Penyelesaian Masalah Minimum Norm dalam Ruang Hilbert L_2[a,b]. *Jurnal Matematika, Aplikasi dan Pembelajarannya (JMAP)*, Vol 2, hal. 124 – 131.

Atkinson, K. And Han, W., 2001. *Theoretical Numerical Analysis : A Functional Analysis Framework*. Springer Verlag, New York.

Berberian, SK., 1961. *Introduction to Hilbert Space*, Academic Press, Inc., New York.

Joko Waluyo, 2003. *Penyelesaian Masalah Minimum Norm Dalam Ruang Hilbert* C[a,*b*]. Skripsi, Jurusan Matematika FMIPA Unila.

Kreyzig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York : John Willey.

Luenberger, D.G., 1969. *Optimization by Vector Space Methods* John Wiley and Sons, New York.

Munir, Rinaldi. 2006. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.

Purcell, Edwin J. 2004. *Kalkulus*. Jilid Dua. Jakarta: Erlangga.