

**PENERAPAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA PADA  
MODEL LAJU PENJERNIHAN AIR MENGGUNAKAN  
PROSES FILTERASI**

Oleh

**Gesti Nur Rofi' AR**

( Skripsi )



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMPUNG BANDAR LAMPUNG  
2016**

## **ABSTRACT**

### **THE APPLICATION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE MODEL WITH THE RATE OF WATER PURIFICATION FILTRATION PROCESS**

By

Gesti Nur Rofi' AR

In general, mathematics always used in daily life. At modern many used to face problem that happen in the area. In this part, turbidity water caused by many winds factors, eventhough water is primary needs in our life. In this research is arranged calculating ordinary deferensial equation in water purification model with purification process.

The research purpose to know how to manage water with water purification rate model with purification process, to know water quantity that produced with ordinary diferensial equation calculation, by means of water purification rate model with purification processs, the speed well blended water that produced by water purification rate model with purification in certain time, the surface of the area purification in certain height, and the pace of the flow of water that produced by water purification rate model process with purification process in certain time.

This research used the research quantitative with the survey method, while instrument in this research was quisoner water purification rate model with purification process.

The applicability of ordinary diferensial equation in water purifation rate model with purification process.

## ABSTRAK

# PENERAPAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA PADA MODEL LAJU PENJERNIHAN AIR DENGAN PROSES FILTERASI

Oleh

GESTI NUR ROFI' AR

Matematika pada umumnya selalu diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Pada abad modern banyak diterapkan untuk mengatasi masalah yang terjadi pada lingkungan dalam hal ini yaitu kekeruhan air karena berbagai macam faktor, padahal air merupakan kebutuhan primer dalam kehidupan. Pada percobaan ini diterapkan perhitungan Persamaan diferensial biasa pada model laju penjernihan air dengan menggunakan proses filterasi. Penelitian bertujuan antara lain untuk mengetahui: cara pengelolaan air dengan proses model laju penjernihan air dengan proses filterasi, mengetahui kuantitas air yang diproduksi dengan perhitungan persamaan diferensial biasa, melalui model laju penjernihan air dengan proses filterasi, Kecepatan rata-rata air yang diproduksi melalui proses model laju penjernihan air dengan menggunakan filterasi dalam selang waktu tertentu, luas permukaan alat penjernih pada ketinggian tertentu, dan laju aliran air yang diproduksi melalui proses model laju penjernihan air dengan proses filterasi pada waktu tertentu.

Penelitian ini menggunakan metode penelitian *kuantitatif*, dengan pendekatan *metode survey*. Sedangkan Instrument pada penelitian ini adalah kuisioner laju penjernihan dengan air dengan proses filterasi.

Kata kunci : Persamaan diferensial, laju penjernih, filterasi

Daftar Bacaan : (2007-2014)

**PENERAPAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA PADA  
MODEL LAJU PENJERNIHAN AIR MENGGUNAKAN  
PROSES FILTERASI**

**Oleh**

**Gesti Nur Rofi' AR**

**Skripsi**

**Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar  
SARJANA SAINS**

**Pada**

**Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMPUNG BANDAR LAMPUNG  
2016**



Judul Skripsi

**: PENERAPAN PERSAMAAN  
DIFERENSIAL BIASA PADA MODEL  
LAJU PENJERNIHAN AIR  
MENGUNAKAN PROSES  
FILTERASI**

Nama Mahasiswa

**: Gesti Nur Rofi' AR**

Nomor Pokok Mahasiswa

**: 1217031030**

Jurusan

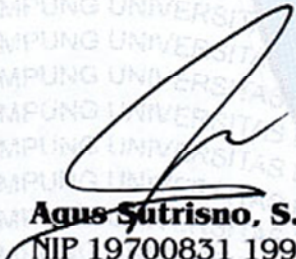
**: Matematika**

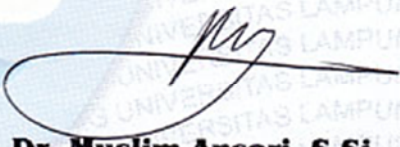
Fakultas

**: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

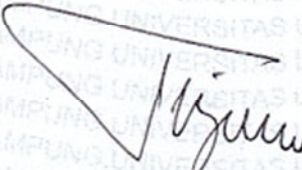
**MENYETUJUI**

**1. Komisi Pembimbing**

  
**Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**  
NIP 19700831 199903 1 002

  
**Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**  
NIP 19720227 199802 1 001

**2. Ketua Jurusan Matematika**



**Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.**  
NIP 19620704 198803 1 002



**MENGESAHKAN**

**1. Tim Penguji**

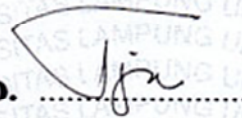
**Ketua : Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**



**Sekretaris : Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**



**Penguji  
Bukan Pembimbing : Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.**



**2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



**Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.**

**NIP 19710212 199512 1 001**

**Tanggal Lulus Ujian Skripsi : 5 Oktober 2016**

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan :

1. Karya tulis saya, Skripsi ini adalah asli dan belum pernah diajukan untuk mendapat gelar Akademik (Sarjana), baik di Universitas Lampung maupun di perguruan lain.
2. Karya tulis ini murni gagasan, rumusan dan penelitian saya sendiri, tanpa bantuan pihak lain kecuali arahan Tim Pembimbing dan Penguji.
3. Dalam karya tulis ini tidak terdapat atau pendapat yang telah di tulis atau dipublikasikan orang lain, kecuali secara tertulis dan jelas dicantumkan sebagai acuan dalam naskah dengan di sebutkan nama pengarang dan di cantumkan dalam daftar pustaka.
4. Pernyataan ini saya buat dengan sesungguhnya dan apabila di kemudian ada penyimpangan dan tidak benaran dalam pernyataan ini, maka saya bersedia menerima sanksi akademik berupa pencabutan gelar yang telah di peroleh karena karya tulis ini, serta sanksi lain sesuai dengan norma yang berlaku di Universitas Lampung.

Bandar Lampung , 5 Oktober 2016

Yang membuat pernyataan,



Gesti Nur Rofi AR

## **PERNYATAAN**

**Dengan ini saya menyatakan :**

- 1. Karya tulis saya, Skripsi ini adalah asli dan belum pernah diajukan untuk mendapat gelar Akademik (Sarjana), baik di Universitas Lampung maupun di perguruan lain.**
- 2. Karya tulis ini murni gagasan, rumusan dan penelitian saya sendiri, tanpa bantuan pihak lain kecuali arahan Tim Pembimbing dan Penguji.**
- 3. Dalam karya tulis ini tidak terdapat atau pendapat yang telah di tulis atau dipublikasikan orang lain, kecuali secara tertulis dan jelas dicantumkan sebagai acuan dalam naskah dengan di sebutkan nama pengarang dan di cantumkan dalam daftar pustaka.**
- 4. Pernyataan ini saya buat dengan sesungguhnya dan apabila di kemudian ada penyimpangan dan tidak benaran dalam pernyataan ini, maka saya bersedia menerima sanksi akademik berupa pencabutan gelar yang telah di peroleh karena karya tulis ini, serta sanksi lain sesuai dengan norma yang berlaku di Universitas Lampung.**

**Bandar Lampung , 5 Oktober 2016**

**Yang membuat pernyataan,**

**Gesti Nur Rofi AR**



## **RIWAYAT HIDUP**

Penulis dilahirkan di lampung selatan kecamatan Gedongtataan pada tanggal 22 april 1994, anak kedua dari tiga bersaudara pasangan bapak Sugeng WD dan Siti rohani AR.

Penulis menyelesaikan pendidikan Taman kanak-kanak Diniyah putri lampung pada tahun 1999, Sekolah Dasar Negeri III Wiyono Kecamatan Gedong tataan kabupaten lampung selatan pada tahun 2006, Sekolah Menengah Pertama Negeri I kecamatan Gedongtataan kabupaten lampung selatan pada tahun 2009, Sekolah Menengah Atas Negeri 7 Bandar Lampung Provinsi Lampung selatan pada tahun 2012, pada tahun yang sama penulis diterima sebagai mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.

Selama kuliah penulis pernah aktif di lembaga mahasiswa, pada tahun 2014-2015 penulis aktif sebagai pengurus badan eksekutif mahasiswa di biro pemberdayaan sumber daya mahasiswa dan penulis aktif juga sebagai pengurus rohani islam (rohis) fmipa, selain itu juga pada tahun 2014 penulis pernah menjadi staf pengajar di lembaga Kumon.

Pada bulan Juli tahun 2015, penulis melaksanakan kerja praktek (kp) di Dinas P.U. Bina Marga dan menjadi Sarjana Sains pada fakultas matematika dan ilmu pengetahuan alam universitas lampung pada tahun 2016.

*Kupersembahkan skripsi ini untuk :*

*Kedua orang tua tercintaku, Bapak Sugeng dan Ibu Siti Rohani AR*

*Kakak dan adik, Surya dan Abil, yang senantiasa menemani, mengiringi, memberikan semangat dan mendoakan di setiap langkah ini*

*hingga Alhamdulillah telah terselesaikan atas izin Allah SWT,*

*semoga memberikan manfaat yang tidak terputus*

*Amin.*



## *Sebuah Renungan...*

*kebahagiaan yang paling bahagia dan berharga diantara yang bahagia di dunia ini adalah tercapainya cita-cita (anonim)*

*Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan .maka apabila engkau telah selesai (dari sesuatu urusan ),tetaplah bekerja keras (untuk urusan yang lain )dan hanya kepadatuhanmulah engkau berharap “ (Q & Al-insyirah 6-8)*

*Bersabarlahmenjalani dengan segala kemampuan terbaik,kelak pada masanya akan berbunga dengan anggun ,Aaamin*

*Insyallah”(Anonim)*

*Jidak akan tercapai suatu cita-cita,tanpa kesungguhan dan kerja keras (Gesti Nur Rofi)*

*Your future make yourself behavior*

*Where is a will , there is a way*

*Where is a life,there is a hope*

## SANWACANA

Pujisyukur kehadiran Tuhan Yang Maha Esa atas segala limpah dan hidayahNya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “PENERAPAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA PADA MODEL LAJU PENJERNIHAN AIRMENGUNAKAN PROSES FILTERASI”

Pada proses penyusunan skripsi ini, penulis memperoleh banyak dukungan, kritik, dan saran yang membangun sehingga skripsi ini mampu penulis selesaikan. Untuk itu penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada :

1. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, saran, dan ilmu yang di berikan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Dr. Muslim Ansori,, S.Si., M.Si selaku pembing yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, motivasi, dan ilmu bagi penulis untuk belajar lebih banyak selama proses pembuatan skripsi ini
3. Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D selaku penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam proses pembuatan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Muslim Ansori,, S.Si., M.Si. selaku pembing akademik atas bimbingan danarahannya selama masa perkuliahan.
5. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.s., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam
7. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam atas bimbingan selama perkuliahan
8. Kedua orang tua, Sugeng, Siti Rohani AR, dan seluruh sanak saudara yang selalu memberikan semangat, doa dan kasih sayang



9. Kakak dan Adik ku tersayang, Surya Nur Rohman AR dan Faleh Nur Ababil, yang selalumengiringi, menghibur, memberikan arahan, motivasi, dan memerikan warna di dalam kehidupan bagi penulis.
10. Angga, Novi, Puput, Pras, dan Murni atas nasehat, kesabaran, kebersamaan serta waktu luang yang sangat bermanfaat kepada penulis.
11. Chatrine, Tika, Siti, Memei, Nia, dan Thania atas semangat, dukungan, motivasi, keceriaan, dan kebersamaannya.
12. Sri, Azizah, Sheila, Yeris, dan Triuntuk semangat dan kebersamaan yang telah di berikanselama ini.
13. Keluarga besar “Matematika 2012”, atas kebersamaan dan keceriaannya selama ini, semoga terjalin sampai kapanpun.
14. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
15. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Penulis menyadari bahwa skripsi masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun agar lebih baik dimasa yang akan datang.

Bandar Lampung, 5 Oktober 2016  
Penulis

Gesti Nur Rofi Ar

## DAFTAR ISI

### DAFTAR GAMBAR

#### I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah.....	1
1.2 Tujuan Penelitian .....	3
1.3 Manfaat Masalah.....	3
1.4 Batasan Masalah.....	4

#### II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Persamaan Diferensial.....	5
2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa.....	5
2.1.2 Diferensial Parsial.....	6
2.2. Orde( Tingkat) dan Derajat Suatu Persamaan Diferensial.....	7
2.2.1 Persamaan Diferensial Biasa Linear .....	8
2.2.2 Persamaan Diferensial Linear Orde dua .....	9
2.2.3 Persamaan Diferensial Homogen dan PD Non Homogen .....	10
2.2.4 Persamaan Homogen Dengan Koefisien Konstanta .....	13
2.3. Linearitas Persamaan Diferensial.....	15
2.4. Penggunaan Perumusan Integral Teori Eksponensial.....	15
2.5. Homogenitas Persamaan Diferensial Linear.....	16
2.6. Persamaan Diferensial Linear Orde Satu.....	17
2.7. Persamaan Diferensial Linear Orde Dua .....	17
2.8. Persamaan Diferensial Linear orde n.....	18
2.9. Pengertian Air .....	19
2.10. Kecepatan.....	20
2.10.1 Kecepatan Rata-rata .....	21
2.10.2 Kecepatan Sesaat.....	22

2.11. Fluida Dinamis .....	22
2.12. Filterasi.....	23
2.12.1 Pengolahan Air Minum Dengan Penyaringan Filterasi .....	24
2.13. Pengolahan Air Minum Dengan Pureit .....	25
2.14. Pemodelan Matematika .....	27

### **III. METODE PENELITIAN**

3.1. Waktu Dan Tempat Penelitian .....	28
3.2. Data Penelitian .....	28
3.3. Metode Penelitian.....	28
3.4. Prosedur Penelitian.....	29

### **IV. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN**

4.1. Hasil Penelitian .....	33
4.1.1 Percobaan Pertama .....	33
4.1.2 Percobaan Kedua.....	35
4.1.3 Percobaan Ketiga.....	38
4.2 Pembahasan.....	41

### **V. KESIMPULAN**

### **DAFTAR PUSTAKA**

## DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
2.1 Kategori PH Air .....	20
2.2 Komponen Puriet.....	26
2.3 Filter Karbon Aktif.....	26
2.4 Gambar Pureit .....	27
4.1 Air Hasil Penelitian .....	37
4.2 Air Hasil Penelitian Berdasarkan pH .....	50

## I. PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang dan Masalah

Pemodelan Matematika adalah salah satu tahap dari pemecahan masalah matematika. Model Matematika adalah suatu proses untuk menerjemahkan bahasa sehari-hari ke dalam bahasa matematika. Proses ini bertujuan agar variabel-variabel yang belum diketahui dapat dihitung dan di cari yaitu dengan menggunakan persamaan, pertidaksamaan, atau fungsi.

Salah satu model matematika yang cukup penting dalam perhitungan suatu masalah adalah persamaan differensial, persamaan diferensial merupakan suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih peubah terikat terhadap satu atau lebih peubah bebas.

Dalam hal ini sering muncul masalah dalam kehidupan sehari-hari yang dapat di selesaikan dengan menggunakan model mate-matika.

Dalam kehidupan manusia sehari-hari, air bersih di gunakan untuk berbagai keperluan, dari minum, mandi, cuci, masak, dan lainnya. Matematika pada umumnya selalu diterapkan dalam kehidupan sehari-hari yaitu pada abad modern ini banyak diterapkan untuk mengatasi masalah yang terjadi pada

lingkungan. Permasalahan ini yaitu mengatasi kekeruhan air karena berbagai macam faktor, dimana air merupakan kebutuhan primer dalam kehidupan.

Dalam kehidupan sehari-hari pada lingkungan masyarakat, timbul suatu permasalahan dengan adanya air yang keruh, baik air dilingkungan dari mata air pegunungan maupun air sumur yang harus segera diatasi karena merupakan kebutuhan utama. Untuk mengatasi permasalahan ini dilakukan pengolahan air filterasi. Filterasi adalah salah satu cara pengolahan air yang baik. Pada saat melakukan filterisasi perhitungan laju dan model sangat diperhatikan karena kedua hal tersebut merupakan factor yang mempengaruhi penyebab berfungsinya filter secara efisien.

Pentingnya pemisahan dan pemurnian inilah yang melatar belakangi percobaan, sehingga kita dapat mengetahui berapa laju kecepatan air yang diperlukan untuk memurnikan air tersebut. Agar hasil yang diperoleh untuk mengatasi krisis air dapat berkualitas yakni menghasilkan standar air siap konsumsi yang saat ini masih menjadi suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Maka dalam percobaan ini penulis tertarik untuk meneliti model laju penjernihan air dengan proses filterasi yang dikaitkan dengan rumusan persamaan diferensial biasa.

## 1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk :

1. Mengukur kualitas yang diproduksi air melalui model lajur penjernihan air dengan proses filterisasi yang di hitung dengan persamaan diferensial biasa.
2. Mengukur laju kecepatan air yang diproduksi melalui proses model Penjernihan air dengan menggunakan proses filterasi dalam selang waktu tertentu.
3. Mengukur laju aliran air yang diproduksi melalui proses model laju penjernihan air dengan proses filterasi pada waktu yang ditentukan.

## 1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat pada penelitian ini, antara lain:

1. Memberikan informasi tentang proses model laju penjernihan air dengan proses filterasi dengan perumusan persamaan differensial biasa.
2. Dapat mengembangkan atau menerapkan teori matematika dalam perhitungan proses laju penjernihan air dengan menggunakan cara filterisasi untuk praktisi pengusaha dan ilmuan.
3. Meningkatkan kualitas air agar menjadi jernih, menggunakan proses model laju penjernihan air dengan proses filterasi.
4. Mahasiswa mampu mengaplikasikan ilmu yang telah didapat di kampus Kedalam kehidupan sehari-hari.

#### **1.4 Batasan Penelitian**

Ada beberapa sistem proses pengolahan air diantaranya pengolahan air dengan proses ozonisasi, Ultra Violet, flokulasi sidimentasi dan filterasi. Penulis membatasi masalah yang akan dibahas yaitu pengolahan air dengan penjernihan melalui proses filterasi yang dikaitkan dengan teori persamaan diferensial biasa. Proses yang diamati dalam penelitian adalah bagaimana menyaring air sehingga menjadi air jernih dan dapat di konsumsi secara langsung. Data-data yang ada pada hasil pengamatan selanjutnya diolah sehingga diperoleh model Matematika. Dalam proses penelitian ini percobaan perlakuan dengan menggunakan secara alami dan menggunakan mesin air.



## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Peramaan Diferensial

Terdapat dua turunan dalam persamaan differensial yaitu turunan biasa dan turunan parsial, jika turunan fungsi itu hanya bergantung pada satu peubah bebas, maka disebut persamaan differensial biasa (*ordinary differential equation*), dan jika bergantung pada lebih dari satu peubah bebas disebut persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*).

#### 2.1.1 Peramaan Diferensial Biasa

Seperti yang telah dikemukakan dalam teorinya, persamaan diferensial dapat di bentuk dari pengkajian persoalan fisis yang di nyatakan secara matematis, persamaan diferensial muncul apabila ada konstanta sebarang dan dieliminasi dari suatu fungsi tertentu yang di berikan .

Contoh :

1. misalkan  $y = A \sin x + B \cos x$ , dengan A dan B konstanta sebarang.

Jika diferensialkan, kita peroleh :

$$\frac{dy}{dx} = A \cos x - B \sin x, \quad \text{dan} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -A \sin x - B \cos x$$

Yang tepat sama dengan semula, kecuali tandanya berlawanan, yaitu :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y \quad \text{menjadi} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

Ini adalah persamaan orde dua.

Dapat diperhatikan pada persamaan umum diferensial orde-n.

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}\right] = 0$$

Dengan F adalah fungsi dari peubah bebas x, peubah tak bebas y dan turunan y sampai orde-n dan penyelesaiannya dari persamaan diferensial untuk  $\frac{d''y}{dx^n}$  yang ditulis dalam bentuk :

$$\frac{d''y}{dx^n} = f\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right]$$

### 2.1.2 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial yang mengandung satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap lebih dari suatu peubah bebas. Persamaan tersebut merupakan laju perubahan terhadap dua atau lebih Variable bebas yang biasanya adalah waktu dan jarak (ruang).

Contoh :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{Ault dan Ayres, 1992: 231}).$$

## 2.2 Orde (tingkat) dan Derajat Suatu Persamaan Diferensial

Orde atau tingkat suatu persamaan *diferensial* adalah orde (tingkat) dari turunan yang terdapat pada persamaan diferensial dengan tingkatan yang paling tinggi. Sedangkan derajat persamaan diferensial dapat ditulis sebagai polinomial dalam turunan, adalah derajat turunan tingkat tertinggi yang terjadi (Ault dan Ayres, JR, 1992: 1).

Suatu persamaan diferensial biasa orde- $n$  adalah persamaan berbentuk :  $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$  yang menyatakan hubungan antara peubah bebas  $x$ , peubah tak bebas  $y(x)$  dan turunannya yaitu  $y', y'', \dots, y^n$ .

Jadi suatu persamaan diferensial disebut mempunyai orde (tingkat)  $n$  jika, turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial adalah turunan ke  $n$ .

Dan suatu persamaan diferensial disebut mempunyai derajat (*degree*)  $k$  jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu berderajat  $k$ .

Contoh :

1.  $x \frac{dy}{dx} + 5y = 6$  (orde satu, derajat satu)
2.  $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) + 4 \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) + \frac{dy}{dx} = \sin x$  (orde tiga, derajat satu)

Kemudian Perhatikan contoh berikut :

a.  $\frac{dy}{dx} - 3y = 2$  (orde satu)

b.  $\left[\frac{d^2 y}{dx^2}\right]^2 + x \left[\frac{dy}{dx}\right]^3 - 2y = 0$  (orde dua)

$$c. \left[ \frac{d^3 y}{dx^3} \right]^2 + \frac{d^2 y}{dx^2} - 2xy = 6 \quad (\text{orde tiga})$$

Dengan demikian,  $\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y^4 = 0$  adalah persamaan orde

Bentuk persamaan diferensial biasa orde  $n$  adalah persamaan yang mempunyai bentuk umum,  $F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = f(x)$

Dengan tanda aksent menunjukkan turunan terhadap  $x$  yaitu :

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \text{dan seterusnya.}$$

### 2.2.1 Persamaan diferensial biasa linier

Persamaan diferensial biasa linier (selanjutnya di sebut persamaan diferensial linier) orde  $n$  adalah persamaan diferensial yang memiliki pangkat satu dalam peubah tak bebas dan turunan-turunannya .

Bentuk umum persamaan diferensial linier orde  $n$  adalah sebagai berikut :

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \text{ dengan } a(x) \neq 0$$

Berdasarkan kelinierannya, terdapat persamaan diferensial linear dan non linier sehingga dari definisi di atas dapat di lihat bahwa persamaan diferensial disebut persamaan diferensial linier jika memenuhi kriteria berikut :

1. Peubah tak bebas dan turunannya hanya berpangkat satu.
2. Tidak ada perkalian antara peubah tak bebas dan turunan-turunannya.
3. Tak ada fungsi transenden dalam peubah tak bebas atau turunannya.

4.  $a_i(x)$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  masing-masing kontinu dalam  $x$  pada suatu interval.

Terdapat persamaan diferensial dengan koefisien konstan dan koefisien variabel (peubah).  $A_i(x)$  disebut koefisien persamaan diferensial, ketika koefisien-koefisien tersebut dalam bentuk konstanta, maka persamaan diferensial di katakan persamaan diferensial linier dengan koefisien konstanta, dan jika koefisien –koefisien tersebut berbentuk peubah, maka persamaan diferensial disebut persamaan diferensial linier dengan koefisien peubah.

Jika persamaan diferensial tidak dapat ditulis dalam kriteria di atas, maka

Persamaan-persamaan diferensial disebut persamaan diferensial non linier.

Contoh :  $\frac{dy}{dx} = xy + 1$  (linear)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \text{ (non linear, karena bentuk } y^2 \text{)}$$

Telah kita pelajari persamaan diferensial orde satu dan sekaligus aplikasinya pada beberapa fenomena fisika yang berhubungan dengan persoalan gaya, gerak jatuh bebas yang melibatkan gesekan udara.

### 2.2.2 Persamaan diferensial linear orde dua

Persamaan diferensial linear orde dua, tentunya menjadi lebih penting oleh karena ada persoalan-persoalan menarik yang harus diselesaikan dengan menggunakan PD tersebut. Pada penelitian ini, digunakan PD linear orde dua untuk dapat menyelesaikan model matematika.

Definisi persamaan diferensial linear orde dua berikut :

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = g(x)$$

Dengan  $a_0(x)$ ,  $a_1(x)$ ,  $a_2(x)$ , dan  $g(x)$  adalah fungsi-fungsi kontinu pada interval  $I$ . Jika fungsi-fungsi  $a_0(x)$ ,  $a_1(x)$ ,  $a_2(x)$  adalah konstanta, maka persamaan diferensial tersebut mempunyai koefisien konstanta, sebaliknya jika  $a_0(x)$ ,  $a_1(x)$ ,  $a_2(x)$  bukan konstanta, maka persamaan diferensial disebut koefisien variabel.

### 2.2.3 Persamaan diferensial homogen dan persamaan diferensial non homogen.

Berdasarkan bentuknya, terdapat persamaan diferensial homogen dan persamaan diferensial non homogen. Berdasarkan koefisiennya, persamaan di katakan homogen jika  $f(x) = 0$  untuk setiap nilai  $x$  dan jika  $f(x) \neq 0$  untuk suatu nilai  $x$ , maka persamaan di katakan non homogen. Persamaan diferensial orde dua dapat di bentuk menjadi :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \text{ dengan } P(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)},$$

$f(x) = \frac{g(x)}{a_0(x)}$  adalah kontinu pada interval  $I$ . Dan persamaan Homogen dapat

$$\text{di tulis menjadi } y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$$

persamaan diferensial linear orde dua dapat di selesaikan dengan menggunakan prinsip superposisi untuk persamaan homogen,

penyelesaiannya persamaan homogen yang dimaksud adalah

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Prinsip superposisi persamaan homogen yaitu jika  $y_1(x)$  dan  $y_2(x)$  adalah dua penyelesaian persamaan homogen linear  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

dengan  $c_1$  dan  $c_2$  konstanta sembarang, adalah merupakan solusi persamaan diferensial, diferensial tersebut pada interval I.

Contoh:

Apakah  $y_1(x) = \sin(x)$  dan  $y_2(x) = \cos(x)$  solusi kombinasi linear dari

$$y'' + y' = 0?$$

Jawab : Misal kombinasi linear  $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  sehingga

$y(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$  adalah solusi dari persamaan diferensial

$y'' + y' = 0$  sehingga penyelesaian umumnya adalah

$y(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$ , nilai  $C_1$  dan  $C_2$  di peroleh jika persamaan di berikan nilai awal. Keunikan penyelesaian persamaan diferensial homogen di peroleh jika di berikan nilai awal. Misalkan di berikan nilai awal

$y(0) = 1$  dan  $y'(x) = 1$  untuk persamaan  $y'' + y = 0$  maka penyelesaian umumnya di berikan oleh,  $y(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$  dan dengan memasukkan nilai awal, akan di peroleh nilai  $C_1$  dan  $C_2$ ,

$$y(0) = c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = 1, C_2=2, \text{ dan}$$

$$y'(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = 1, C_1=1$$

sehingga penyelesaian dari  $y'' + y = 0$  adalah  $y(x) = \cos(x) + \sin(x)$ .

Penyelesaian yang di peroleh pada persamaan linear, hanya terdiri dari tiga tipe penyelesaian, yaitu tidak ada solusi, terdapat solusi, dan banyak solusi.

Untuk menentukan penyelesaian suatu persamaan diferensial, maka penyelesaian persamaan tersebut harus memenuhi nilai awal yang di berikan.

Teorema :Eksistensi dan keunikan penyelesaian PD Linear

Jika  $p(x)$ ,  $q(x)$ , dan  $f(x)$  adalah fungsi kontinu pada interval terbuka  $(a,b)$  yang memuat  $x_0$ , maka untuk sembarang  $y_0$  dan  $y_1$  dapat memenuhi

$y'' + p(x)y' + q(x) = f(x)$  pada interval terbuka  $(a,b)$ , yang memenuhi

$y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y_1$ . Pada nilai awal berikut  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ,

$y(x_0) = y_0$ , mengasumsikan bahwa  $f$  dan  $\frac{df}{dy}$  adalah fungsi kontinu pada

$R = \{(x,y): a < x < b, c < y < d\}$  yang memuat titik  $(x_0, y_0)$ , maka masalah nilai awal tersebut mempunyai penyelesaian  $q(r)$  pada interval

$x_0 - h < x < x_0 + h$ , dimana  $h$  adalah bilangan positif.



### 2.2.4 Persamaan Homogen Dengan Koefisien Konstanta

Persamaan - persamaan **homogen linear** ordedua yaitu sebagai berikut ,

$$Ay'' + by' + cy = 0 \quad \dots\dots\dots 1)$$

dengan a, b, dan c adalah konstanta dan  $a \neq 0$ , persamaan (1)

dapat di selesaikandenganmemisalkan  $y = e^{mx}$ ,

$$\text{sehingga } a \frac{d^2(e^{mx})}{dx^2} + b \frac{d(e^{mx})}{dx} + ce^{mx} = 0$$

$$e^{mx} am^2 + e^{mx} bm + e^{mx} c = 0$$

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

oleh karena  $e^{mx} \neq 0$ , maka  $y(x) = e^{mx}$  adalah penyelesaian persamaan (1)

jika dan hanya jika memenuhi karakteristik,  $(am^2 + bm + c) = 0$

Dan penyelesaian dari persamaan karakteristik adalah

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{dan} \quad m_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Dengan  $D = b^2 - 4ac$

Penyelesaian khusus dari persoalan persamaan diferensial linear orde dua di atas bergantung kepada nilai Diskriminan D. Penyelesaian persamaan diferensial dapat di perhatikan pada persamaan umum diferensial orde-n,

$$F[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}] = 0$$

Dengan  $F$  adalah fungsi dari peubah bebas  $x$ , peubah tak bebas  $y$  dan turunan  $y$  sampai orde  $n$  dan penyelesaiannya dari persamaan diferensial untuk  $\frac{d^n y}{dx^n}$  yang ditulis dalam bentuk  $\frac{d^n y}{dx^n} = f\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right]$ .

Dilihat dari pemberian syarat untuk menyelesaikan persamaan diferensial tersebut dikenal dua masalah, yaitu masalah nilai awal (WNA) dan masalah nilai batas (WNB). Dalam penelitian ini, media yang dipakai adalah air (model laju penjernihan air).

Dalam kehidupan manusia pada keseharian, air bersih digunakan untuk berbagai keperluan, dari minum, mandi, cuci, masak dan lainnya. Matematika pada umumnya selalu diterapkan dalam kehidupan sehari-hari yaitu diberikan masalah nilai awal berikut  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ , mengasumsikan bahwa  $f$  dan  $\frac{df}{dy}$  adalah fungsi kontinu pada  $R = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$  yang memuat titik  $(x_0, y_0)$ , maka masalah nilai awal tersebut mempunyai penyelesaian  $q(r)$  pada interval  $x_0 - h < x < x_0 + h$ , dimana  $h$  adalah bilangan positif. abad modern banyak diterapkan untuk mengatasi masalah yang terjadi pada lingkungan dalam hal ini yaitu kekeruhan air karena berbagai macam faktor, padahal air merupakan kebutuhan primer dalam kehidupan, perumusandalam masalah ini yaitu tentang keujudan dan ketunggalan dengan cara di berikan persamaan diferensial  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  dimana :

1. fungsi  $f$  kontinu pada  $x$  dan  $y$  yang merupakan unsur dari  $D$  pada bidang  $xy$
2. turunan parsial  $\frac{df}{dy}$  juga fungsi kontinu pada  $x$  dan  $y$  dalam  $D$ .

(Kartono, 1994).

### 2.3 Linearitas Persamaan Diferensial

Berdasarkan kelinearitas (pangkat satu) dari peubah tak bebasnya persamaan diferensial dibagi dua yaitu linear dan non linear.

Dikatakan linear jika variabel terikatnya dan turunannya berpangkat 1 dengan koefisien konstanta atau koefisien yang tergantung pada variabel bebasnya. Jika tidak demikian maka persamaan diferensial tersebut dikatakan non linear.

Contoh :

$$1. \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (\text{linear})$$

$$2. y \frac{dy}{dx} + x = 0 \quad (\text{non linear})$$

(Ault dan Ayres, JR, 1992: 283).

### 2.4 Penggunaan Perumusan Integral Teori Eksponensial

Persamaan eksponen adalah suatu persamaan yang pangkatnya (eksponen), bilangan pokoknya dan eksponennya memuat suatu variabel. Bentuk-bentuk persamaan eksponen yang akan kita bahas yaitu :

$$V = v_0 e^{kt}$$

$$\frac{dv}{dt} = v_0 - v_t$$

$$dt = \frac{dv}{v_0 - v_t}$$

$$\frac{dv}{dt} = k \cdot v \quad \text{maka}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int k \cdot dt$$

$$\int \frac{dv}{dt} = \int k \cdot v$$

$$\ln v_0 = kt + c,$$

maka  $c = \ln v_0 - kt$ , dalam prosesnya waktu awal  $t = 0$ ,

sehingga  $c = \ln v_0 - k(0)$  jadi  $c = \ln v_0$

dimana  $V_0$  adalah nilai awal (in), dan  $V_t$  adalah nilai akhir (out)

## 2.5 Homogenitas Persamaan Diferensial Linear

Persamaan diferensial dikatakan homogen jika pada ruas kiri persamaan tersebut hanya mengandung variable terikat beserta turunannya, sedangkan pada ruas kanan yang tersisa hanya nol,  $f'(x) = 0$ . Jika di ruas kanan ada variable bebas atau konstanta maka persamaan diferensial tersebut dikatakan non-homogen,  $f'(x) \neq 0$ .

Contoh :

$$1. \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (\text{Homogen})$$

$$2. \frac{dy}{dx} + y^2 = 3x \quad (\text{Non homogen})$$

(Ault dan Ayres, JR, 1992: 255).

## 2.6 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

Suatu persamaan diferensial orde satu adalah suatu persamaan yang berbentuk :

$$a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x).$$

Kita selalau memisahkan bahwa koefisien-koefisien  $a_1(x)$ ,  $a_0(x)$  dan fungsi  $f(x)$  adalah fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang  $I$  dan bahwa koefisien  $a_1(x) \neq 0$  untuk semua  $x$  didalam  $I$ . Jika kita bagi ke dua ruas oleh

$a_1(x)$  dan menetapkan  $a_1(x) = a_1(x) / a_0(x)$  dan  $b(x) = f(x) / a_1(x)$ , kita peroleh persamaan diferensial yang sepadan.

$$y' + a(x)y = b(x).$$

dan inilah yang merupakan persamaan diferensial orde satu

(Finizio, N. and G. Ladas, 1988).

## 2.7 Persamaan Diferensial Linear Orde dua

Definisi persamaan diferensial linear orde dua berikut :

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = g(x)$$

Dengan  $a_0(x)$ ,  $a_1(x)$ ,  $a_2(x)$ , dan  $g(x)$  adalah fungsi-fungsi kontinu pada interval I. Jika fungsi-fungsi  $a_0(x)$ ,  $a_1(x)$ ,  $a_2(x)$  adalah konstanta, maka persamaan diferensial tersebut mempunyai koefisien konstanta,

Sebaliknya jika  $a_0(x)$ ,  $a_1(x)$ ,  $a_2(x)$  bukan konstanta, maka persamaan diferensial disebut koefisien variabel. Berdasarkan bentuknya, terdapat persamaan diferensial homogen dan persamaan diferensial non homogen.

Berdasarkan koefisiennya, persamaan di katakan homogen jika  $f(x)=0$  untuk setiap nilai  $x$  dan jika  $f(x) \neq 0$  untuk suatu nilai  $x$ , maka persamaan di katakan non homogen. Persamaan diferensial orde dua dapat di bentuk menjadi :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x)$$

Dengan  $P(x)=\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ ,  $q(x)=\frac{a_2(x)}{a_0(x)}$ ,  $f(x)=\frac{g(x)}{a_0(x)}$  adalah kontinu pada

interval  $I$ . Dan persamaan Homogen dapat di tulis menjadi  
 $y''+P(x)y'+q(x)y=0$

persamaan diferensial linear orde dua dapat di selesaikan dengan menggunakan prinsip superposisi untuk persamaan homogen, penyelesaiannya persamaan homogen yang dimaksud adalah:  
 $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$

## 2.8 Persamaan Diferensial Linear Orde $n$

Suatu persamaan diferensial linear orde  $n$  adalah persamaan yang berbentuk :

$$a_n(x) y^n + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x).$$

( 1 ) Kita selalu memisalkan bahwa koefisien-koefisien  $a_n(x)$ ,  $a_{n-1}(x)$ ,  $\dots$ ,  $a_0(x)$  dan fungsi  $f(x)$  merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang  $I$  dan bahwa koefisien pertama  $a_n(x) \neq 0$  untuk setiap  $x \in I$ . Selang  $I$  disebut *selang definisi (selang asal) dari persamaan diferensial itu*

( Finizio, N. and G. Ladas, 1988).

## 2.9 Pengertian Air

**Air** merupakan senyawa kimia yang sangat penting bagi kehidupan makhluk hidup di bumi ini. Fungsi air bagi kehidupan tidak dapat digantikan oleh senyawa lain. Penggunaan air yang utama dan sangat vital bagi kehidupan adalah sebagai air minum.

Tubuh kita kehilangan sekitar 250 mililiter air setiap hari, dan dokter menyarankan minum setidaknya delapan gelas setiap hari. Jika tidak, kita mengalami dehidrasi.

Air adalah senyawa yang penting bagi semua bentuk kehidupan yang diketahui sampai saat ini di Bumi. Air menutupi hampir 71% permukaan Bumi. Terdapat 1,4 triliun kilometer kubik (330 juta mil<sup>3</sup>) tersedia di Bumi. Air bersih penting bagi kehidupan manusia.

Pengelolaan sumber daya air yang kurang baik dapat menyebabkan kekurangan air, monopolisasi serta privatisasi dan bahkan menyulut konflik. Indonesia telah memiliki undang-undang yang mengatur sumber daya air sejak tahun 2004, yakni Undang Undang nomor 7 tahun 2004 tentang Sumber Daya Air. Meskipun air bukan zat gizi. Sekitar 60 -70% berat tubuh kita adalah air. Air terdapat dimana-mana dan setiap saat kita melihat dan terbiasa menggunakan air. Akan tetapi, apakah kalian mengetahui tentang sifat, kegunaan, daur air, dan peristiwa lainnya tentang air? Untuk itu, marilah kita mempelajarinya sehingga dapat memanfaatkan dengan sebaik-baiknya serta menjaga keseimbangan dan kelestariannya.



**Gambar 2.1**Kategori pH Air

Keterangan gambar 2.1 adalah menunjukkan pH air, pH adalah derajat keasaman yang digunakan untuk menyatakan tingkat keasaman atau kebasaaan yang dimiliki oleh suatu larutan. Semakin besar pH maka warna air semakin pekat ke arah warna ungu. Air layak dikonsumsi secara langsung pada posisi pH netral yaitu ditunjukkan dengan angka 7,00 sampai dengan pH. 11,00, untuk pH diatas 7,00, tentunya cara mengkonsumsinya terdapat aturan-aturan agar tidak menimbulkan dampak negatif pada lambung.

## 2.10 Kecepatan

Setiap benda yang bergerak mempunyai kecepatan. Kecepatan merupakan besaran Vektoryang pastinya mempunyai arah. Kecepatan suatu titik materi yang bergerak dapat ditentukan dari laju perubahan posisi titik itu setiap saat dalam hal ini air. Karena itu ada hubungan antara vektor posisi suatu titik materi dengan vektor kecepatannya.



misalkan  $\Delta r$  adalah perubahan jarak yang di timbulkan oleh partikel yang bergerak selama waktu  $\Delta t$ , maka kecepatan rata-rata di definisikan

$$v_r = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

oleh karena kecepatan sesaat adalah rata-rata kecepatan pada

$\lim_{\Delta \rightarrow 0}$ , maka :

$$v = \lim_{\Delta \rightarrow 0} V_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Sehingga diperoleh  $V = \frac{dx}{dt}$

### 2.10.1`Kecepatan Rata-rata

Kecepatan rata-rata ( $V_{\text{rata-rata}}$ ) merupakan hasil bagi perpindahan dengan selang waktu, dan secara matematis dapat dituliskan :

$$V_{\text{rata-rata}} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1}$$

Dengan  $r_2$  adalah posisi pada saat  $t = t_2$ , dan  $r_1$  adalah posisi pada saat  $t = t_1$ , jika  $\Delta r = \Delta X i + \Delta y j$ , akan berlaku persamaan sebagai berikut :

$$\checkmark V_{\text{rata-rata}} = \frac{\Delta X i + \Delta y j}{\Delta t} = \frac{\Delta X}{\Delta t} i + \frac{\Delta y}{\Delta t} j$$

$$\checkmark V_{\text{rata-rata}} = V_x i + V_y j$$

$$\checkmark \text{ Dengan } V_{\text{rata-rata}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \text{ atau } V_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}$$

Keterangan :

$$\checkmark V_{\text{rata-rata}} = \text{Vektor kecepatan rata-rata ( m/s )}$$

$$\checkmark V_x \text{ rata-rata} = \text{Komponen kecepatan rata-rata pada sumbu x ( m/s )}$$

$$\checkmark V_y \text{ rata-rata} = \text{Komponen kecepatan rata-rata pada sumbu y ( m/s )}$$

### 2.10.2 Kecepatan Sesaat

Kecepatan sesaat adalah kecepatan rata-rata untuk selang waktu  $\Delta t$  secara matematis dapat ditulis sebagai berikut :

$$V \text{ rata-rata} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V = \pi r^2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

Untuk gerak titik materi pada suatu bidang kecepatan sesaat titik itu sebagai

$$\text{berikut : } V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V = \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} i + \frac{\Delta y}{\Delta t} j \right)$$

$$V = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j$$

Karena komponen kecepatan

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \text{ dan } V_y = \frac{dy}{dt},$$

kecepatan sesaat pada benda dapat ditulis sebagai berikut :

$$V = V_x i + V_y j$$

Jadi besar kecepatan titik materi dapat dituliskan :

$$V = | V | = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

### 2.11 Fluida Dinamis

Fluida dinamis adalah fluida (bisa berupa zat cair, gas) yang bergerak. Untuk memudahkan dalam pembelajaran, fluida disini dianggap mempunyai kecepatan yang konstan terhadap waktu, tak termampatkan (tidak mengalami perubahan volume), tidak kental, tidak turbulen (tidak mengalami putaran-putaran). Aliran fluida sering dinyatakan dalam debit. Debit adalah banyaknya volume zat cair yang mengalir pada tiap satu satuan waktu, biasanya dinyatakan dalam satuan liter/detik atau dalam satuan meter kubik ( $m^3$ ) per detik.

$$Q = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Dimana :

Q = debit aliran (m<sup>3</sup>/s)

v = volume (m<sup>3</sup>)

t = selangwaktu (s) ( Setiawan, 2015 ).

## 2.12 Filtrasi

Filtrasi adalah proses penyaringan air melalui media pasir atau bahan sejenis untuk memisahkan partikel flok atau gumpalan yang tidak dapat mengendap, agar diperoleh air yang jernih.

Penyaring adalah pengurangan lumpur tercampur dan partikel koloid dari air limbah dengan melewatkan pada media yang porous. Kedalaman penyaringan menentukan derajat kebersihan air yang disaringnya pada pengolahan air untuk minum.

### \* Mekanisme yang dilalui pada filterasi:

1. Air mengalir melalui penyaring granular
2. Partikel-partikel tertahan di media penyaring
3. Terjadi reaksi-reaksi kimia dan bio

### 2.12.1 Pengolahan Air Minum Dengan Penyaringan Filterasi

Konsep dasar dari pengolahan air dengan cara penyaringan adalah memisahkan padatan atau koloid dari air dengan menggunakan alat penyaring, atau saringan. Air yang mengandung padatan, dilewatkan pada media saring dengan ukuran pori-pori atau lubang tertentu. Ukuran pori atau lubang saringan harus lebih kecil dari ukuran bahan padatan yang akan dipisah.

Pada proses pengolahan air minum, air limbah, air kotor, penyaringan air

Ini biasanya merupakan tahap awal, atau tahap lanjutan.

perumusan dalam masalah ini yaitu tentang keujudan dan ketunggalan

dengan cara di berikan persamaan diferensial  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  dimana :

1.fungsi  $f$  kontinu pada  $x$  dan  $y$  yang merupakan unsur dari  $D$  pada bidang  $xy$ .

2.turunan parsial  $\frac{df}{dy}$  juga fungsi kontinu pada  $x$  dan  $y$  dalam  $D$ .

Pada pengolahan tertentu, penyaringan dilakukan setelah proses koagulasi, atau penggumpalan. Di sini penyaringan merupakan tahap lanjutan dari proses koagulasi.

Beberapa bahan padat dapat dilihat secara langsung karena terapung di permukaan air, seperti ranting, daun, batang tanaman, sampah rumah tangga, dan sebagainya. Beberapa bahan padat lainnya mungkin tidak akan terlihat dengan mudah, seperti potongan logam, atau bahan lain yang memiliki densitas lebih besar dari pada air.

Untuk bahan padat yang berukuran besar, dapat disaring dengan saringan kasar atau sedang menggunakan pasir kasar pada proses penyaringan awal. Bahan padat yang berukuran sangat kecil, atau sangat halus dan yang terlarut, mungkin akan lebih baik jika dilakukan proses koagulasi terlebih dahulu. Hasil proses koagulasi merupakan endapan berukuran relative besar. Baru kemudian dilakukan penyaringan untuk memisah produk koagulasi dari air.

### **2.13 Pengolahan air minum dengan pureit**

Pureit adalah alat pemurni air di rumah-rumah. Hasil dari pengolahan air dapat langsung dikonsumsi. Konsep dasar dari pengolahan air dengan carapureit adalah menghilangkan kotoran yang terlihat, membunuh semua bakteri, virus dan parasit yang berbahaya.

Pureit mempunyai “Germkill Life Indicator” unik yang akan memberi tahu bahwa air yang dihasilkan aman higienis. Germkill Life Indicator merupakan perangkat pembunuh kuman. Germkill Life Indicator ini juga memberitahukan jika air yang dihasilkan sudah tidak aman untuk dikonsumsi. Pada pureit memiliki jaminan keamanan yaitu memiliki mekanisme penghentian otomatis yang akan menghentikan aliran air pureit saat Germkill telah habis.

Pureit memenuhi kriteria pembunuhan kuman terketat yang ditetapkan badan pengatur di Amerika Serikat yaitu Enviromental Protection Agency (EPA).

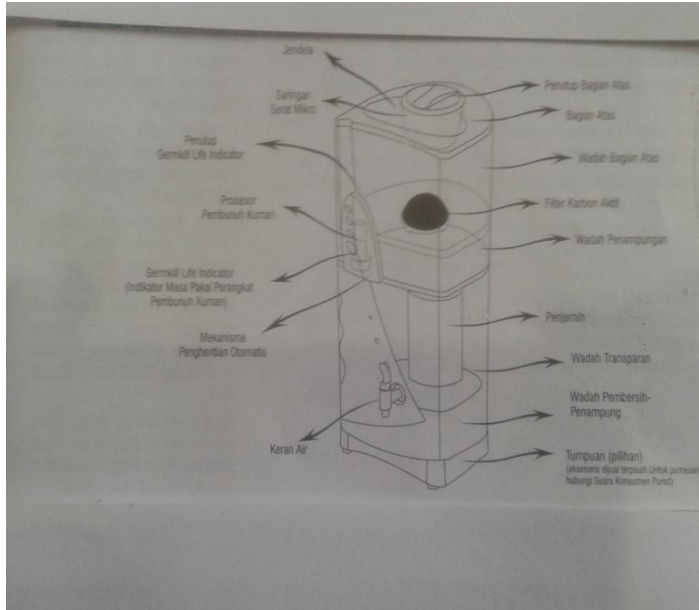
Hasil air yang diproses dengan pureit jernih tidak berbau dan rasa yang alami dan senantiasa memberi perlindungan menyeluruh dari kuman.



**Gambar 2.2** Komponen Pureit



**Gambar 2.3** Filter Karbon Aktif



**Gambar 2.4** Gambar pureit

## 2.14 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk merepresentasikan dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau problem pada dunia real dalam pernyataan matematik, sehingga diperoleh pemahaman dari problem dunia real ini menjadi lebih tepat. Representasi matematika yang dihasilkan dari proses ini dikenal sebagai Model Matematika. Kontruksi, analisis penggunaan model matematika dipandang sebagai salah satu aplikasi matematika yang sangat penting. Ada dua tipe matematika yaitu model bertipe deterministik dan model bertipe empirik. Model deterministik merupakan suatu model matematika yang dibangun dengan berlandaskan hukum-hukum atau sifat-sifat yang berlaku pada sistem. Sedangkan model empirik cenderung kepada faktor yang diberikan oleh sistem atau data (Widowati, 2007).

### **III. METODOLOGI PENELITIAN**

#### **3.1 Waktu dan Tempat Penelitian**

Penelitian ini akan dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2015/2016 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

#### **3.2 Data Penelitian**

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data model laju penjernihan air ( real data ). Dimana real data yaitu melakukan filterisasi air dari sumber awal untuk mendapatkan kualitas air standar air untuk konsumsi memasak.

#### **3.3 Metode Penelitian**

Penelitian ini di lakukan secara studi pustaka dengan cara mempelajari buku-buku teks yang terdapat di perpustakaan Universitas Lampung, langkah pertama menentukan laju air dengan menggunakan persamaan differensial biasa kemudian akan di lakukan filterasi lanjutan dengan menggunakan alat penjernih air yaitu pureit, dan dalam filterasi lanjutan ini akan di aplikasikan differensial biasa untuk menentukan laju air yang di hasilkan oleh alat tersebut.



Tahapan penelitian ini adalah pertama-tama mendisain filter dengan menggunakan tabung paralon dan kain saringan tahu dan menyiapkan tangki tandon, kemudian menyiapkan mesin pompa air semi jet dengan model : jet108BLT dengan mesin daya 125 watt, lalu menyiapkan 1 drum air 1 drum air dengan kapasitas 300 liter dan menyiapkan sebuah selang air.

Kemudian setelah air bersih dan naik ke permukaan maka kecepatan air akan dihitung dengan menggunakan fluid dinamis dan air akan diendapkan di drum yang telah disiapkan lalu akan dilakukan filterasi lanjutan dengan menggunakan puiret, akan diaplikasikan oleh persamaan diferensial biasa untuk mencari laju air nya.

### **3.4 Prosedur penelitian**

Proses filterasi pertama dengan menggunakan mesin pompa air dan kain saringan tahu sebagai media untuk menfilter air .

Berikut ini adalah prosedur penelitian yang akan dilakukan oleh peneliti:

1. menyiapkan bahan dan peralatan yang akan di gunakan dalam penelitian, yaitu :
  - a. Pompa air semi jet dengan model 108 BLT, dengan Mesin daya : 125 watt, digunakan untuk membersihkan air yang keruh.
  - b. Menyiapkan drum yang berbentuk tabung dengan kapasitas 300 liter dan mesin menjernih air pureit berbentuk setengah lingkaran yang berfungsi sebagai penjernih air yang melalui tahapan-tahapan tertentu sehingga menjadi air yang dapat dikonsumsi.

- c. Mendesain filter dengan menggunakan bahan yakni tabung paralon dan kain saringan tahu sebagai bahan untuk menfilter air.
  - d. Mendesain rancang bangun yang digunakan untuk membersihkan sumber air filterasi lanjutan .
  - e. Dari air yang sudah diendapkan dari proses filterasi pertama akan di lakukan proses filterasi lanjutan.
2. Filterasi lanjutan yang di lakukan yaitu melalui proses pengolahan air menggunakan alat penjernih air puriet. Alat *filterasi pureit* berukuran tinggi 57 cm atau 0,57 m, berjari-jari 14 Cm atau 0,14 m, dan memiliki penampang yang bentuknya setengah lingkaran, pada proses ini melalui beberapa tahapan-tahapan tertentu yaitu melalui cara :
- a. Menuangkan air yang sudah di olah sebelumnya menggunakan pompa air semi jett kedalam alat pureit sebanyak 300 liter air. Dalam proses ini air akan mengalir melalui saringan serat mikro untuk menghilangkan kotoran.
  - b. Lalu secara otomatis air akan melalui bagian untuk “filter karbon aktif“ untuk menghilangkan pestisida dan parasit-parasit berbahaya.
  - c. Selanjutnya air akan mengalir menuju “proses pembunuh kuman “proses ini pada proses ini yaitu dimana adalah “teknologi pembunuh kuman terprogram “ dalam hal ini berfungsi untuk membunuh semua bakteri dan virus berbahaya yang tidak terlihat.
  - d. Pada proses akhir, air akan melalui ‘penjernih’ yang di desain secara khusus untuk menghilangkan semua zat pembunuh kuman,

sehingga menghasilkan air yang jernih, tidak berbau dengan rasa yang alami .

- e. Setelah proses filtrasi air lanjutan selesai maka dapat dihitung laju air dengan menggunakan persamaan differensial biasa.

during waktu  $\Delta t$ , sehingga di peroleh kecepatan rata-rata yang di definisikan :

$$V_r = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Oleh karena kecepatan sesaat adalah rata-rata kecepatan pada  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

maka :  $V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ , sehingga akan di peroleh  $v = \frac{dx}{dt}$

Kecepatan sesaat adalah kecepatan rata-rata untuk selang waktu  $\Delta t$  secara matematis dapat ditulis sebagai berikut :

$$V \text{ rata-rata} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

Untuk gerak titik materi pada suatu bidang kecepatan sesaat titik itu sebagai

$$\text{berikut : } V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v = \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} i + \frac{\Delta y}{\Delta t} j \right)$$

$$V = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j$$

Karena komponen kecepatan

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \text{ dan } V_y = \frac{dy}{dt},$$

kecepatan sesaat pada benda dapat ditulis sebagai berikut :

$$V = V_x i + V_y j$$

Jadi besar kecepatan titik materi dapat dituliskan :

$$V = | \mathbf{V} | = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

Dimana :

$V_{\text{rata-rata}}$  = Vektor kecepatan rata-rata ( m/s )

$V_{x \text{ rata-rata}}$  = Komponen kecepatan rata-rata pada sumbu  
x ( m/s )

$V_{y \text{ rata-rata}}$  = Komponen kecepatan rata-rata pada sumbu  
y ( m/s )

$\Delta V$  = perubahan volume air

$\Delta t$  = lamanya waktu yang dibutuhkan untuk memurnikan air. Serta menggunakan mesin pompa dengan kapasitas yang relevan (kecil).

- f. Kemudian menyelesaikan laju kecepatan air tersebut dan memodelkan laju aliran air.

## V. KESIMPULAN

1. Laju kecepatan yang dihasilkan dengan menggunakan mesin maupun secara alami adalah dengan posisi dua tangki yang sejajar 0,2941 L/s dengan laju aliran 1,5528 m/s dan menggunakan bahan kain saringan tahu sebanyak 15 lilitan yaitu 0,00595 L/s dan laju aliran 0,015791 m/s
2. Laju kecepatan air alat penjernih air *pureit* yaitu 0,00369 L/s dan laju aliran 0,05694 m/s
3. Pada air sumur bor diperoleh warna kuning atau black coffee setelah ditetesi lakmus menunjukkan air tidak layak dikonsumsi karena memiliki Ph 5,8. Setelah diproses melalui mesin dan saringan tahu berwarna hijau setelah ditetesi lakmus berarti pH pada posisi 6,8. sehingga air masih belum layak dikonsumsi
4. Pada air yang diproses dengan pureit menghasilkan air yang berwarna biru setelah ditetesi lakmus menandakan pH 8,8, sehingga air dapat dikonsumsi secara langsung tanpa dimasak.

## DAFTAR PUSTAKA

- Ault, J.C and Frank Ayres, JR. 1992. *Persamaan Differensial*. Erlangga. Jakarta.
- Finizio, N. and G. Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Erlangga. Jakarta. 103.
- <http://www.enviro.bppt.go.id/~Kel-1>.
- Kartono. 1994. *Penuntun Belajar Persamaan Diferensial*. Andi Offset. Yogyakarta.
- Puwoko, F. 2002. *Fisika*. Yudhistira Perpustakaan Nasional. Jakarta.
- Sugiyono. 2014. *Metode Penelitian Kuantitatif Kualitatif dan R & D*. Alfabeta CV. Bandung.
- Supriyadi, H. 2010. *Matematika Dasar*. Universitas Gajah Mada .Yogyakarta
- Tim Penulis buku Olimpiade Matematika. 2010. *Bahan Ajar Matematika Sains Internasional*. CV Zamrud Kemala. Jakarta.
- Toni, S. 2015. *Fluida Dinamis*. Yudistira. Jakarta.
- Widowati. 2004. *Pemodelan Matematika*. Diktat Kuliah Jurusan Matematika. Jakarta.
- Putro, W.S.E. 2012. *Teknik Penyusunan Instrumen Penelitian*. Pustaka Pelajar. Yogyakarta.