

**ANALISIS INTERVENSI DENGAN FUNGSI *STEP* DAN APLIKASINYA
TERHADAP DATA INDEKS HARGA KONSUMEN (IHK)
KOTA BANDAR LAMPUNG**

(Skripsi)

Oleh

ANISA RAHMAWATI



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2016**

ABSTRACT

INTERVENTION ANALYSIS BY STEP FUNCTION AND ITS APPLICATION ON DATA CONSUMER PRICE INDEX (CPI) IN BANDAR LAMPUNG

By

Anisa Rahmawati

Analysis of intervention is one of time series analysis to model time series data that is experiencing an event with a time of intervention known occurrences. An event experienced time series data can significantly impact or no significant effect on the behavior of time series data. In general, there are two kinds of functions in the analysis of intervention are the step function and pulse function. The aims of this study is analyze and predict the impact of intervening events experienced by the data consumer price index (CPI) in Bandar Lampung January 2009 - January 2016 with intervention analysis step function. The best model to forecast the CPI data in Bandar Lampung January 2009 - Januari 2016 is ARIMA (1,1,0) as a model before the intervention and response to intervention order $b = 0$, $s = 2$, $r = 0$. The results of forecasting the CPI data showed that the forecasting gained significantly for six months period from the last data and forecasting errors are random.

Key Words : ARIMA, Intervention Analysis by Step Function, CPI data in Bandar Lampung.

ABSTRAK

ANALISIS INTERVENSI DENGAN FUNGSI STEP DAN APLIKASINYA TERHADAP DATA INDEKS HARGA KONSUMEN (IHK) KOTA BANDAR LAMPUNG

Oleh

Anisa Rahmawati

Analisis intervensi merupakan salah satu analisis dalam deret waktu untuk memodelkan data deret waktu yang mengalami suatu kejadian intervensi dengan waktu kejadian diketahui. Suatu kejadian yang dialami data deret waktu dapat mempengaruhi secara signifikan atau tidak signifikan terhadap perilaku data deret waktu. Secara umum, ada dua macam fungsi dalam analisis intervensi, yaitu fungsi *step* dan fungsi *pulse*. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisa dan meramalkan dampak kejadian intervensi yang dialami data Indeks Harga Konsumen (IHK) Kota Bandar Lampung Januari 2009 – Januari 2016 dengan analisis intervensi fungsi *step*. Model terbaik untuk meramalkan data IHK Kota Bandar Lampung Januari 2009 – Januari 2016 adalah ARIMA (1,1,0) sebagai model sebelum intervensi dan orde respon intervensi $b = 0$, $s = 2$, $r = 0$. Hasil peramalan pada data IHK menunjukkan bahwa peramalan yang diperoleh signifikan untuk periode enam bulan kedepan dari data terakhir dan galat peramalan bersifat acak.

Kata Kunci : ARIMA, Analisis Intervensi Fungsi *Step*, IHK Kota Bandar Lampung.

**ANALISIS INTERVENSI DENGAN FUNGSI STEP DAN APLIKASINYA
TERHADAP DATA INDEKS HARGA KONSUMEN (IHK) KOTA BANDAR
LAMPUNG**

Oleh

ANISA RAHMAWATI

Skripsi

**Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS**

Pada

**Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2016**

Judul Skripsi

: **ANALISIS INTERVENSI DENGAN
FUNGSI *STEP* DAN APLIKASINYA
TERHADAP DATA INDEKS HARGA
KONSUMEN (IHK) KOTA BANDAR
LAMPUNG**

Nama Mahasiswa

: **Anisa Rahmawati**

Nomor Pokok Mahasiswa

: 1217031010

Jurusan

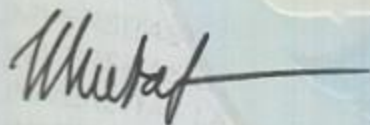
: Matematika

Fakultas

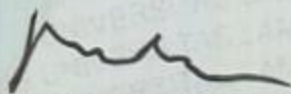
: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

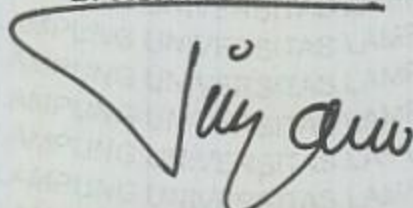


Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.
NIP 19570101 198403 1 020



Drs. Rudi Ruswandi, M.Si.
NIP 19560208 198902 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika



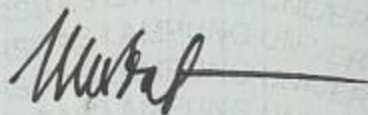
Drs. Tiryo Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

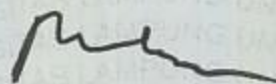
Ketua

: **Mustofa Usman, Ph.D.**



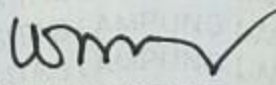
Sekretaris

: **Rudi Ruswandi, M.Si.**



Penguji

Bukan Pembimbing : **Ir. Warsono, Ph.D.**



2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.

NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **23 September 2016**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Anisa Rahmawati**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1217031010**

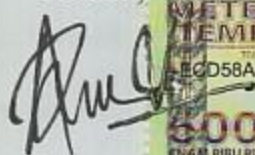
Judul : **ANALISIS INTERVENSI DENGAN FUNGSI
STEP DAN APLIKASINYA TERHADAP DATA
INDEKS HARGA KONSUMEN (IHK)
KOTA BANDAR LAMPUNG**

Jurusan : **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, September 2016

Penulis,



Anisa Rahmawati
NPM. 1217031010

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 23 Januari 1994, sebagai anak bungsu pasangan Bapak Sarnubi Hz S.H., (alm) dan Ibu Farida (almh).

Pendidikan Sekolah Dasar (SD) Negeri 1 Labuhan Dalam diselesaikan pada tahun 2006, Sekolah Menengah Pertama (SMP) Negeri 8 Bandar Lampung diselesaikan pada tahun 2009, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) Negeri 13 Bandar Lampung diselesaikan pada tahun 2012.

Tahun 2012 penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN tulis. Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif dalam organisasi kemahasiswaan tingkat jurusan yaitu Sekertaris Umum Gematika 2012-2013, anggota bidang kaderisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) periode 2013-2014, dan Anggota kaderisasi Pers Mahasiswa Natural 2012-2013. Pada tahun 2015 penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di Kantor Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung, pada tahun yang sama penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Gunung Timbul, Kecamatan Tumijajar, Tulang Bawang Barat, Lampung.

MOTTO

*“Karena Sesungguhnya bersama setiap kesulitan ada kemudahan”
(Al-Insyirah: 5)*

*“Allah tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan
kesanggupannya”
(Al-Baqarah: 286)*

*“Belajar dari hari kemarin, hidup untuk hari ini, dan berharap untuk hari esok”
(Albert Einstein)*

PERSEMBAHAN

Dengan penuh rasa syukur kepada Allah SWT, penulis persembahkan karya kecil dan sederhana ini sebagai tanda bakti dan cinta kepada semua orang yang senantiasa mendukung dan dengan tulus mendoakan kelancaran terciptanya karya ini.

Papa (alm.), Mama (almh), Cici, Pakcik, Bibi, Mamang, Abang, Ayuk, Kakak, dan keluarga yang telah memberikan banyak masukan dan pengarahannya serta menjadi motivasi terbesar selama ini

Dosen Pembimbing dan Penguji yang senantiasa mengarahkan dan memberi motivasi kepada penulis

Sahabat-sahabat yang selalu ada. Terima kasih atas keceriaan, semangat, serta motivasi yang diberikan kepada penulis.

Almamater penulis Universitas Lampung

SANWACANA

Syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadiran Allah SWT, karena atas rahmat dan ridho-Nya jualah penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “ANALISIS INTERVENSI DENGAN FUNGSI STEP DAN APLIKASINYA TERHADAP DATA INDEKS HARGA KONSUMEN (IHK) KOTA BANDAR LAMPUNG” tepat pada waktunya. Shalawat beriring salam kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW yang telah menjadi suri tauladan yang baik bagi kita semua. Selesaiannya penulisan skripsi ini adalah juga berkat motivasi dan pengarahan serta bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis ingin menyampaikan terimakasih kepada :

1. Bapak Mustofa Usman, Ph.D., selaku pembimbing pertama, terimakasih atas setiap bimbingan, kesabaran dalam memberikan arahan, semangat, serta dukungan dalam proses penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Drs. Rudi Ruswandi, M.Si., selaku pembimbing kedua, yang selalu sabar dalam memberi pengarahan, semangat dan bahkan dukungan.
3. Bapak Ir. Warsono, Ph.D., selaku penguji yang telah memberikan kritik, saran, dan masukan kepada penulis.
4. Ibu Dra. Dorrah Azis, M.Si., selaku pembimbing akademik yang selalu memberikan masukan dan bimbingan dalam menjalani perkuliahan.

5. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D., selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Tenaga Kependidikan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung yang telah memberikan ilmu pengetahuan dan bantuan kepada penulis.
8. Papa (alm), Mama (almh), Cicik, Pakcik, Bibi, Mamang, Abang, Ayuk, Kakak, dan keluarga tercinta yang memberi semangat, dukungan dan doa yang tak pernah henti.
9. Sahabat-sahabat penyemangat: Lina, Merda, Grita, Sella, Citra, Hana, Oci, Kiki, Nina, Nida, Devi, Mahap.
10. Teman-teman sebangkisan: Anggryani, Selvi, Erni, Ernia, Suyanti, Maya, Rohimatul, Riyama, Mbed, Rendi yang telah berjuang bersama. Gery, Yefta yang tidak pernah sungkan membagi ilmunya.
11. Teman-teman Matematika angkatan 2012 yang tidak dapat disebutkan satu persatu.
12. Keluarga Besar HIMATIKA dan Natural Universitas Lampung
13. Seluruh pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Bandar Lampung, September 2016

Penulis,

Anisa Rahmawati

DAFTAR ISI

	Halaman
DAFTAR TABEL	x
DAFTAR GAMBAR	xi
 I. PENDAHULUAN	
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Batasan Masalah	4
1.3. Tujuan Penelitian.....	4
1.4. Manfaat Penelitian.....	5
 II. TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Indeks Harga Konsumen	6
2.2 Data Deret Waktu.....	6
2.3 Stasioneritas	7
2.3.1 Stasioner pada Nilai Tengah	8
2.3.2 Stasioner pada Ragam	9
2.4 Fungsi autokorelasi	10
2.5 Fungsi Autokorelasi Parsial	14
2.6 <i>White Noise</i>	18
2.7 Uji <i>unit Root</i>	20
2.8 Model <i>Autoregressive Integrated Moving Average</i>	22
2.8.1 Proses <i>Autoregressive</i>	22
2.8.1.1 Order Pertama <i>Autoregressive</i>	22
2.8.1.2 <i>Autoregressive order p</i>	24
2.8.2 Model <i>Moving Average</i>	25
2.8.2.1 Order Pertama <i>Moving Average</i>	27
2.8.3 Model <i>Autoregressive Moving Average</i> (ARMA)	27
2.8.4 Model <i>Autoregressive Integrated Moving Average</i>	28
2.9 Model Fungsi Transfer ditambah <i>Noise</i>	28
2.10 Analisis Model Intervensi	32
2.10.1 Pengelompokkan Data	34
2.10.2 Model <i>Noise</i>	34
2.10.3 Identifikasi Respon Intervensi.....	35

2.10.4 Estimasi Parameter Model Intervensi	37
2.11 Prosedur <i>Box-Jenkins</i>	39

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian	46
3.2 Data Penelitian	46
3.3 Metode Penelitian.....	46

VI. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Aplikasi pada Data Indeks Harga Konsumen (IHK) Bulanan dengan Perubahan Harga Tahun Dasar Kota Bandar Lampung Januari 2009 - Januari 2016	49
4.1.1 Pengelompokkan Data.....	50
4.1.2 Pemodelan ARIMA Data Pre-Intervensi.....	51
4.1.2.1 Identifikasi Model ARIMA	51
4.1.2.2 Estimasi Parameter Model ARIMA	55
4.1.2.3 Evaluasi Model ARIMA	56
4.1.3 Model Intervensi.....	58
4.1.3.1 Identifikasi Respon Intervensi	58
4.1.3.2 Estimasi Parameter Respon Intervensi	60
4.1.3.3 Evaluasi Model Intervensi.....	65
4.1.4 Peramalan	67

V. KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
1.1 Plot data deret waktu IHK Bulanan Kota Bandar Lampung.....	2
1.2 Plot ACF IHK Bulanan Kota Bandar Lampung.....	2
1.3 Plot <i>Box-Cox</i> IHK Bulanan Kota Bandar Lampung.....	3
2.1 Grafik Pola Variabel Input.....	36
2.2 <i>Abrupt Permanent</i>	36
2.3 <i>Gradual Permanent</i> $0 < \delta < 1$	36
2.4 <i>Gradual Permanent</i> $\delta = 1$	37
4.1 Plot data deret waktu IHK Bulanan Kota Bandar Lampung Januari 2009 – Januari 2016.....	50
4.2 Plot data deret waktu IHK Bulanan Kota Bandar Lampung Januari 2009 – Desember 2013 (n=60).....	51
4.3 Plot <i>Box – Cox</i> data deret waktu IHK Bulanan Kota Bandar Lampung Januari 2009 – Desember 2013 (n=60).....	52
4.4 Plot ACF dan PACF data deret waktu IHK Bulanan Kota Bandar Lampung Januari 2009 – Desember 2013 (n=60).....	53
4.5 Plot diferensiasi data deret waktu IHK Bulanan Kota Bandar Lampung Januari 2009 – Desember 2013 (n=60).....	53
4.6 Plot evaluasi model data deret waktu IHK Bulanan Kota Bandar Lampung Januari 2009 – Desember 2013 (n=60).....	56
4.7 Plot Normal data deret waktu IHK Bulanan Bandar Lampung (n=60)	57
4.8 Plot deret waktu IHK Bulanan Kota Bandar Lampung Januari 2009- Januari 2016.....	58
4.9 Plot Residual IHK Bulanan Kota Bandar Lampung Januari 2009- Januari 2016.....	59
4.10 Plot evaluasi model data deret waktu IHK Bulanan Kota Bandar Lampung Januari 2009 – Januari 2016.....	65
4.11 Plot Normal data deret waktu IHK Bulanan Bandar Lampung (n=85)	66
4.12 Plot Peramalan data deret waktu IHK Bulanan Kota Bandar Lampung Januari 2009 – Januari 2016.....	68
4.13 Plot ACF pada <i>error</i>	69
4.14 Plot kenormalan pada <i>error</i>	70

DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
2.1 Transformasi Parameter <i>Box-Cox</i>	10
2.2 Pola ACF dan PACF Untuk Model ARIMA	39
4.1 Hasil <i>output</i> program R Uji ADF	52
4.2 Hasil <i>output</i> program R Uji ADF Diferensiasi	54
4.3 Hasil <i>output</i> program R Penentuan Model	55
4.4 Pendugaan Parameter ARIMA (1,1,0).....	55
4.5 Hasil <i>output</i> program R Uji Normal Preintervensi	57
4.6 Pendugaan Parameter Model Intervensi $s = 3$	64
4.7 Pendugaan Parameter Model Intervensi $s = 0$	65
4.8 Hasil <i>output</i> program R Uji Normal Data IHK	66
4.9 Hasil <i>output</i> program R Peramalan.....	67
4.10 Peramalan IHK Bulanan Kota Bandar Lampung Februari - Juli 2016.	67
4.11 Peramalan <i>error one-step-ahead</i>	68

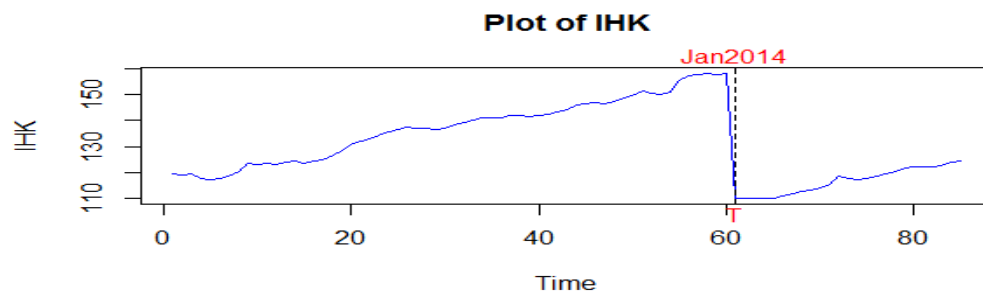
I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Sekumpulan data yang diperoleh dari hasil penelitian atau observasi pada periode waktu tertentu dikenal sebagai data deret waktu. Data deret waktu ini bersifat saling berkorelasi antar variabelnya yang artinya data pada masa saat ini dan yang akan datang dipengaruhi oleh data pada masa lalu. Sehingga, data deret waktu ini digunakan untuk data dalam peramalan. Ramalan adalah suatu kondisi yang diperkirakan akan terjadi pada masa yang akan datang.

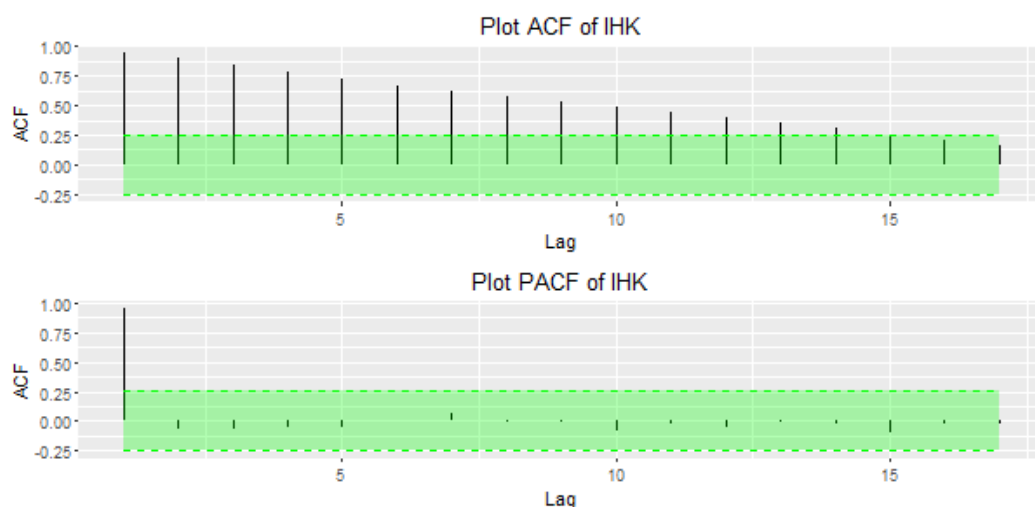
Dalam analisisnya, data deret waktu memiliki beberapa metode peramalan, diantaranya *Autoregressive (AR)*, *Moving Average (MA)*, *Autoregressive Moving Average (ARMA)*, dan *Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA)*. ARIMA sering juga disebut sebagai model Box-Jenkins karena dikembangkan oleh George EP Box dan Gwilym M Jenkins (1976). Data deret waktu memiliki karakteristik khusus, yaitu stasioneritas yang artinya residual bersifat homoskedastisitas, tidak berkorelasi antar residual satu dengan yang lainnya, dan tidak ada korelasi antar variabel independen yang satu dengan yang lainnya.

Data Indeks Harga Konsumen (IHK) mengalami kejadian internal, yaitu berupa kebijakan pemerintah terhadap penetapan harga tahun dasar yang baru untuk data IHK. Observasi awal yang kami lakukan terhadap data IHK dalam kurun waktu Januari 2009 - Januari 2016 dengan menggunakan plot deret waktu.

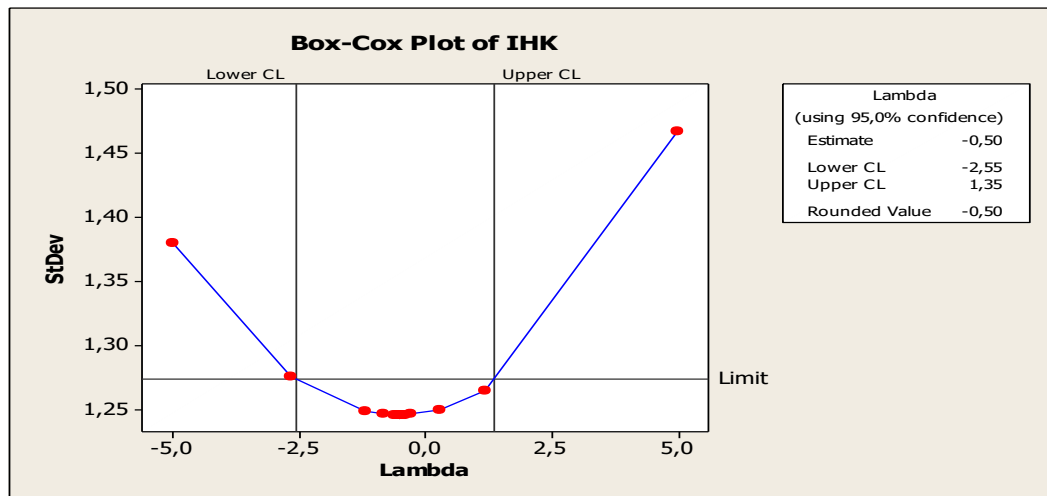


Gambar 1.1 Plot data IHK Kota Bandar Lampung
Januari 2009- Januari 2016

Pada Januari 2014 data mengalami penurunan yang drastis sehingga secara visual terlihat bahwa kejadian perubahan harga tahun dasar mempengaruhi data. Dilakukan pula analisis deret waktu dengan metode *Box-Jenikins* untuk observasi awal. Saat pengujian kestasioneran data, maka data tidak stasioner pada nilai tengah maupun pada varians.



Gambar 1.2 Plot ACF data IHK Kota Bandar Lampung
Januari 2009 – Januari 2016



Gambar 1.3 Plot *Box-Cox* data IHK Kota Bandar Lampung
Januari 2009-Januari 2016

Data kemudian distasionerkan dengan transformasi yaitu $\frac{1}{\sqrt{Z_t}}$ data dan diferensiasi satu kali. Setelah data ditransformasi diperoleh data stasioner pada varians dan juga diperoleh data stasioner pada nilai tengah setelah diferensiasi satu kali. Selanjutnya penentuan order ARIMA (p, d, q). Saat order telah ditentukan dan diestimasi tidak ada satu pun order dari yang terkecil sampai order ARIMA (4,1,4) yang penduganya yang signifikan, bahkan dengan bantuan *R best order* yang diperoleh adalah (0,1,0). Pada evaluasi model pun model yang diperoleh tidak memadai baik pada uji independensi maupun kenormalannya, maka data IHK ini tidak dapat dilakukan peramalan dengan menggunakan model ARIMA.

Terkadang data deret waktu mengalami kejadian pada waktu yang diketahui sehingga data sebelum terjadi kejadian tersebut kondisinya terpengaruh signifikan ataupun tidak signifikan saat dan setelah kejadian, yang disebut kejadian intervensi. Teknik untuk mengevaluasi kejadian intervensi ini disebut dengan analisis

intervensi. Analisis intervensi dapat memberikan solusi terhadap persoalan data deret waktu terkait dengan adanya pengaruh kejadian eksternal atau internal terhadap data. Secara umum, ada dua macam fungsi dalam analisis intervensi, yaitu fungsi *step* dan fungsi *pulse*. Sebuah pendekatan yang dapat dilakukan untuk mengetahui perubahan IHK yang dipengaruhi kejadian intervensi adalah dengan menganalisa kejadian yang terjadi signifikan atau tidak signifikan. Untuk menunjukkan bahwa dugaan terhadap data IHK telah mengalami intervensi maka diperlukan penelitian. Berkaitan dengan penelitian ini akan diduga parameter pada model intervensi serta meramalkan data deret waktu dengan mempertimbangkan faktor intervensi terhadap data indeks harga konsumen (IHK) Kota Bandar Lampung periode Januari 2009 - Januari 2016.

1.2 Batasan Masalah

Permasalahan pada penelitian ini dibatasi pada model intervensi dengan fungsi *step* dan aplikasi pada data Indeks Harga Konsumen (IHK) Kota Bandar Lampung Januari 2009 - Januari 2016.

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan memaparkan langkah-langkah model intervensi Box-Tiao berkenaan dengan sebuah intervensi berpeubah fungsi *step*. Selain itu, juga menganalisa dan meramalkan dampak dari kejadian intervensi yang dilakukan pada

perubahan tahun dasar IHK Kota Bandar Lampung mulai periode Januari 2014 hingga Januari 2016 yang menggunakan analisis intervensi dengan fungsi *step*.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini memberikan manfaat selain dapat digunakan sebagai referensi bagi penelitian tingkat lanjut berkaitan dengan analisis intervensi dengan fungsi *step* untuk data yang mengalami kejadian intervensi, juga dapat menjadi acuan kebijakan Pemerintah Kota Bandar Lampung sehubungan dengan perkembangan kenaikan harga-harga kebutuhan rumah tangga.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Indeks Harga Konsumen (IHK)

IHK merupakan nomor indeks yang mengukur harga rata-rata dari barang dan jasa yang dikonsumsi oleh rumah tangga (household). IHK sering digunakan untuk mengukur tingkat inflasi suatu negara dan juga sebagai pertimbangan untuk penyesuaian gaji, upah, uang pensiun, dan kontrak lainnya. IHK adalah harga sekelompok barang dan jasa relatif terhadap harga sekelompok barang dan jasa yang sama pada tahun dasar. Adapun rumus untuk menghitung IHK adalah:

$IHK = (P_n/P_o) \times 100$ dengan P_n = Harga sekarang P_o = Harga pada tahun dasar. Mulai Januari 2014 sampai Januari 2016 perhitungan IHK menggunakan tahun dasar 2012 sebagai harga tahun dasarnya.

2.2 Data Deret Waktu

Data deret waktu adalah suatu data runtun waktu atau deret dari kronologi pengamatan pada suatu peubah terkait (Montgomery, 2008). Suatu data deret waktu dapat diolah sehingga diperoleh inferensi yang bermanfaat untuk pengambilan keputusan dimasa yang akan datang. Banyak himpunan data muncul sebagai data deret waktu misalkan indeks harga konsumen, curah hujan harian, kuantitas barang

yang dikirim dari pabrik dalam waktu bulanan, jumlah uang beredar, dan lain sebagainya. Mempelajari hubungan timbal balik dengan menggunakan data runtun waktu disebut dengan analisis deret waktu (Pankratz, 1991). Agar hasil analisis deret waktu dapat dipertanggungjawabkan maka data deret waktu haruslah bersifat stasioner.

2.3 Stasioneritas

Dasar dari analisis deret waktu adalah kestasioneran atau stasioneritas. Model stasioner diasumsikan sebagai proses yang tetap dalam kesetimbangan atau kestabilan statistik dengan sifat probabilistik yang tidak berubah dari waktu ke waktu, dengan kata lain nilai tengah (rata-rata) dan ragamnya konstan (Box and Jenkins, 2016). Data dikatakan stasioner jika memenuhi tiga kriteria, yaitu nilai tengah (rata-rata) dan ragamnya konstan dari waktu ke waktu, serta peragam antara dua data deret waktu hanya bergantung dari periode waktu (*lag*) pada dua periode waktu (*lag*). Setiap data deret waktu merupakan suatu data dari hasil proses stokastik. Proses stokastik memiliki rata-rata yang terbatas dan varians-kovarians stasioner jika untuk semua t dan $t-s$, secara statistik dinyatakan sebagai berikut:

$$E(Z_t) = E(Z_{t-s}) = \mu, \text{ rata-rata } Z \text{ konstan} \quad (2.1)$$

$$E(Z_t - \mu)^2 = E(Z_{t-s} - \mu)^2 = \sigma_Z^2, \text{ ragam } Z \text{ konstan} \quad (2.2)$$

$$E[(Z_t - \mu)(Z_{t-s} - \mu)] = E[(Z_{t-j} - \mu)(Z_{t-j-s} - \mu)] = \gamma_s, \quad (2.3)$$

(Enders, 2015).

Terdapat dua perilaku stasioneritas data, yaitu stasioneritas data pada nilai tengah (rata-rata) dan stasioneritas data pada ragam (varians). Pada umumnya data deret

waktu tidak stasioner hal ini dikarenakan adanya perilaku data antar waktu yang menimbulkan kedinamisan. Oleh karena itu, diperlukan langkah-langkah dalam menangani data yang tidak stasioner.

2.3.1 Stasioner pada Nilai Tengah

Data deret waktu dikatakan stasioner pada nilai tengah (rata-rata atau *mean*) apabila data berfluktuasi pada sekitar suatu nilai tengah yang tetap dari waktu ke waktu selama pengamatan. Data deret waktu yang tidak stasioner pada nilai tengah diatasi dengan diferensiasi sedemikian sehingga menjadi stasioner pada nilai tengah. Proses diferensiasi merupakan proses mencari selisih antara data satu periode dengan periode sebelumnya secara berurutan. Proses diferensiasi dapat dilakukan hingga beberapa periode sampai data stasioner. Diferensiasi pertama dinotasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\nabla Z_t &= Z_t - Z_{t-1} \\ &= Z_t - BZ_t = (1 - B)Z_t\end{aligned}\tag{2.4}$$

Dengan ∇Z_t merupakan data asli setelah dilakukan diferensiasi tingkat pertama, B merupakan operator *Backshift* yang didefinisikan dengan $B^i z_t = z_{t-i}$. Jika diferensiasi pertama belum memberikan hasil yang stasioner pada nilai tengah maka dilakukan diferensiasi pada periode selanjutnya dari hasil diferensiasi pertama untuk semua t . Kemudian diferensiasi tingkat dua didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\nabla^2 Z_t &= \nabla Z_t - \nabla Z_{t-1} \\ &= (z_t - z_{t-1}) - (z_{t-1} - z_{t-2}) \\ &= (z_t - 2z_{t-1} + z_{t-2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (z_t - 2Bz_t + B^2z_t) \\
&= z_t(1 - 2B + B^2) \\
&= (1 - B)^2z_t
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Deret yang dihasilkan di atas disebut dengan diferensiasi kedua dari Z_t . Sehingga diferensiasi d kali dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\nabla^d Z_t &= \nabla^{d-1} Z_t - \nabla^{d-1} Z_{t-1} \\
\nabla^d Z_t &= \nabla^{d-1} Z_t - \nabla^{d-1} B Z_t \\
\nabla^d Z_t &= \nabla^{d-1} Z_t (1 - B) \\
\nabla^d Z_t &= (1 - B)^{d-1} (1 - B) Z_t \\
\nabla^d Z_t &= (1 - B)^d Z_t
\end{aligned} \tag{2.6}$$

(Pankratz, 1991).

2.3.2 Stasioner pada Ragam

Data deret waktu dikatakan stasioner pada ragam apabila data tersebut berfluktuasi dengan varians yang tetap dari waktu ke waktu. Dengan kata lain nilai ragamnya konstan untuk semua t . Ragam yang tidak konstan menyebabkan data menjadi tidak stasioner pada ragamnya. Modifikasi dilakukan agar data stasioner pada ragam dengan melakukan transformasi pada data deret waktu (Pankratz, 1991).

Dua modifikasi yang dapat dilakukan adalah pertama, jika standar deviasi dari data deret waktu proporsional terhadap data aslinya maka digunakan logaritma asli ($\ln$) sedemikian sehingga deret yang baru memiliki varians yang konstan. Kedua, jika

ragam dari data deret waktu proporsional terhadap data aslinya maka digunakan akar kuadrat untuk memperoleh varians yang konstan.

Tabel 2.1 Transformasi Parameter *Box-Cox*:

λ	Transformasi
-1	$\frac{1}{Z_t}$
-0,5	$\frac{1}{\sqrt{Z_t}}$
0	$\text{Ln } Z_t$
0,5	$\sqrt{Z_t}$
1	Z_t (tidak dilakukan transformasi)

(Pankratz, 1991).

Transformasi tersebut merupakan anggota dari transformasi *Box-Cox*. Dengan transformasi ini, suatu *series* Z_t yang baru dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$Z'_t = \frac{Z_t^\lambda - 1}{\lambda} \quad (2.7)$$

Dengan λ merupakan parameter transformasi *Box-Cox* dan Z_t merupakan nilai deret waktu pada waktu ke- t . Perlu dicatat bahwa Z_t tidak boleh negatif. Jika nilai Z_t negatif, maka kita tambahkan suatu konstanta pada Z_t sehingga nilainya bernilai positif (Pankratz, 1991).

2.4 Fungsi Autokorelasi

Autokorelasi mengukur arah (positif atau negatif) dan keeratan hubungan antara pengamatan dalam *single* deret waktu Z_t ketika pengamatan terpisah pada waktu

periode k , untuk $k = 1, 2, \dots, K$. Misalnya, mengukur bagaimana sebarang nilai deret (Z_t) saat ini berkaitan dengan nilai yang dimiliki dimasa akan datang ($Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots$) atau sama nilainya, dengan nilai pada masa lampauanya ($Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots$). Studi mengenai pola-pola autokorelasi dalam data deret waktu membantu kita dalam mengidentifikasi model ARIMA untuk *series* tersebut (Pankratz, 1991).

Koefesien autokorelasi didefinisikan sebagai:

$$\rho_k = \frac{E[(Z_t - \mu_Z)(Z_{t+k} - \mu_Z)]}{\sqrt{E[(Z_t - \mu_Z)^2] \cdot E[(Z_{t+k} - \mu_Z)^2]}} = \frac{Cov(Z_t, Z_{t+k})}{Var(Z_t)} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (2.8)$$

Dengan $Var(Z_t) = Var(Z_{t+k}) = \gamma_0$, γ_k merupakan fungsi autokovarians pada lag k , ρ_k merupakan koefesien autokorelasi untuk lag k , dan dengan $\rho_0 = 1$ dan kumpulan dari nilai ρ_k , $k = 1, 2, \dots$, disebut fungsi autokorelasi (ACF). Sehingga γ_k dan ρ_k menggambarkan kovarians dan korelasi antara Z_t dan Z_{t+k} dari proses yang sama tetapi dipisahkan oleh waktu periode k . Fungsi autokovariansi γ_k dan fungsi autokorelasi ρ_k memiliki sifat-sifat sebagai berikut :

1. $\gamma_0 = Var(X_t)$; $\rho_0 = 1$.
2. $|\gamma_k| \leq \gamma_0$; $|\rho_k| \leq 1$.
3. $\gamma_k = \gamma_{-k}$ dan $\rho_k = \rho_{-k}$ untuk semua k , γ_k dan ρ_k adalah fungsi yang sama dan simetrik lag $k=0$.

Bukti

1. Dengan menggunakan definisi korelasi antara X_t dan X_{t+k} , akan di buktikan

bahwa $\gamma_0 = Var(X_t)$; $\rho_0 = 1$.

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Diberikan $k = 0$, maka

$$\rho_0 = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+0})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(X_{t+0})}}$$

$$\rho_0 = \frac{\text{Cov}(X_t, X_t)}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(X_t)}}$$

$$\rho_0 = \frac{\text{Var}(X_t)}{\sqrt{\text{Var}^2(X_t)}}$$

$$\rho_0 = \frac{\text{Var}(X_t)}{\text{Var}(X_t)}$$

$$\rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0}$$

$$\rho_0 = 1$$

2. Sifat kedua merupakan akibat dari persamaan autokorelasi kurang dari atau sama dengan 1 dalam nilai mutlak.
3. Sifat tersebut diperoleh dari perbedaan waktu antara X_t dan X_{t+k} .

$$\gamma_k = \text{Cov}(X_{t+k}, X_t) = \text{Cov}(X_t, X_{t+k}) = \gamma_{(-k)}$$

Oleh sebab itu, fungsi autokorelasi sering hanya diplotkan untuk *lag* nonnegatif. Plot tersebut kadang disebut korrelogram.

Data sampel digunakan untuk memperoleh informasi mengenai koefisien autokorelasi populasi pada lag k yang beragam, $k = 1, 2, \dots, K$. Untuk menghitung sampel fungsi autokorelasi (SACF) sampel kovarians pada lag k , $(\hat{\gamma}_k)$ dan sampel varians $(\hat{\gamma}_0)$ untuk $t = 1, 2, \dots, T$ dengan menggunakan formula berikut:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{T} \quad (2.9)$$

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{\sum_{t=1}^T (Z_t - \bar{Z})^2}{T} \quad (2.10)$$

Dengan $\bar{Z} = \frac{\sum_{t=1}^T Z_t}{T}$ adalah rata-rata sampel dan T adalah ukuran sampel. Dengan menggunakan dua formula di atas, SACF pada lag k dapat dihitung dengan skema berikut:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\frac{\sum_{t=k+1}^T (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{T}}{\frac{\sum_{t=1}^T (Z_t - \bar{Z})^2}{T}} = \frac{\sum_{t=k+1}^T (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{\sum_{t=1}^T (Z_t - \bar{Z})^2} \quad (2.11)$$

Plot SACF ($\hat{\rho}_k$) terhadap k disebut sebagai sampel korelogram.

Tes signifikan untuk nilai koefisien autokorelasi perlu dilakukan untuk berbeda tidak $\hat{\rho}_k$ dari nilai nol. Hipotesis yang digunakan untuk menguji hubungan linear dari populasi antara z_t dan z_{t+k} sebagai berikut:

H_0 : $\rho_k = 0$ (Koefisien autokorelasi tidak berbeda secara signifikan)

H_1 : $\exists \rho_k \neq 0, k = 1, 2, \dots, K$ (koefisien autokorelasi berbeda secara signifikan)

Dengan statistik uji :

$$t_{hitung} = \frac{\frac{\sum_{t=k+1}^T (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z})}{\sum_{t=1}^T (z_t - \bar{z})^2}}{\sqrt{\frac{(1 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \hat{\rho}_i^2)}{T}}} \quad (2.12)$$

$$t_{hitung} = \frac{\hat{\rho}_k}{SE(\hat{\rho}_k)}$$

Dengan $SE(\hat{\rho}_k)$ merupakan *standard error* dari $\hat{\rho}_k$, $\hat{\rho}_i$ merupakan koefisien autokorelasi pada periode waktu ke-i, $i = 1, 2, \dots$, dan k merupakan selisih waktu.

Pengambilan keputusan pada uji ini adalah tolak H_0 jika $|t_{hitung}| > t_{\frac{\alpha}{2}, df}$, dengan

$t_{\frac{\alpha}{2}, df}$ dapat dilihat pada table t (Tsay, 2010).

2.5 Fungsi Autokorelasi Parsial (PACF)

Fungsi autokorelasi parsial (PACF) didefinisikan sebagai korelasi antara Z_t dan Z_{t+k} setelah menghilangkan pengaruh peubah-peubah intervensi ($Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots, Z_{t+k-1}$). PACF dapat dinotasikan dengan $\text{corr}(Z_t, Z_{t+i})$ dengan $i = 1, 2, \dots, k$. Misalkan Z_t adalah proses yang stasioner dengan $E(Z_t) = 0$.

Konsep PACF dianalogikan dengan konsep koefisien regresi parsial. K persamaan regresi dibahas sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Z_{t+1} &= \phi_{11}Z_t + \alpha_{t+1} \\ Z_{t+2} &= \phi_{21}Z_{t-1} + \phi_{22}Z_t + \alpha_{t+2} \\ &\vdots \\ Z_{t+k} &= \phi_{k1}Z_{t+k-1} + \phi_{k2}Z_{t+k-2} + \dots + \phi_{kk}Z_t + \alpha_{t+k} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dengan ϕ_{ki} merupakan parameter regresi ke- i , $i = 1, 2, \dots, k$. Koefisien autokorelasi parsial untuk populasi pada lag $k = 1, 2, \dots, K$ adalah koefisien terakhir (ϕ_{kk}) pada setiap persamaan, dan α_{t+k} merupakan kesalahan nilai residual yang tidak berkorelasi dengan Z_{t+k-j} dengan $j = 1, 2, \dots, k$. Untuk mendapatkan nilai PACF, langkah pertama yang dilakukan adalah mengalikan persamaan (2.13) dengan Z_{t+k-j} pada kedua ruas sehingga diperoleh :

$$Z_{t+k-j}Z_{t+k} = \phi_{k1}Z_{t+k-1}Z_{t+k-j} + \dots + \phi_{kk}Z_tZ_{t+k-j} + \alpha_{t+k}Z_{t+k-j}$$

Misalkan $E(Z_{t+k-j}Z_{t+k}) = \gamma_j$ dan $E(\alpha_{t+k}Z_{t+k-j}) = 0$ sehingga diperoleh:

$$\gamma_j = \phi_{k1}\gamma_{j-1} + \phi_{k2}\gamma_{j-2} + \dots + \phi_{kk}\gamma_{j-k}$$

Langkah kedua yaitu dengan membagi kedua ruas dengan γ_0 :

$$\frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \phi_{k1} \frac{\gamma_{j-1}}{\gamma_0} + \phi_{k2} \frac{\gamma_{j-2}}{\gamma_0} + \dots + \phi_{kk} \frac{\gamma_{j-k}}{\gamma_0}$$

Sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \dots + \phi_{kk}\rho_{j-k} \quad (2.14)$$

dengan $j = 1, 2, \dots, k$ dan diberikan $\rho_0 = 1$.

untuk $j = 1, 2, 3, \dots, k$ didapatkan sistem persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_{k1}\rho_0 + \phi_{k2}\rho_1 + \dots + \phi_{kk}\rho_{k-1} \\ \rho_2 &= \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2}\rho_0 + \dots + \phi_{kk}\rho_{k-2} \\ &\vdots \\ \rho_k &= \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \dots + \phi_{kk}\rho_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Sistem persamaan (2.15) dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan Cramer.

Persamaan (2.15) untuk $j = 1, 2, 3, \dots, k$ digunakan untuk mencari nilai-nilai fungsi autokorelasi parsial *lag* k yaitu $\phi_{k1}, \phi_{k2}, \dots, \phi_{kk}$.

a. Untuk *lag* pertama ($k = 1$) dan ($j = 1$) diperoleh sistem persamaan sebagai berikut:

$\rho_1 = \phi_{11}\rho_0$, karena $\rho_0 = 1$ sehingga $\rho_1 = \phi_{11}$ yang berarti bahwa fungsi autokorelasi parsial pada *lag* pertama akan sama dengan fungsi autokorelasi pada *lag* pertama.

b. Untuk *lag* kedua ($k = 2$) dan ($j = 1, 2$) diperoleh sistem persamaan

$$\rho_1 = \phi_{11}\rho_0 + \phi_{22}\rho_1 = \phi_{11}\rho_1 + \phi_{22}\rho_0$$

persamaan (2.15) jika ditulis dalam bentuk matriks akan menjadi

$$\begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{bmatrix},$$

dan dengan menggunakan aturan Cramer diperoleh

$$\phi_{22} = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

c. Untuk *lag* ketiga ($k = 3$) dan ($j = 1, 2, 3$) diperoleh sistem persamaan

$$\rho_1 = \phi_{11}\rho_0 + \phi_{22}\rho_1 + \phi_{33}\rho_2$$

$$\rho_2 = \phi_{11}\rho_1 + \phi_{22}\rho_0 + \phi_{33}\rho_1$$

$$\rho_3 = \phi_{11}\rho_2 + \phi_{22}\rho_1 + \phi_{33}\rho_0$$

persamaan (2.27) jika ditulis dalam bentuk matriks akan menjadi

$$\begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{22} \\ \phi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{bmatrix} \text{ dan dengan menggunakan aturan}$$

Cramer diperoleh

$$\phi_{33} = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

d. Untuk k *lag* $j = 1, 2, 3, \dots, k$ diperoleh sistem persamaannya adalah

$$\rho_1 = \phi_{11}\rho_0 + \phi_{22}\rho_1 + \phi_{33}\rho_2 + \dots + \phi_{kk}\rho_{k-1}$$

$$\rho_2 = \phi_{11}\rho_1 + \phi_{22}\rho_0 + \phi_{33}\rho_1 + \dots + \phi_{kk}\rho_{k-2}$$

$$\rho_3 = \phi_{11}\rho_2 + \phi_{22}\rho_1 + \phi_{33}\rho_0 + \dots + \phi_{kk}\rho_{k-3}$$

$\vdots$

$$\rho_k = \phi_{11}\rho_1 + \phi_{22}\rho_2 + \phi_{33}\rho_3 + \dots + \phi_{kk}\rho_0$$

Persamaan (2.32) jika dinyatakan dalam bentuk matriks menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{22} \\ \phi_{33} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix}$$

dengan aturan Cramer diperoleh

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_k \end{bmatrix}$$

Nilai autokorelasi parsial *lag* k hasilnya adalah

$$\phi_{kk} = \frac{\det(A_k)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}} \quad (2.16)$$

Dengan ϕ_{kk} disebut PACF antara Z_t dan Z_{t+k} (Wei, 2006).

Fungsi ϕ_{kk} menjadi notasi standar untuk autokorelasi parsial antara observasi Z_t dan Z_{t+k} dalam analisis *time series*. Fungsi ϕ_{kk} akan bernilai nol untuk $k > p$. Sifat ini dapat digunakan untuk identifikasi model AR dan MA, yaitu pada model *Autoregressive* berlaku ACF akan menurun secara bertahap menuju nol dan *Moving Average* berlaku ACF menuju ke-0 setelah lag ke- q sedangkan nilai PACF model AR yaitu $\phi_{kk} = 0$, $k > p$ dan model MA yaitu $\phi_{kk} = 0$, untuk $k > q$ (Wei, 2006).

Himpunan hasil nilai dari fungsi autokorelasi parsial sampel disingkat SPACF. Setiap koefisien populasi diduga untuk suatu himpunan data yang diberikan oleh sampel pasangan ($\hat{\phi}_{kk}$). Penduga koefisien populasi didefinisikan sebagai berikut:

$$\hat{\phi}_{kk} = \frac{\hat{\rho}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j} \hat{\rho}_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j} \hat{\rho}_j} \quad \text{untuk } k=2,3,\dots$$

$$\text{Dengan } \hat{\phi}_{kj} = \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{kk} \hat{\phi}_{k-1,k-j} \quad \text{untuk } j = 1, 2, \dots, k-1$$

Kita dapat mengukur signifikansi setiap $\widehat{\phi}_{kk}$ dengan membandingkan penduganya dengan standar erornya:

$$Se(\hat{\phi}_{kk}) = \sqrt{\frac{1}{n}} \quad (2.17)$$

Dengan n merupakan banyaknya pengamatan sampel. Hal itu lebih mudah untuk menjelaskan SPACF (kumpulan dari nilai dugaan $\widehat{\phi}_{kk}$ untuk $k = 1, 2, \dots, K$) dengan bentuk grafik (Pankratz, 1991).

2.6 White Noise

Suatu proses $\{\alpha_t\}$ dikatakan sebagai proses *white noise* jika $\{\alpha_t\}$ adalah barisan dari peubah acak yang tidak ada autokorelasi dan berdistribusi tertentu dengan mean konstan $E(\alpha_t) = 0$, varians konstan $Var(\alpha_t) = \sigma_\alpha^2$ dan $Cov(\alpha_t, \alpha_{t+k}) = 0$ untuk semua $k \neq 0$ (Wei, 2006).

Dengan definisi tersebut, sehingga suatu proses *white noise* stasioner dengan fungsi autokovarians :

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_k^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

fungsi autokorelasi :

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

fungsi autokorelasi parsial :

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

(Wei, 2006).

White noise sebagai istilah untuk menjelaskan bahwa suatu data memiliki residual dengan perilaku acak dan stasioner. *White noise* dinotasikan dengan $\{\alpha_t\} \sim WN(0, \sigma_\alpha^2)$.

Barisan $\{\alpha_t\}$ mengarah sebagai *white noise* dengan mean 0 dan varians σ_α^2 . Sehingga setiap barisan IID $(0, \sigma_\alpha^2)$ adalah WN $(0, \sigma_\alpha^2)$ (Brockwell, 2002).

Untuk mengetahui apakah residual merupakan *white noise* dapat menggunakan uji statistik Ljung-Box (LB) yang merupakan modifikasi dari statistic uji Q.

Tes ini menggunakan seluruh residual sampel dari SACF dengan hipotesis nol:

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_k = 0 \quad (\text{Residual bersifat } white \text{ noise})$$

$$H_1: \exists \rho_k \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (\text{Residual tidak bersifat } white \text{ noise})$$

Dengan statistik uji:

$$LB = T(T + 2) \sum_{k=1}^K \frac{(\hat{\rho}_k)^2}{(T-k)} \quad (2.18)$$

Dengan:

T : banyaknya pengamatan

K : banyaknya lag yang diuji

k : selisih lag

$\hat{\rho}_k$: koefisien autokorelasi pada periode ke-k

Dengan kriteria pengujian:

Jika $LB \leq \chi^2_{(\alpha, db)}$ maka H_0 tidak ditolak (α_t merupakan suatu barisan yang independen atau data bersifat acak). Jika $LB > \chi^2_{(\alpha, db)}$ maka H_0 ditolak (Wei, 2006).

2.7 Uji Unit Root

Proses *unit root* merupakan proses analisis deret waktu yang mengalami ketidakstasioneran. Indikasi terdapatnya *unit root* adalah adanya *random walk* yang artinya data deret waktu tidak stasioner pada ragam karena ragamnya merupakan fungsi dari waktu. *Random walk* tanpa drift dijelaskan dalam skema berikut:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_0 + \alpha_1 \\ Z_2 &= Z_1 + \alpha_2 = Z_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ &\vdots \\ Z_t &= Z_{t-1} + \alpha_t = Z_0 + \sum_{i=1}^t \alpha_i \end{aligned} \quad (2.19)$$

dengan α_i merupakan *white noise*. Dengan demikian dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= E(Z_0 + \sum_{i=1}^t \alpha_i) = E(Z_0) + E(\sum_{i=1}^t \alpha_i) = E(Z_0) + (E(\alpha_1) + E(\alpha_2) + \\ &\quad \dots + E(\alpha_t)) = Z_0 + 0 + 0 + \dots + 0 = Z_0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} Var(Z_t) &= Var(Z_0 + \sum_{i=1}^t \alpha_i) = Var(Z_0) + Var(\sum_{i=1}^t \alpha_i) = 0 + Var(\alpha_1 + \alpha_2 + \\ &\quad \dots + \alpha_t) = \sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2 = t\sigma^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Kemudian *random walk* dengan *drift* dijelaskan dalam skema berikut:

$$Z_t = \beta_1 + Z_{t-1} + \alpha_t \quad (2.22)$$

dengan β_1 merupakan parameter *drift* dan α_t adalah *white noise*, sedemikian sehingga dapat diperoleh sifat-sifat berikut:

$$E(Z_t) = Z_0 + t\beta_1 \quad (2.23)$$

$$Var(Z_t) = t\sigma^2 \quad (2.24)$$

Misalkan *random walk* ditulis seperti berikut:

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + \alpha_t ; -1 \leq \phi \leq 1 \quad (2.25)$$

Jika $\phi = 1$ maka akan diperoleh persamaan *random walk* tanpa *drift* yang diindikasikan data deret waktu Z_t memiliki *unit root*. Persamaan (2.25) kedua ruasnya dikurangi dengan Z_{t-1} , sehingga diperoleh skema sebagai berikut:

$$Z_t - Z_{t-1} = \phi Z_{t-1} + \alpha_t - Z_{t-1}$$

$$\nabla Z_t = (\phi - 1)Z_{t-1} + \alpha_t$$

$$\nabla Z_t = \rho Z_{t-1} + \alpha_t$$

dengan $\rho = (\phi - 1)$ dan $\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1}$. Dikatakan Z_t tidak stasioner pada $\phi = 1$ atau $\rho = 0$ akan tetapi data deret waktu yang dilakukan proses diferensiasi ∇Z_t bersifat stasioner dengan kata lain Z_t terintegrasi dengan order 1. Jika $|\phi| < 1$ maka Z_t bersifat stasioner (Gujarati, 2009).

Uji *unit root* memiliki berbagai metode salah satunya adalah uji *Augmented Dickey Fuller* (Uji ADF). Uji ADF ini menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$\nabla Z_t = \beta_1 + \beta_2 t + \rho Z_{t-1} + \sum_{i=1}^m u_i \nabla Z_{t-i} + \alpha_t \quad (2.26)$$

Uji ADF dilakukan dengan menghitung nilai τ (tau) statistik dengan rumus:

$$\tau = \frac{\hat{\rho}_k}{SE(\hat{\rho}_k)}$$

Hipotesis dilakukan sebagai berikut:

$H_0 : \rho = 0$ (yang artinya Z_t tidak stasioner)

$H_0 : \rho \neq 0$ (yang artinya Z_t stasioner)

Jika τ statistik $< \tau$ tabel maka H_0 tidak ditolak yang berarti data dikatakan tidak stasioner (Gujarati, 2009).

2.8 Model *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA)

Model *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA) didasarkan pada data yang tersedia; teoritis (populasi) berhubungan dengannya adalah suatu Proses ARIMA. Untuk mengidentifikasi model ARIMA dibuat terlebih dahulu plot ACF dan plot PACF (Pankratz, 1991).

2.8.1 Proses *Autoregressive* (AR)

Suatu proses *autoregressive* (AR) adalah suatu nilai pada saat sekarang dari peubah Z yang bergantung pada nilai pada periode sebelumnya pada peubah yang sama yang ditambah dengan residualnya yang memiliki rata-rata nol dan berdistribusi *white noise*. Proses ini mengasumsikan bahwa deret waktu mempunyai rata-rata konstan dan varians konstan dari waktu ke waktu yang berarti bersifat stasioner (Brooks, 2014).

2.8.1.1 Order pertama *Autoregressive*, AR(1)

Pertama, diberikan persamaan *time series* stasioner sebagai :

$$Z_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \alpha_{t-i}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^i \alpha_i \\
&= \mu + \Psi(B) \alpha_t
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Dengan $\Psi(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^i$. Dengan pendekatan eksponensial $\psi_i = \phi^i$ dimana $|\phi| < 1$ sehingga dapat ditulis :

$$Z_t = \mu + \alpha_t + \phi \alpha_{t-1} + \phi^2 \alpha_{t-2} + \dots \tag{2.29}$$

Diperoleh :

$$Z_{t-1} = \mu + \alpha_{t-1} + \phi \alpha_{t-2} + \phi^2 \alpha_{t-3} + \dots \tag{2.30}$$

Kita dapat mengkombinasikan persamaan (2.29) dan (2.30) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
Z_t &= \mu + \alpha_t + \phi \alpha_{t-1} + \phi^2 \alpha_{t-2} + \dots \\
&= \mu - \phi \mu + \phi Z_{t-1} + \alpha_t \\
&= c + \phi Z_{t-1} + \alpha_t
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Dengan $\phi \alpha_{t-1} + \phi^2 \alpha_{t-2} + \dots = \phi Z_{t-1} - \phi \mu$ dan $c = \mu - \phi \mu = \mu(1 - \phi)$.

Persamaan (2.31) disebut order pertama proses *autoregressive* karena pada persamaan (2.31) merupakan regresi dari Z_t pada Z_{t-1} .

Proses AR (1) stasioner jika $|\phi| < 1$. Rata-rata dari AR(1) yang stasioner adalah :

$$E(Z_t) = \mu = \frac{\delta}{1-\phi} \tag{2.32}$$

Autokovarian dari AR (1) dapat dihitung dari persamaan (2.29)

$$\gamma_z(k) = \sigma^2 \phi^k \frac{1}{1-\phi^2} \quad \text{untuk } k = 0, 1, 2, \dots$$

Nilai varian diberikan sebagai:

$$\gamma_z(0) = \sigma^2 \frac{1}{1-\phi^2}$$

Hubungan dengan fungsi autokorelasi diberikan sebagai:

$$\rho(k) = \frac{\gamma_Z(k)}{\gamma_Z(0)} \quad \text{untuk } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Ini menyebabkan proses stasioner AR (1) turun secara eksponensial (Montgomery, 2008).

2.8.1.2 Autoregressive Order p , (AR(p))

Bentuk umum order ke- p model *Autoregressive* adalah

$$Z_t = c + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \alpha_t \quad (2.33)$$

dengan :

$$\alpha_t \sim N(0, \sigma^2)$$

Z_t : nilai peubah pada waktu ke- t

α_t : *white noise* pada waktu t

ϕ_i : koefisien regresi, $i = 1, 2, 3, \dots, p$

p : order AR

c : konstanta

Dengan α_t *white noise*. Persamaan (2.33) dapat juga ditulis

$$\Phi(B)Z_t = c + \alpha_t$$

$$\text{Dengan } \Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

untuk AR (p) stasioner

$$E(Z_t) = \mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p}$$

dan

$$\begin{aligned}
 \gamma_Z(k) &= \text{cov}(Z_t, Z_{t-k}) \\
 &= \text{cov}(c + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \alpha_t, Z_{t-k}) \\
 &= \sum_{i=1}^p \phi_i \text{cov}(Z_{t-i}, Z_{t-k}) + \text{cov}(\alpha_t, Z_{t-k}) \\
 &= \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_Z(k-i) + \begin{cases} \sigma^2 & \text{jika } k = 0 \\ 0 & \text{jika } k > 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Kemudian kita peroleh

$$\begin{aligned}
 \gamma_Z(0) &= \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_Z(i) + \sigma^2 \\
 \Rightarrow \gamma_Z(0) [1 - \sum_{i=1}^p \phi_i \rho_Z(i)] &= \sigma^2
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Hasil pembagian persamaan (2.34) dengan $\gamma_Z(0)$ untuk $k > 0$ dapat digunakan untuk mencari nilai ACF pada proses AR(p) yang memenuhi persamaan *Yule-Walker*

$$\rho_Z(k) = \sum_{i=1}^p \phi_i \rho_Z(k-i) \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{Montgomery, 2008}).$$

2.8.2 Model *Moving Average* (MA)

Model *moving average* dengan order q dinotasikan MA (q) didefinisikan sebagai :

$$Z_t = \mu + \alpha_t - \theta_1 \alpha_{t-1} - \theta_2 \alpha_{t-2} - \theta_3 \alpha_{t-3} - \dots - \theta_q \alpha_{t-q} \tag{2.36}$$

dengan :

$$\alpha_t \sim N(0, \sigma^2)$$

Z_t : nilai peubah pada waktu ke-t

α_t : *white noise* pada waktu t

θ_i : koefisien regresi, $i: 1, 2, 3, \dots, q$

q : order MA

Persamaan di atas dapat ditulis dengan operator *backshift* (B), menjadi :

$$\begin{aligned} Z_t &= \mu + (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) \alpha_t \\ &= \mu + (1 - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i) \alpha_t \\ &= \mu + \Theta(B) \alpha_t \end{aligned} \quad (2.36)$$

dimana $\Theta(B) = 1 - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i$

Karena α_t *white noise*, nilai harapan MA (q) adalah

$$E(Z_t) = E(\mu + \alpha_t - \theta_1 \alpha_{t-1} - \theta_2 \alpha_{t-2} - \theta_3 \alpha_{t-3} - \dots - \theta_q \alpha_{t-q}) = \mu \quad (2.37)$$

dan varians

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_t) &= \gamma_Z(0) = \text{Var}(\mu + \alpha_t - \theta_1 \alpha_{t-1} - \theta_2 \alpha_{t-2} - \dots - \theta_q \alpha_{t-q}) \\ &= \sigma^2 (1 + \theta_{12} + \theta_{22} + \dots + \theta_{q2}) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Dengan cara yang sama diperoleh nilai autokovarian pada *lag* k

$$\begin{aligned} \gamma_Z(k) &= \text{Cov}(Z_t, Z_{t+k}) \\ &= E[(\mu + \alpha_t - \theta_1 \alpha_{t-1} - \theta_2 \alpha_{t-2} - \theta_3 \alpha_{t-3} - \dots - \theta_q \alpha_{t-q})(\alpha_{t+k} - \\ &\quad \theta_1 \alpha_{t+k-1} - \theta_2 \alpha_{t+k-2} - \theta_3 \alpha_{t+k-3} - \dots - \theta_q \alpha_{t+k-q})] \\ &= \begin{cases} \sigma^2(-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q) & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Diperoleh nilai autokorelasi pada *lag* k yaitu

$$\rho_Z(k) = \frac{\gamma_Z(k)}{\gamma_Z(0)} = \begin{cases} \frac{(-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q)}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & k = 1, 2, 3, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases} \quad (2.40)$$

Dari bagian ini diperoleh bahwa nilai ACF sangat membantu mengidentifikasi model MA dan order *cut off* tepat setelah *lag* q (Montgomery, 2008).

2.8.2.1 Order pertama *Moving Average*, MA(1)

Model paling sederhana dari *Moving Average* yakni MA(1) ketika nilai $q = 1$

$$Z_t = \mu + \alpha_t - \theta_1 \alpha_{t-1}$$

untuk model MA (1) kita peroleh nilai *autocovariance function*

$$\begin{aligned}\gamma_Z(0) &= \sigma^2(1 + \theta_1^2) \\ \gamma_Z(1) &= -\theta_1 \sigma^2 \\ \gamma_Z(k) &= 0 \quad k > 1\end{aligned}$$

Demikian pula, kita peroleh fungsi autokorelasi

$$\rho_Z(1) = \frac{-\theta_1}{(1 + \theta_1^2)}$$

$$\rho_Z(k) = 0 \quad k > 1$$

Kita dapat lihat bahwa *lag* pertama fungsi autokorelasi pada MA (1) dibatasi

$$|\rho_Z(1)| = \frac{|\theta_1|}{(1 + \theta_1^2)} \leq \frac{1}{2}$$

dan autokorelasi *cut off* setelah *lag* 1 (Montgomery, 2008).

2.8.3 Model *Autoregressive Moving Average* (ARMA)

Dalam bentuk umum, model *Autoregressive Moving Average* atau ARMA(p,q) diberikan pada halaman selanjutnya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}Z_t &= \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + \alpha_t - \theta_1 \alpha_{t-1} - \theta_2 \alpha_{t-2} - \cdots - \\ &\quad \theta_q \alpha_{t-q} \\ &= \delta + \sum_{i=1}^p \phi_i Z_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \alpha_{t-i}\end{aligned}\tag{2.41}$$

$$\text{atau} \quad \Phi(B)Z_t = \delta + \Theta(B)\alpha_t$$

dengan

$$Z_t = \text{nilai variabel pada waktu ke-}t$$

ϕ_j	= parameter model AR, $j=1,2,3,\dots,p$
p	= order AR
θ_i	= parameter model MA ke-i, $i=1,2,3,\dots,q$
α_t	= nilai error pada waktu ke-t diasumsikan <i>White Noise</i>

(Wei, 2006).

2.8.4 Model Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA)

Jika d adalah bilangan bulat nonnegative, maka $\{Z_t\}$ dikatakan proses ARIMA dengan $\nabla^d Z_t = (1 - B)^d Z_t$ merupakan akibat dari proses ARMA. Definisi berikut digunakan dalam membangun model ARIMA:

$$\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \quad (\text{operator AR order } p)$$

$$\theta(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) \quad (\text{operator MA order } q)$$

(Pankratz, 1991).

Definisi diatas berarti bahwa $\{Z_t\}$ memenuhi persamaan :

$$\phi(B)\nabla^d Z_t = \theta(B)\alpha_t$$

$$\phi(B)(1 - B)^d Z_t = \theta(B)\alpha_t$$

$$\phi(B)Z_t = \theta(B)\alpha_t \quad (2.42)$$

dengan $\{\alpha_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, $\phi(B)$ dan $\theta(B)$ adalah derajat polinomial dari p dan q ,

$\phi(B) \neq 0$ untuk $|\phi(B)| < 1$ (Brockwell, 2002).

2.9 Model Fungsi Transfer ditambah Noise

Model fungsi transfer merupakan model yang digunakan untuk menganalisis data deret waktu multivariate yang ditransformasi ke dalam bentuk univariate agar

didapatkan informasi yang lengkap dan simultan. Diasumsikan terdapat pasangan pengamatan X_t dan Z_t yang masing-masing merupakan *input* dan *output* dari system dinamis dan keduanya stasioner (Box and Jenkins, 2016). Dibangun sebuah hubungan filter linear dari pasangan pengamatan X_t dan Z_t sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 Z_t &= (v_0X_t + v_1X_{t-1} + v_2X_{t-2} + \dots) + N_t \\
 &= (v_0X_t + v_1BX_t + v_2B^2X_t + \dots) + N_t \\
 &= (v_0 + v_1B + v_2B^2 + \dots)X_t + N_t \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} v_iB^i\right)X_t + N_t \\
 &= v(B)X_t + N_t
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Dengan $v(B) = v_0 + v_1B + v_2B^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} v_iB^i$ disebut sebagai fungsi transfer filter dan $v_0, v_1, v_2, \dots$ juga disebut dengan fungsi impulse respon. Model fungsi transfer dikatakan stabil jika $\sum |v_i| < \infty$. Artinya, pada model fungsi transfer sebuah peubah independen yang dibatasi akan selalu menghasilkan peubah dependen yang terbatas. Sedangkan model fungsi transfer dikatakan kausal jika $v_i = 0$ untuk $i < 0$. Artinya, nilai peubah dependen di masa depan dipengaruhi oleh nilai peubah independen di masa lalu, dan N_t sebagai *noise* yang merupakan peubah acak berdistribusi identik saling bebas dengan mean 0 dan varians σ^2 dan saling bebas dengan X_t .

Misalkan diberikan δ_1 adalah suatu konstan dengan $0 < |\delta_1| < 1$ yang menunjukkan tingkat penurunan, v_0 nilai awal untuk penurunan, dan misalkan pembobot dalam $v(B)$ sebagai berikut:

$$v_1 = \delta_1 v_0$$

$$v_2 = \delta_1 v_1 = \delta_1^2 v_0$$

$$v_3 = \delta_1 v_2 = \delta_1^3 v_0$$

⋮

$$V_r = \delta_1 V_{r-1} = \delta_1^r V_0 ; r \geq 0$$

Sehingga dibangun persamaan fungsi transfer tanpa *noise* sebagai berikut:

$$Z_t = v_0 X_t + v_1 X_{t-1} + v_2 X_{t-2} + \dots$$

$$Z_t = v_0 X_t + \delta_1 v_0 X_{t-1} + \delta_1^2 v_0 X_{t-2} + \dots \quad (2.44)$$

Selanjutnya pada lag ke-1 diperoleh persamaan:

$$Z_{t-1} = v_0 X_{t-1} + \delta_1 v_0 X_{t-2} + \delta_1^2 v_0 X_{t-3} + \dots \quad (2.45)$$

Kalikan kedua ruas pada (2.44) dengan δ_1 dan diperoleh:

$$\delta_1 Z_{t-1} = \delta_1 v_0 X_{t-1} + \delta_1^2 v_0 X_{t-2} + \delta_1^3 v_0 X_{t-3} + \dots \quad (2.46)$$

Kurangkan 2.44 dengan 2.46 sehingga diperoleh bentuk rasional Z_t :

$$Z_t - \delta_1 Z_{t-1} = v_0 X_t$$

$$(1 - \delta_1 B) Z_t = v_0 X_t$$

$$Z_t = \frac{v_0 X_t}{(1 - \delta_1 B)} \quad (2.47)$$

(Pankratz, 1991).

Peubah X_t dan Z_t mempunyai angka yang terbatas sedangkan $v(B)$ mempunyai koefesien yang tidak terbatas. Oleh karena itu, fungsi transfer filter diubah ke dalam bentuk rasional sebagai berikut mengikuti bentuk rasional 2.47 dengan order berhingga:

$$v(B) = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} = \frac{\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s}{1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r} \quad (2.48)$$

Sehingga diperoleh model fungsi transfer-*noise* sebagai berikut:

$$Z_t = \frac{w_s(B)}{\delta_r(B)} X_t + N_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} X_t + N_t \quad (2.49)$$

Dalam beberapa kondisi memungkinkan terjadinya sebuah *delay* (b) yang merupakan waktu yang berlalu sebelum implus dari peubah independen menghasilkan efek terhadap peubah dependen, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Z_t &= (v_0 X_t + v_1 X_{t-1} + v_2 X_{t-2} + \dots) + N_t \\ &= (v_0 X_t + v_1 B X_t + v_2 B^2 X_t + \dots) + N_t \\ &= (v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \dots) X_t + N_t \\ &= (\sum_{j=0}^{\infty} v_j B^j) X_t + N_t \\ &= v(B) X_{t-b} + N_t \\ &= \frac{w_s(B)}{\delta_r(B)} X_{t-b} + N_t \\ &= \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b X_t + N_t \end{aligned} \quad (2.50)$$

Dari model fungsi transfer untuk X_t dan N_t diasumsikan independen.

Order dari r , s dan b dapat ditentukan dari persamaan :

$$\begin{aligned} v(B) &= \frac{\omega(B)}{\delta(B)} = \frac{\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s}{1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r} \\ \delta(B) v(B) &= \omega(B) \\ [1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r] [v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \dots] &= [\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s] \\ [1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r] [v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \dots] - [\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s] &= 0 \\ [1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r] (\sum_{j=0}^{\infty} v_j B^j) - [\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s] &= 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Sehingga :

$$v_j = \begin{cases} \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r} - \omega_{j-b}, & j = b+1, \dots, b+s \\ \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r}, & j > b+s \end{cases} \quad (2.52)$$

Dengan $v_b = \delta_1 v_{b-1} + \delta_2 v_{b-2} + \dots + \delta_r v_{b-r} + \omega_o$ untuk $j = b$ dan $v_j = 0$ untuk $j < b$.

b. Sehingga kesimpulannya :

- a. b dicari berdasarkan fakta bahwa $v_j = 0$ untuk $j < b$ dan $v_b \neq 0$
- b. r dicari berdasarkan pola dari impuls respon terboboti, yang identik dengan mencari order p pada identifikasi ARIMA (p,d,q) univariate melalui fungsi parsial autokorelasi (PACF).
- c. Untuk nilai b yang ditetapkan jika $r = 0$ maka nilai s dapat dicari berdasarkan fakta, $v_j = 0$, $j > b + s$, sedangkan jika $r \neq 0$ maka s dicari dengan berdasarkan pengamatan pola kelambatan impuls terboboti, dan nilai s adalah perkiraan dimulainya kelambatan.

Model fungsi transfer memiliki asumsi yang harus dipenuhi yaitu tidak ada *feedback*. *Feedback* adalah tidak ada arah (*exogeneity*) pada peubah independen dan peubah dependen. Artinya, peubah X_t haruslah independen terhadap peubah Z_t . Jika terdapat autokorelasi pada peubah independen maka dibutuhkan *prewhitening*. *Prewhitening* digunakan dengan membangun sebuah model ARMA (*Autoregressive-Moving Average*) pada peubah independen (Wei, 2006).

2.10 Analisis Model Intervensi

Model intervensi merupakan kasus khusus dari model fungsi transfer yang ditambah *noise*. Data deret waktu dalam model intervensi dipengaruhi oleh kejadian-kejadian

lain seperti kebijakan pemerintah, bencana alam, promosi, dan lain-lain. Data deret waktu yang dipengaruhi kejadian luar dengan diketahui waktu kejadian dapat dianalisis menggunakan analisis intervensi. Pada prinsipnya dikenal dua macam peubah fungsi intervensi, yaitu peubah intervensi fungsi *step* (*step function*) dan peubah intervensi fungsi *pulse* (*pulse function*). *Step function* adalah suatu bentuk intervensi yang terjadi dalam kurun waktu yang panjang, sedangkan *pulse function* adalah suatu bentuk intervensi yang terjadi hanya dalam suatu waktu tertentu. Dalam model intervensi, jika kejadian intervensi fungsi *pulse* terjadi selama periode $t = T$, maka didefinisikan sebagai berikut:

$$X_t = P_t = \begin{cases} 0, & t \neq T \\ 1, & t = T \end{cases}$$

Untuk intervensi fungsi *step* didefinisikan sebagai berikut:

$$X_t = S_t = \begin{cases} 0, & t < T \\ 1, & t \geq T \end{cases}$$

Dengan T merupakan waktu terjadinya intervensi. Peubah independen dari model intervensi merupakan proses deterministik. Secara umum, model intervensi dimodelkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Z_t &= v(B)X_{t-b} + N_t \\ &= v(B)B^b X_t + N_t \end{aligned} \tag{2.53}$$

Dengan dengan $v(B) = v_0 + v_1B + v_2B^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} v_i B^i = \frac{\omega_s(B)}{\delta_r(B)}$ disebut sebagai fungsi transfer filter atau juga biasa disebut dengan impulse respon terboboti, Z_t merupakan peubah respon atau dependen pada waktu t , X_t merupakan peubah fungsi *step* yang bersifat deterministik, dan N_t sebagai *noise* yang merupakan peubah acak berdistribusi identik saling bebas dengan mean 0 dan varians σ^2 dan saling bebas dengan X_t . Sehingga diperoleh model untuk analisis intervensi:

$$Z_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b x_t + N_t \quad (2.54)$$

Dengan X_t didefinisikan pada persamaan (2.53) (Box and Jenkins, 2016).

2.10.1 Pengelompokkan Data

Pada data deret waktu yang mengalami intervensi terbagi menjadi dua data, yaitu sebelum terjadinya intervensi disebut pre-intervensi dan saat terjadi sampai setelah intervensi terjadi post-intervensi. Oleh karena itu, hal yang pertama kali dilakukan dalam analisis intervensi ini adalah membagi data tersebut menjadi dua bagian yang telah disebutkan. Data pra intervensi merupakan data yang dimulai saat $t = 1, 2, 3, \dots, i - 1$ dan data post-intervensi merupakan data yang dimulai dari $t = i, i + 1, i + 2, \dots, n$ dengan n merupakan banyaknya datum pada data deret waktu tersebut. Setelah dikelompokkan barulah dilakukan identifikasi pada data pre-intervensi dengan prosedur ARIMA (p,d,q) dan data deret waktu dengan fungsi transfer yang ditambahkan *noise*.

2.10.2 Model Noise

Data pre-intervensi digunakan dalam membangun model *noise* yang dimodelkan dengan proses ARIMA (p,d,q) sebagai berikut:

$$N_t = \frac{(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)}{(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)(1 - B)^d} \alpha_t$$

$$N_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)(1 - B)^d} \alpha_t$$

$$\phi(B)(1 - B)^d N_t = \theta(B) \alpha_t$$

$$\phi(B) N_t = \theta(B) \alpha_t$$

$$N_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \alpha_t \quad (2.55)$$

Dengan $\theta(B)$ *moving average* order q , $\phi(B)$ *autoregressive* order p , dan $(1 - B)^d$ proses *integrated* order d . Order – order ini dapat ditentukan dengan melihat plot ACF dan PACF. Selanjutnya dilakukan estimasi parameter dan evaluasi model untuk mendapatkan model terbaik mengikuti prosedur *Box-Jenkins*.

2.10.3 Identifikasi Respon Intervensi

Respon intervensi menunjukkan adanya dampak dari intervensi dalam bentuk input deterministik X_t . Identifikasi respon intervensi dilakukan dengan melihat plot deret waktu seluruh data untuk mengetahui pola respon setelah terjadinya intervensi.

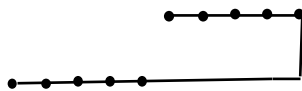
Pandang model fungsi transfer berikut :

$$Z_t = v(B)B^b x_t = \frac{\omega_s(B)}{\delta_r(B)} B^b x_t \quad (2.56)$$

Karena sifat deterministik dari peubah input x_t maka identifikasi struktur operator model intervensi tidak didasarkan pada teknik model fungsi transfer yang dikenal dengan sebutan *prewhitening*. Identifikasi respon intervensi dapat dilakukan dengan identifikasi order b , s , dan r dari grafik residual pada data. Order b ditentukan dengan melihat kapan efek intervensi mulai terjadi. Order b bernilai nol ketika waktu mulai terjadinya efek intervensi langsung dirasakan pada saat T . Order s ditentukan dengan melihat residual data kembali stabil dihitung dari waktu mulai intervensi. Sedangkan order r ditentukan saat residual dari data membentuk pola yang jelas. Bentuk $v(B)$ juga dituliskan mengikuti model ARMA (*Autoregressive-Moving Average*), yaitu denominator (r) meringkas banyaknya koefisien $\{\delta_i\}$ pada bagian AR dari model

ARMA. Sedangkan numerator (s) meringkas banyaknya koefisien $\{\omega_i\}$ pada bagian MA dari model ARMA (Montgomery, 2008). Identifikasi dapat dibantu oleh inspeksi langsung dari data yang menunjukkan bentuk dari dampak karena kejadian yang diketahui waktunya. Berikut ini merupakan grafik respon dari fungsi *step* yang dapat terjadi adalah:

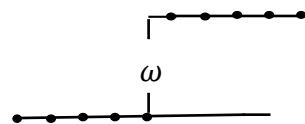
Input



Gambar 2.1 Grafik Pola Variabel Input

Output

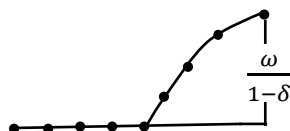
- a) Suatu dampak tetap yang tidak diketahui dari suatu intervensi muncul pada b periode setelah intervensi dengan $\delta = 0$ atau disebut dengan *abrupt permanent*, memiliki bentuk respon:



$$v(B)S_t = \omega(B)S_t$$

Gambar 2.2 Abrupt Permanent

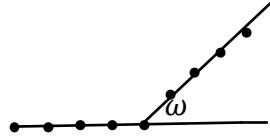
- b) Suatu dampak intervensi muncul pada b periode setelah intervensi tetapi responnya bertahap dengan $0 < \delta < 1$, memiliki bentuk respon :



$$v(B)S_t = \frac{\omega(B)}{1-\delta(B)} S_t$$

Gambar 2.3 Gradual Permanent $0 < \delta < 1$

- c) Suatu dampak intervensi muncul pada b periode setelah intervensi tetapi responnya naik secara linear tanpa batas dengan $\delta = 1$, memiliki bentuk respon:



$$v(B)S_t = \frac{\omega(B)}{1-B} S_t$$

Gambar 2.4 *Gradual Permanent* $\delta = 1$

2.10.4 Estimasi Parameter Model Intervensi

Estimasi parameter model intervensi dilakukan setelah model intervensi diidentifikasi. Model intervensi secara umum dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Z_t &= \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b x_t + N_t \\ Z_t &= \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b x_t + \frac{\theta(B)}{\phi(B)(1-B)^d} \alpha_t \end{aligned} \quad (2.57)$$

Dengan menyamakan penyebut pada persamaan (2.57) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \delta(B)\phi(B)(1-B)^d Z_t &= \phi(B)(1-B)^d \omega(B) B^b x_t + \delta(B)\theta(B)\alpha_t \\ m(B)Z_t &= n(B)B^b x_t + o(B)\alpha_t \\ m(B)Z_t &= n(B)x_{t-b} + o(B)\alpha_t \\ m(B)Z_t - n(B)x_{t-b} &= o(B)\alpha_t \\ \alpha_t &= \frac{m(B)Z_t - n(B)x_{t-b}}{o(B)} \end{aligned} \quad (2.58)$$

dengan,

$$\begin{aligned} m(B) &= \delta(B)\phi(B)(1-B)^d = (1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r) (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \\ &\quad \phi_p B^p) (1-B)^d = (1 - m_1 B - m_2 B^2 - \dots - m_{p+r} B^{p+r}) \\ n(B) &= \phi(B)\omega(B)(1-B)^d = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) (\omega_0 - \omega_1 B - \\ &\quad \dots - \omega_s B^s) (1-B)^d = (n_0 - n_1 B - n_2 B^2 - \dots - n_{p+s} B^{p+s}) \end{aligned}$$

$$o(B) = \delta(B) \theta(B) = (1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r)(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) = \\ (1 - o_1 B - o_2 B^2 - \dots - o_{q+r} B^{q+r})$$

Maka nilai residualnya, yaitu:

$$\alpha_t = \frac{(1-m_1 B-m_2 B^2-\dots-m_{p+r} B^{p+r})Z_t-(n_0-n_1 B-n_2 B^2-\dots-n_{p+s} B^{p+s})x_{t-b}}{(1-o_1 B-o_2 B^2-\dots-o_{q+r} B^{q+r})} \\ \alpha_t = [(1 - m_1 B - m_2 B^2 - \dots - m_{p+r} B^{p+r})Z_t] - [(n_0 + n_1 B + n_2 B^2 + \dots + \\ n_{p+s} B^{p+s})x_{t-b}] + (o_1 B + o_2 B^2 + \dots + o_{q+r} B^{q+r})\alpha_t \\ \alpha_t = (Z_t - m_1 Z_{t-1} - m_2 Z_{t-2} - \dots - m_{p+r} Z_{t-p-r}) - [(n_0 x_{t-b} + n_1 x_{t-b-1} + \\ n_2 x_{t-b-2} + \dots + n_{p+s} x_{t-b-p-s})] + (o_1 \alpha_{t-1} + o_2 \alpha_{t-2} + \dots + \\ o_{q+r} \alpha_{t-q-r}) \quad (2.59)$$

Dengan asumsi $\alpha_t \sim WN(0, \sigma^2)$, sehingga fungsi likelihood menggunakan fungsi distribusi normal sebagai berikut:

$$L(\delta, \omega, \phi, \theta, \sigma^2) = \prod_{t=1}^n f(\alpha_t, \sigma_\alpha^2) = (2\pi\sigma_\alpha^2)^{-n/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_\alpha^2} \sum_{t=1}^n \alpha_t^2 \right] \\ L(\delta, \omega, \phi, \theta, \sigma^2) = (2\pi\sigma_\alpha^2)^{-n/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_\alpha^2} \sum_{t=1}^n [(Z_t - m_1 Z_{t-1} - m_2 Z_{t-2} - \dots - \\ m_{p+r} Z_{t-p-r}) - [(n_0 x_{t-b} + n_1 x_{t-b-1} + \\ n_2 x_{t-b-2} + \dots + n_{p+s} x_{t-b-p-s})] + (o_1 \alpha_{t-1} + \\ o_2 \alpha_{t-2} + \dots + o_{q+r} \alpha_{t-q-r})]^2 \right] \quad (2.60)$$

Agar diperoleh keadaan maksimum, fungsi *likelihood* (2.60) perlu dilogaritmakan.

$$\ln L(m_1, n_0, n_1, \sigma^2) = -\frac{1}{2n} \ln(2\pi) - \frac{1}{2n} \ln(\sigma_\alpha^2) - \frac{1}{2\sigma_\alpha^2} \sum_{t=1}^n [(Z_t - m_1 Z_{t-1} - \\ m_2 Z_{t-2} - \dots - m_{p+r} Z_{t-p-r}) - [(n_0 x_{t-b} + n_1 x_{t-b-1} +$$

$$n_2x_{t-b-2} + \dots + n_{p+s}x_{t-b-p-s}]] + (o_1\alpha_{t-1} + o_2\alpha_{t-2} + \dots + o_{q+r}\alpha_{t-q-r})]^2 \quad (2.61)$$

(Wei, 2006).

Estimasi parameter tersebut diperoleh harus dengan menggunakan metode iterasi karena tidak dapat diselesaikan secara analitik, sehingga perhitungannya diselesaikan dengan menggunakan bantuan fasilitas komputer.

2.11 Prosedur *Box-Jenkins*

Langkah – langkah yang harus dilakukan dalam membangun model data deret waktu menggunakan prosedur *Box-Jenkins* adalah:

a. Identifikasi

Identifikasi model merupakan langkah awal dalam membangun model dalam prosedur *Box-Jenkins*. Salah satu identifikasi yang dapat dilakukan dengan membuat plot data deret waktu. Pembuatan plot ini untuk mengetahui terdapat atau tidak masalah stasioner dalam data deret waktu yang digunakan. Plot yang digunakan adalah plot ACF dan PACF.

Menurut Gujarati (2009) pemilihan model ARIMA (p,d,q) dengan ACF maupun PACF secara grafis mengikuti ketentuan sebagai berikut:

Tabel 2.2 Pola ACF dan PACF Untuk Model ARIMA

Tipe Model	Pola Umum dari ACF	Pola Umum dari PACF
AR(p)	Eksponensial menurun atau seperti pola gelombang sinus atau dapat membentuk keduanya	Menurun drastis pada lag p

MA(q)	Menurun drastis pada lag q	Menurun secara eksponensial atau seperti pola gelombang sinus atau dapat membentuk keduanya
ARMA (p,q)	Menurun secara eksponensial	Menurun secara eksponensial

b. Estimasi Parameter Model

Pendugaan parameter yang digunakan adalah penduga kemungkinan maksimum (Maximum Likelihood Estimators / MLE). Misalkan $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ adalah sampel random dari populasi dengan densitas $f(Z_i; \theta)$, fungsi *likelihood* didefinisikan dengan:

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \prod_{i=1}^n f(Z_i; \theta).$$

Bila fungsi *likelihood* ini terdiferensikan dalam θ maka calon *estimator likelihood* yang mungkin adalah $\hat{\theta}$ sedemikian sehingga:

$$\frac{\partial L(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} = 0$$

Untuk membuktikan bahwa $\hat{\theta}$ benar-benar memaksimumkan fungsi *likelihood* $L(\hat{\theta})$ harus ditunjukkan bahwa:

$$\frac{\partial^2 L(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}^2} < 0$$

Dalam banyak kasus dimana diferensi digunakan, akan lebih mudah bekerja pada logaritma dari $L(\hat{\theta})$. Hal ini dimungkinkan karena fungsi logaritma naik tegas

pada $(0, \infty)$ yang berarti bahwa $L(\hat{\theta})$ mempunyai ekstrem yang sama (Hogg and Craig, 1995).

Saat pendugaan yang diperoleh berbentuk implisit, maka perlu dilakukan metode numerik untuk memperoleh nilai dugaan. Metode numerik yang banyak digunakan adalah metode Newton-Raphson. Metode Newton Raphson adalah metode untuk menyelesaikan persamaan non linear secara iteratif seperti persamaan likelihood yang mencari lokasi yang memaksimalkan suatu fungsi.

Dasar dari metode ini adalah pendekatan deret taylor sebagai berikut:

$$f(\theta_{t+1}) = f(\theta_t) + \sum_{i=1}^p \frac{1}{i!} \frac{\partial^i f(\theta_t)}{\partial (\theta_t)^i} (\theta_{t+1} - \theta_t)^i$$

bila pada suku order 1 maka:

$$f(\theta_{t+1}) = f(\theta_t) + (\theta_t - \theta_{t+1}) f'(\theta_t)$$

Karena persoalan mencari akar, maka $f(\theta_{t+1}) = 0$, sehingga

$$0 = f(\theta_t) + (\theta_t - \theta_{t+1}) f'(\theta_t)$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \frac{f(\theta_t)}{f'(\theta_t)}$$

Metode ini dapat diperluas untuk menyelesaikan sistem persamaan dengan lebih dari satu parameter. Misal $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ maka iterasinya sebagai berikut:

$$\theta_{t+1} = \theta_t - (H_t)^{-1} G_t$$

Dengan indeks t menyatakan ukuran iteratif. Untuk $G, \theta_{t+1}, \theta_t$ dalam bentuk vektor, dan H dalam bentuk matriks. Adapun langkah-langkah metode iterasi Newton Raphson adalah sebagai berikut:

1. Ambil estimasi awal dari θ misal θ_0 .
2. $\hat{\theta}_1 = \theta_0 - H(\hat{\theta}_0)^{-1} G(\hat{\theta}_0)$ merupakan derivative pertama dari $f(\theta)$ pada $\theta = \hat{\theta}_t$.

3. $\hat{\theta}_{t+1} = \hat{\theta}_t - H(\hat{\theta}_t)^{-1}G(\hat{\theta}_t)$ dengan $H(\hat{\theta}_t) = H_t$ dan $G(\hat{\theta}_t) = G_t$ sehingga $\hat{\theta}_{t+1} = \hat{\theta}_t - (H_t)^{-1}G_t$.

4. Estimator $\hat{\theta}_t$ diiteratif hingga diperoleh nilai jarak antara $\hat{\theta}_{t+1}$ dan $\hat{\theta}_t$ sangat kecil atau $\hat{\theta}_{t+1} - \hat{\theta}_t = \varepsilon$.

Untuk G , $\hat{\theta}_{t+1}$ dan $\hat{\theta}_t$ dalam bentuk vektor, dan H dalam bentuk matriks yaitu :

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial(\theta_1)^2} & \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial\theta_1 \partial\theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial\theta_1 \partial\theta_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial(\theta_p)^2} & \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial\theta_p \partial\theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial(\theta_p)^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Dan } G = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(\theta)}{\partial\theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F(\theta)}{\partial\theta_p} \end{bmatrix}$$

(Gilat dan Subramaniam, 2011).

Setelah diperoleh nilai dugaan untuk parameter, selanjutnya dilakukan uji kelayakan model dengan mencari model yang terbaik. Model yang terbaik dapat diperoleh dengan menggunakan *Akaike's Information Criterion* (AIC) dan *Bayesian Information Criterion* (BIC). AIC dan BIC didefinisikan sebagai berikut:

$$AIC = \ln \left(\sum_{t=1}^T \frac{\alpha_t^2}{T} \right) + \frac{2k}{T} \quad (2.62)$$

$$BIC = \ln \left(\sum_{t=1}^T \frac{\alpha_t^2}{T} \right) + \frac{k \ln(T)}{T} \quad (2.63)$$

dengan α_t^2 merupakan kuadrat residual, T banyaknya pengamatan, dan $k = p + q + 1$ (jumlah total parameter yang diduga).

c. Evaluasi Model

Model terbaik terpilih sementara kemudian dilakukan pemeriksaan diagnostik pada model terpilih untuk melihat model yang terpilih cukup memadai. Pada pemeriksaan diagnostik dilakukan pengujian pada residual model yang terpilih. Model dapat dikatakan memadai jika residual (α_t) yang diperoleh dari tahap estimasi parameter merupakan *white noise error* dan juga dilakukan uji normalitas menggunakan plot normalitas. Sedemikian sehingga α_t bersifat acak yang tidak ada autokorelasi dan dengan distribusi normal yang memiliki nilai tengah konstan ($E(\alpha_t) = 0$), varians konstan ($Var(\alpha_t) = \sigma^2$), dan $Cov(\alpha_t, \alpha_{t+k}) = 0$ untuk semua $k \neq 0$. Jika model yang terpilih belum memadai (residual (α_t) bukan *white noise error*) maka dilakukan kembali pemilihan model yang terbaik.

d. Peramalan

Peramalan merupakan tahap terakhir dalam analisis model dari data deret waktu. Untuk meramalkan G waktu ke depan menggunakan model intervensi dengan persamaan (2.57) berikut:

$$\delta(B)\phi(B)(1 - B)^d Z_t = \phi(B)(1 - B)^d \omega(B)B^b x_t + \delta(B)\theta(B)\alpha_t$$

$$m(B)Z_t = n(B)x_{t-b} + o(B)\alpha_t$$

Kemudian pada waktu $t+G$, persamaannya menjadi:

$$Z_{t+G} = \sum_{j=1}^{p+r} m(B)Z_{t+G-j} + n_0 x_{t-b+G} - \sum_{k=1}^{p+s} n_k x_{t-b-k+G} + \alpha_{t+G} - \sum_{l=1}^{q+r} o_l \alpha_{t-l+G} \quad (2.64)$$

Dengan r adalah order $\delta(B)$, p order bagi $\phi(B)$, s order bagi $\omega(B)$, dan q order bagi $\theta(B)$. Untuk G waktu ke depan *mean error* untuk peramalan dapat diperoleh dari persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
\hat{Z}_{t+G}(G) &= E[Z_{t+G}|Z_t, Z_{t-1}, \dots, X_t, X_{t-1}, \dots] \\
&= \sum_{j=1}^{p+r} m(B)\hat{Z}_{t+G-j}(t) + n_0\hat{x}_{t-b+G}(t) - \sum_{k=1}^{p+s} n_k\hat{x}_{t-b-k+G}(t) - \\
&\quad \sum_{l=1}^{q+r} o_l\alpha_{t-l+G} \quad \text{untuk } G = 1, 2, \dots, q
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Bentuk MA akan hilang untuk $G > q + r$, sehingga persamaan (2.64) diperoleh menggunakan:

$$E[\alpha_{t-l+G}|Z_t, Z_{t-1}, \dots, X_t, X_{t-1}, \dots] = \begin{cases} \alpha_{t-l+G}, & l \geq G \\ 0, & l < G \end{cases} \tag{2.66}$$

Dan

$$\begin{aligned}
\hat{X}_t(h) &= E[X_{t+h}|Z_t, Z_{t-1}, \dots, X_t, X_{t-1}, \dots] \\
&= E[X_{t+h}|X_t, X_{t-1}, \dots]
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Persamaan (2.66) menyiratkan bahwa hubungan antara X_t dan Z_t searah dan $\hat{X}_t(h)$ adalah peramalan dari model ARIMA $\phi(B)(1 - B)^d N_t = \theta(B)\alpha_t$. Sehingga peramalan $\hat{Z}_{t+G}(G)$ dapat dihitung secara rekursif dari persamaan (2.66) dan (2.67). varians dari *error* peramalan dapat diperoleh dari MA tak terbatas untuk X_t dan N_t

$$\begin{aligned}
X_t &= \frac{\theta(B)}{\varphi(B)}\alpha_{t1} \\
&= \Psi(B)\alpha_{t1}
\end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned}
X_t &= \frac{\theta(B)}{\varphi(B)}\alpha_{t2} \\
&= \Psi(B)\alpha_{t2} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \Psi_l \alpha_{t2-l}
\end{aligned}$$

Oleh Karena bentuk MA tak terbatas dari model fungsi transfer ditambah *noise* diberikan sebagai:

$$Z_t = v(B)\Psi(B)\alpha_{t1-b} + \Psi(B)\alpha_{t2}$$

$$Z_t = v(B)^* \alpha_{t1-b} + \Psi(B) \alpha_{t2}$$

$$Z_t = \sum_{l=0}^{\infty} v_l^* \alpha_{t1-b-l} + \sum_{l=0}^{\infty} \Psi_l \alpha_{t2-l} \quad (2.68)$$

Maka peramalan minimum *mean error* dapat dijelaskan sebagai:

$$\hat{Z}_{t+G} = \sum_{l=G-b}^{\infty} v_l^* \alpha_{t1+G-b-l} + \sum_{l=0}^{G-1} \Psi_l \alpha_{t2+G-l} \quad (2.69)$$

Dan *error* peramalan G waktu ke depan adalah:

$$\begin{aligned} e_t(G) &= Z_{t+G} - \hat{Z}_{t+G} \\ &= \sum_{l=0}^{G-b-1} v_l^* \alpha_{t1+G-b-l} + \sum_{l=0}^{G-1} \Psi_l \alpha_{t2+G-l} \end{aligned} \quad (2.70)$$

(Montgomery, 2008).

Untuk mengetahui besarnya kesalahan dalam peramalan dapat dilihat dengan menghitung nilai rata-rata kesalahannya, yaitu *mean absolut error* (MAE), *root mean square error* (RMSE), dan *mean absolute percentage error* (MAPE).

Ukuran akurasi peramalan tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$MAE = \sum_{t=1}^T \frac{|\hat{Z}_t - Z_t|}{T} \quad (2.71)$$

$$RMSE = \sqrt{\sum_{t=1}^T \frac{(\hat{Z}_t - Z_t)^2}{T}} \quad (2.72)$$

$$MAPE = \frac{\sum_{t=1}^T \frac{|\hat{Z}_t - Z_t|}{Z_t}}{T} \times 100 \quad (2.73)$$

Ukuran akurasi peramalan tersebut mengukur keragaman pada peramalan residual. Peramalan akan baik jika ukuran akurasi memiliki nilai keragaman yang kecil.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung dan waktu penelitian dilaksanakan pada semester genap tahun akademik 2015/2016.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini diperoleh secara skunder, yaitu data Indeks Harga Konsumen (IHK) bulanan Kota Bandar Lampung tahun 2009-2016. Sumber data diperoleh dari Badan Pusat Statistik Provinsi Lampung. Data dikumpulkan secara periodik dari Januari 2009-Januari 2016. Sehingga terdapat 85 pengamatan.

3.3 Metode Penelitian

Langkah – langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

- a. Plot *time series* dan uji stasioner

Pengujian stasioner terhadap *mean* menggunakan *difference* dilakukan jika akar-akar unitnya lebih dari α (taraf nyata). Sedangkan pengujian stasioner

terhadap varian menggunakan transformasi dilakukan jika nilai lamda (λ) $\neq$ 1. Selanjutnya stasioner juga diuji dengan uji *Augmented Dickey Fuller*.

- b. Pengelompokkan data menjadi dua kelompok, yaitu:
 - i. Data sebelum intervensi (pre-intervensi)
 - ii. Data saat dan setelah intervensi (post-intervensi)
- c. Pemodelan ARIMA data sebelum intervensi, yaitu:
 - i. Identifikasi model
 1. Tentukan orde Autoregresi (AR) dan *Moving Average* (MA).
 Pengamatan dilakukan pada korelogram ACF dan PACF untuk melihat pola grafik dan tentukan orde dengan mengikuti ketentuan pemilihan orde.
 2. Pilih model terbaik untuk dianalisis
 - ii. Estimasi Parameter Model dengan Bantuan *Software R*
 - iii. Evaluasi Model dengan Pengujian terhadap residual model. Model yang memadai bersifat *random (white noise)*:
 1. Uji Idependensi
 2. Uji Normalitas
- d. Pemodelan data Intervensi:
 - i. Identifikasi respon intervensi
 - ii. Estimasi parameter pada model intervensi:
 1. Membangun model intervensi dengan ARIMA pre-intervensi dan respon intervensi

2. Mengestimasi parameter pada model intervensi yang dibangun dengan MLE dan dikarenakan tidak dapat diselesaikan secara analitik didekati menggunakan metode *Newton Raphson*.
- iii. Evaluasi model intervensi dengan Pengujian terhadap residual model. Model yang memadai bersifat *random (white noise)*:
 1. Uji Idependensi
 2. Uji Normalitas
- e. Peramalan dengan model intervensi fungsi step.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. *Estimasi* parameter ω_0 , ω_1 , ω_2 , dan ϕ_1 pada model Intervensi dengan metode iterasi *Newton Raphson* diperoleh $\hat{\omega}_0 = -48,5399$, $\hat{\omega}_1 = 0,0000$, $\hat{\omega}_2 = 0,0000$, dan $\hat{\phi}_1 = 0,500$
2. Model intervensi menggunakan fungsi step yang diperoleh dari data Indeks Harga Konsumen (IHK) Bandar Lampung Januari 2009- Januari 2016 yaitu :
$$Z_t = -48,5399X_t + \alpha_t + N_{t-1} + 0,500\nabla N_{t-1}$$
3. Hasil peramalan dengan model intervensi fungsi step pada data Indeks Harga Konsumen (IHK) Bandar Lampung Februari 2016 – Juli 2016 adalah :

Bulan	Peramalan
Februari 2016	124,6008
Maret 2016	124,9519
April 2016	125,2755
Mei 2016	125,5739
Juni 2016	125,8489
Juli 2016	126,1025

DAFTAR PUSTAKA

- Box, G.E.P. dan Jenkins, G.M. 2016. *Time Series Analysis Forecasting and Control*. Holden Day, Inc., California.
- Brockwell, Peter J. dan Richard A. Davis. 2002. *Introduction to Time Series and Forecasting Second Edition*. Springer. United States of America.
- Brooks, Chris. 2014. *Introductory Econometrics for Finance Third Edition*. Cambridge University Press. New York.
- Enders, Walter. 2015. *Applied Econometric Time Series Fourth Edition*. John Wiley and Sons, Inc., New Jersey.
- Gilat, Amos and Subramaniam, Vish. 2011. *Numerical Methods for Engineers and Scientist*. Third Edition. John Wiley and Sons, United States of America.
- Gujarati, Damodar N., and Dawn C. Porter. 2009. *Basic Econometrics Fifth Edition*. McGraw-Hill/Irwin Companies, Inc., New York.
- Hogg, Robert V., dan Allen T. Craig. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics Fifth Edition*. Prentice-Hall International, Inc., New Jersey.
- Montgomery, D.C., Jennings, C.L. dan Kulahci, M. 2008. *Introduction to Time Series Analysis and Forecasting*. John Wiley and Sons, Inc., New Jersey.
- Pankratz, A. 1991. *Forecasting with Dynamic Regression Models*. John Wiley and Sons, Inc., Canada.
- Tsay, Ruey S. 2010. *Analysis of Financial Time Series Third Edition*. John Wiley and Sons, Inc., New Jersey.
- Wei, W.S. 2006. *Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods*.

Pearson Education, Inc., New York.

Yafee, R.A. dan McGee, M. 1999. *Introduction to Time Series Analysis and Forecasting with Applications with SAS and SPSS*. Academic Press, Inc.