GENERALISASI BILANGAN TAU

(Skripsi)

Oleh
Jorgi Maridho Sijabat

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2016

ABSTRACT

GENERALIZATIONS OF TAU NUMBER

By

Jorgi Maridho Sijabat

Kennedy and Cooper defined a positive integer to be a tau number if $\tau(n) \mid n$, where τ is the number-of-divisors function. The first few Tau numbers are

$$1, 2, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 40, 56, 60, 72, 80, \ldots;$$

it is Sloane's sequence . Among other things, Kennedy and Cooper showed the Tau numbers have density zero.

The concept of Tau number was rediscovered by Colton, who called these numbers refactorable . This paper is primarily concerned with two conjectures made by Colton. Colton conjectured that the number of Tau numbers less than or equal to a given n was at least half the number of primes less than or equal to n. Other results are also given, including the properties of the T au numbers as compared to the primes. Various generalizations of the Tau numbers are also discussed.

It is possible to generalize the concept of tau number. First consider that the definition of tau number is equivalent to n mod τ (n) = 0. We now say that n is a tau number relative to k if n mod τ (n) = k. Of course, k = 0 gives the ordinary tau numbers and it is easy to see that every odd prime is a tau number relative to 1. Also it is easy to see that any n is a tau number relative to k, for some k.

Keywords : Tau number, prime number, positive integer, generalization tau number

ABSTRAK

GENERALISASI BILANGAN TAU

Oleh

Jorgi Maridho Sijabat

Kennedy dan Cooper mendefinisikan bilangan bulat positif menjadi bilangan Tau jika $\tau(n) \mid n$, τ adalah fungsi banyaknya pembagi dari n. Beberapa bilangan Tau pertama antara lain

$$1, 2, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 40, 56, 60, 72, 80, \ldots ;$$

yang merupakan barisan Sloane. Selain itu, Kennedy dan Cooper menunjukkan bahwa bilangan Tau mempunyai densitas nol.

Konsep bialngan Tau ditemukan ulang oleh Colton, yang mneyebut bilangan tersebut dapat difaktorkan kembali. Colton menduga bahwa bilangan Tau kurang dari atau sama dengan setengah dari banyaknya bilangan prima dari n yang diberikan. CSelanjutnya Colton menduga bahwa untuk bilangan n yang cukup besar juga masih berlaku dengan membuktikan perumumannya.

Sangat mungkin untuk memperumum konsep bilangan Tau. Pertama perhatikan bahwa defenisi bilangan Tau ekuivalen dengan $n \bmod \tau(n) = 0$. Selanjutnya dikatakan bahwa n bialngan Tau relatif dengan k jika $n \bmod \tau(n) = k$. Sehingga jika $k = 0$, maka diperoleh bilangan Tau biasa dan mudah untuk dilihat bahwa setiap bilangan prima ganjil merupakan bilangan Tau yang relatif dengan 1. Juga, mudah dilihat bahwa sebarang bilangan Tau n relatif dengan k, untuk suatu k.

Kata Kunci : Bilangan Tau , bilangan prima, bilangan bulat positif , perumuman bilangan Tau

GENERALISASI BILANGAN TAU

Oleh

Jorgi Maridho Sijabat

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar

SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2016

Judul Skripsi : **GENERALISASI BILANGAN TAU**

Nama Mahasiswa : *Jorgi Maridho Sijabat*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1217031039

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Amanto, S.Si., M.Si.
NIP 19730314 200012 1 002

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **18 Oktober 2016**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Jorgi Maridho Sijabat**

Nomor Pokok Mahasiswa : **12170301039**

Program Studi : **Matematika**

Jurusan : **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagai persyaratan penyelesaian studi pada universitas atau institut lain.

Bandar Lampung, Oktober 2016
Yang menyatakan

Jorgi Maridho Sijabat
NPM. 1217031039

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Tanjung Enim pada tanggal 12 Mei 1994, sebagai anak kedua dari empat bersaudara dari Bapak Tumpal Sijabat dan Ibu Hartati Dewi. Pendidikan Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SD Negeri 1 Tanjung Enim pada tahun 2006, Sekolah Menengah Pertama (SMP) Xaverius 3 Panjang pada tahun 2009, Sekolah Menengah Atas (SMA) Taman Sisiwa Teluk Betung pada tahun 2012.

Tahun 2012 penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, FMIPA UNILA melalui jalur Mandiri Unila. Selama menjadi mahasiswa, penulis pernah bergabung di Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) yang diamanahkan menjadi anggota bidang Kaderisasi dan Kepemimpinan periode 2013-2015 dan penulis pernah bergabung di ROIS FMIPA UNILA yang diamanahkan menjadi kepala bidang Kajian periode 2013-2014 . Pada tahun 2015 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di PT. Berindo Jaya bypass Bandar Lampung. Penulis melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Taman Negri, Kecamatan Way Bungur, Kabupaten Lampung Timur pada tahun 2015.

MOTTO

"Allah tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya"

(Al-Baqarah: 286)

"Karena sesungguhnya bersama setiap kesulitan ada kemudahan"

(Al-Insyirah: 5)

"Wahai manusia, sesungguhnya kamu bekerja keras dengan sungguh-sungguh untuk menuju kepada Tuhanmu lalu kamu akan menemui-Nya"

(Al-Insyiqaq: 6)

"Belajar dari hari kemarin, hidup untuk hari ini, dan berharap untuk hari esok"

(Albert Einstain)

PERSEMBAHAN

Dengan Mengucap puji dan syukur kehadirat Allah SWT

Kupersembahkan karya kecilku ini untuk :

Ayah, Ibu, kakak dan adikku tercinta yang menjadi sosok inspirasiku dalam

bertingkah laku dan berfikir

Keluarga Besarku tercinta yang selalu memberikan

semangat untuk menyelesaikan skripsi ini

Dosen Pembimbing dan Penguji yang sangat berjasa,

seluruh sahabat-sahabatku dan Almamaterku Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah dengan rasa syukur kehadirat Allah SWT atas berkat rahmat dan karunia-Nya skripsi ini dapat diselesaikan. Skripsi dengan judul **“Generalisasi Bilangan Tau”** disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.S.i.) di Universitas Lampung. Selesainya penulisan skripsi ini, adalah juga berkat motivasi dan pengarahan serta bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis ingin menyampaikan terima kasih banyak kepada:

1. Bapak Prof. Warsito, S.Si, D.E.A., Ph. D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
2. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku pembimbing I terima kasih atas segala bantuan dan waktunya untuk membimbing, memberi arahan, dan menasehati dalam penyelesaian skripsi ini.
3. Bapak Drs. Tiryono Rubby, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing II terima kasih untuk bimbingan, kritik dan saran selama penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji, atas kesediaannya untuk menguji, memberikan saran dan kritik yang membangun dalam proses penyelesaian skripsi ini.
5. Bapak Drs. Tiryono Rubby, M.Sc., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Sekretaris Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung sekaligus dosen pembimbing Akademik.
7. Bapak Drs. Suharsono, M.S., M.Sc., Ph.D. selaku dosen pembimbing akademik yang telah membimbing penulis selama mengikuti perkuliahan di Jurusan Matematika Universitas Lampung.
8. Seluruh dosen, karyawan dan staff Jurusan Matematika yang tidak dapat disebutkan satu persatu.
9. Keluarga kecilku, ibu dan ayahku tercinta yang selalu memberikan semangat dan beliaulah yang selalu memberikan contoh terbaik dalam hidupku, terima kasih segalanya yang telah diberikan.
10. Kakakku dan adikku tersayang yang telah memberi hiburan disaat jenuh dan memberi semangat untuk bisa mengejar skripsi ini.
11. Seluruh keluarga besarku baik yang ada di Medan maupun Palembang terima kasih atas semangat dan dukungannya.
12. Sahabat-sahabat kampus Giovanny, Danar, Candra, Rendi, Angger, Topik, Anwar, Pras, Nata, Iskandar, Gerry, Yefta, Angga, Chalid, Novian, Al, dan Bang Aji terimakasih kalian telah memberikan banyak pengalaman hidup serta mengajari banyak hal yang membuat tidak bosan, telah banyak menghibur, banyak memberi motivasi hidup dengan hal yang konyol, selalu memberi semangat dan berbagi cerita hal apapun.
13. Cewek-cewek kece yang selama ini juga membantu dalam menyelesaikan skripsi Anisa, Erni, Oma, Nia, Mput, Ratih, Yama, dan yang lainnya yang tidak bisa di sebutkan satu-persatu.

14. Sahabat-sahabatku 2012 (teman seperjuangan) yang tidak bisa disebutkan satu persatu terima kasih banyak semangatnya.
15. Adik tingkat 2013-2016 yang selalu memberi dukungan dan yang selalu memberi canda tawa saat di kampus dan diluar kampus.
16. Sahabat-sahabatku yang turut membantu menyelesaikan skripsi ini termasuk The Circle Band (Agung, Adit, Leman dan Uyi) beserta crew.
17. Almamaterku tercinta Universitas Lampung.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, akan tetapi besar harapan semoga skripsi yang sederhana ini dapat berguna dan bermanfaat bagi kita semua. Aammiiin. Sekali lagi terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini.

Bandar Lampung, Oktober 2016
Penulis

Jorgi Maridho Sijabat

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori bilangan merupakan salah satu cabang matematika yang telah lama dipelajari. Pada awalnya, ‘keindahan’ sifat bilangan atau sistem bilangan merupakan suatu daya tarik tersendiri bagi pakar-pakar matematika dalam mengembangkan konsep-konsep dalam teori bilangan.

Awal kebangkitan teori bilangan modern dipelopori oleh Pierre de Fermat (1601-1665), Leonhard Euler (1707-1783), J.L Lagrange (1736-1813), A.M. Legendre (1752-1833), Dirichlet (1805-1859), Dedekind (1831-1916), Riemann (1826-1866), Giussepe Peano (1858-1932), Poisson (1866-1962), dan Hadamard (1865-1963). Sebagai seorang pangeran matematika, Gauss begitu terpesona terhadap keindahan dan kecantikan teori bilangan dan untuk melukiskannya, ia menyebut teori bilangan sebagai *The Queen of Mathematics* (Burton, 1980).

Bilangan adalah suatu konsep matematika yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran. Simbol ataupun lambang yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan disebut sebagai angka atau lambang bilangan. Dalam matematika, konsep bilangan selama bertahun-tahun lamanya telah diperluas yang meliputi bilangan nol, bilangan negatif, bilangan rasional, bilangan irasional, dan bilangan kompleks.

Bilangan pada awalnya hanya dipergunakan untuk mengingat jumlah, namun dalam perkembangannya setelah para pakar matematika menambahkan perbendaharaan simbol dan kata-kata yang tepat untuk mendefenisikan bilangan maka matematika menjadi hal yang sangat penting bagi kehidupan dan tak bisa kita pungkiri bahwa dalam kehidupan keseharian kita akan selalu bertemu dengan yang namanya bilangan, karena bilangan selalu dibutuhkan baik dalam teknologi, sains, ekonomi ataupun dalam dunia musik, filosofi dan hiburan serta banyak aspek kehidupan lainnya. Bilangan dahulunya digunakan sebagai simbol untuk menggantikan suatu benda misalnya kerikil, ranting yang masing-masing suku atau bangsa memiliki cara tersendiri untuk menggambarkan bilangan dalam bentuk simbol. Ada beberapa macam-macam bilangan, salah satunya adalah bilangan Tau.

Bilangan Tau pertama kali didefinisikan oleh Curtis Cooper dan Robert E. Kennedy di mana mereka menunjukkan bahwa bilangan tau memiliki kepadatan alami nol Kennedy dan Cooper mendefinisikan bahwa bilangan bulat positif menjadi bilangan tau jika $\tau(n)|n$, di mana τ adalah jumlah pembagi fungsi. Beberapa bilangan tau pertama adalah

$$1,2,8,9,12,18,24,36,40,56,60,72,80, \ldots ;$$

itu adalah urutan Sloane **A033950** (Cooper, 1990).

Zelinsky membuktikan bahwa tidak ada tiga bilangan bulat berurutan semuanya bisa menjadi bilangan Tau (J. Zelinsky, 2002). Bilangan Tau kemudian ditemukan kembali oleh Simon Colton menggunakan program komputer yang telah diciptakannya dan mendapatkan definisi dari berbagai bidang matematika seperti teori bilangan dan teori graf. Colton menyebutnya bilangan "*refactorable*". Penemuan ini merupakan salah satu yang pertama kalinya bahwa program komputer telah menemukan ide baru atau yang sebelumnya tidak jelas. Colton membuktikan banyak hasil tentang bilangan *refactorable*, yang menunjukkan bahwa ada tak terhingga banyaknya dan membuktikan berbagai batasan kongruensi distribusinya. Colton baru belakangan diberitahu bahwa Cooper dan Kennedy sebelumnya telah meneliti topik tersebut. Colton membuktikan bahwa tidak ada bilangan tau sempurna. Persamaan $GCD(n, x) = \tau(n)$ memiliki solusi hanya jika n adalah bilangan Tau (Colton, 1999).

Pada tahun 2001 Bob Palais memperkenalkan bilangan Tau sebagai pengganti 3,14 atau Pi yang biasa dikenal dalam perhitungan keliling dan luas lingkaran. Palais mengungkapkan bahwa selama ribuan tahun, manusia telah memfokuskan pada bilangan matematika yang salah. Bilangan Pi adalah rasio antara keliling lingkaran dan diameternya (3,14), sedangkan bilangan Tau adalah rasio antara keliling lingkaran dan jari-jarinya (6,28) atau 2Pi. Pernyataan ini diperkuat kembali oleh seorang matematikawan Kevin Houston yang mengatakan kelebihan bilangan Tau, Houston mengatakan “Ketika mengukur sudut, matematikawan tidak mengunakan derajat, tetapi radian. Ada 2Pi radian dalam satu lingkaran. Ini berarti seperempat lingkaran setara dengan 1/2Pi. Ini berarti seperempat setara dengan setengah”. Akan lebih mudah jika menggunakan bilangan Tau dimana seperempat lingkaran sama dengan sepermpat tau.

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan, penulis tertarik melakukan penelitian tentang bilangan Tau dan melanjutkan penelitian Marie

Jusmiyati tentang karakteristik bilangan Tau. Dalam penelitian ini akan dibahas tentang bentuk umum dari bilangan Tau, sehingga penulis memilih judul **"Generalisasi Bilangan Tau"**.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah " Bagaimana generalisasi bilangan Tau? "

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah mengkaji generalisasi bilangan Tau.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Dapat memberikan pemikiran dalam rangka memperluas dan memperdalam pengetahuan ilmu matematika khususnya mengenai teori bilangan.
2. Menambah pengetahuan tentang generalisasi bilangan Tau.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan konsep dasar (pengertian) tentang bilangan prima, bilangan kuadrat sempurna (*perfect square*), kuadrat bebas (*square free*), keterbagian, factor persekutuan terbesar (FPB), modulo, relasi kongruensi dan karakteristik bilangan tau yang akan digunakan dalam pembahasan hasil penelitian.

2.1 Bilangan Prima

Definisi 2.1.1. Sebuah bilangan bulat $p > 1$ disebut bilangan prima, jika dan hanya jika habis dibagi dengan 1 dan bilangan itu sendiri atau p (Burton, 1980).

Definisi 2.1.2. Bilangan $a, b \in \mathbb{R}$, a dan b dikatakan coprima atau relative prima jika $\gcd(a, b) = 1$. Dengan kata lain *a* dan *b* tidak mempunyai faktor prima bersama (Burton, 1980).

Contoh 2.1.1. Bilangan 10 dan 13 adalah relatif prima, begitu pula 31 dan 36 juga merupakan relatif prima, sedangkan 50 dan 65 bukan relatif prima.

Teorema 2.1.1. Setiap bilangan bulat n, n > 1 dapat dinyatakan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima (mungkin hanya memiliki satu faktor) (Sukirman, 1997).

Lebih lanjut dari teorema di atas , karena faktor-faktor prima itu mungkin tidak saling berbeda, maka hasil kali bilangan-bilangan prima dari bilangan bulat n dapat ditulis sebagai $n = p_1^{a_1} p_2^{\sim 2} ... p_k^{a_k}$ dengan $p_1, p_2, ..., p_k$ sebagai faktor-faktor prima dari n dan $a_1, a_2, ..., a_k$ merupakan eksponen positif berturut-turut $p_1, p_2, ..., p_k$.

Definisi 2.1.3. Bentuk $n = p_1^{a_1} p_2^{\sim 2} ... p_k^{a_k}$ disebut representasi *n* sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima, sering pula bentuk itu disebut bentuk kanonik *n*.

Akibat 2.1.3 (Teorema Fundamental Aritmatika) :
Sebarang bilangan bulat positif n > 1 dapat ditulis dengan tunggal dalam bentuk kanonik $n = p_1^{a_1} p_2^{2} ... p_k^{a_k}$ dengan $a_1, a_2, ..., a_k$ bilangan bulat positif dan $p_1, p_2, ..., p_k$ bilangan prima dan $p_1 < p_2 < ... < p_k$.

Contoh 2.1.2 :
Bentuk kanonik dari bilangan bulat :

a. 360 = $2^3.3^2.5$
b. 4725 = $3^3.5^2.7$
c. 17460 = $2^3.3^2.5.7^2$

Teorema 2.1.4 (Teorema Direchlet) Jika gcd (*a*,*b*) =1, maka himpunan {*n* : *an* + *b* prima} tak berhingga banyak.

Berikut ini akan diberikan teorema terkait bilangan prima dengan relasi kongruensi.

Teorema 2.1.5 (Teorema Fermat) **J**ika *p* adalah prima dan p tidak membagi a, maka a^{p-1}ø1 (mod *p*)

Akibat 2.1.6. *Jika p prima, maka* $a^p \equiv a$ (*mod p*) *untuk sebarang bilangan bulat a*.

Teorema 2.1.7. Jika p dan q bilangan prima berbeda sedemikian hingga $a^p \equiv a \pmod{q}$ dan $a^q \equiv a \pmod{p}$, maka $a^{pq} \equiv a \pmod{pq}$.

2.2 Bilangan Kuadrat Sempurna

Definisi 2.2.1. Bilangan kuadrat sempurna adalah suatu bilangan yang jika diakar (dipangkatkan setengah) hasilnya berupa bilangan asli (Burton, 1976).

Contoh 2.2.1. Berikut ini merupakan bilangan kuadrat sempurna 1, 4, 9, 16, 25, 36,….

Banyak faktor dari bilangan kuadrat sempurna adalah ganjil. Karena ada satu pasang faktornya yang berpasangan dengan dirinya sendiri. Sehingga jumlah faktornya sebanyak bilangan ganjil. Faktor dari bilangan yang bukan merupakan kuadrat sempurna, misalnya bilangan 8. Faktor-faktornya yaitu 1, 8, 2 dan 4. Faktor-faktornya saling berpasangan, 1 dan 8, dan 2 dan 4.Sedangkan pada bilangan kuadrat sempurna, misalnya 9, faktor-faktornya adalah 1, 9 dan 3. Yang berpasangan adalah 1 dan 9, sedangkan 3 berpasangan dengan dirinya sendiri. Beberapa bilangan kuadrat sempurna yang pertama adalah 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, …**)**

Definisi 2.2.2. *Square free* adalah bilangan bulat yang tidak dapat dibagi oleh bilangan kuadrat sempurna kecuali 1 (Burton, 1976).

Contoh 2.2.2 :

1. 10 adalah *square free*, karena 10 tidak habis dibagi dengan 4 dan 9
2. 18 bukan *square free* karena bias dibagi $3^2 = 9$

Barisan *square free*:

1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 34, 35, 36, 38, 39, dan seterusnya.

Teorema 2.2.1. Bilangan bulat positif *n* dikatakan *square free* jika hanya jika faktor prima dari *n* tidak muncul lebih dari satu kali (Burton, 1980).

Contoh 2.2.3 :

1. $10 = 2 \cdot 5$
2. $26 = 2 \cdot 13$

2.3 Keterbagian

Definisi 2.3.1 Sebuah bilangan bulat b dikatakan terbagi atau habis dibagi oleh bilangan bulat $a \neq 0$ jika terdapat bilangan bulat c sehingga $b = ac$, ditulis $a|b$. Notasi $a \nmid b$ digunakan untuk menyatakan b tidak habis terbagi oleh a. Jadi 12 terbagi oleh 4 sebab $12 = 4 \cdot 3$, tetapi 10 tidak terbagi oleh 3 sebab tidak ada bilangan bulat c sehingga $10 = 3c$, atau setiap bilangan bulat c berlaku $10 \neq 3c$. Dalam kasus ini ditulis $4|12$ dan $3 \nmid 10$ (Sukirman, 1997).

Istilah lain untuk $a|b$ adalah a faktor dari b, $a$pembagi b atau b kelipatan dari a. Bila a pembagi b maka $-a$ juga pembagi b, sehingga pembagi suatu bilangan selalu terjadi berpasangan. Jadi dalam menentukan semua faktor dari suatu bilangan bulat cukup ditentukan faktor-faktor positifnya saja, kemudian tinggal menggabungkan faktor negatifnya. Fakta sederhana yang diturunkan langsung dari definisi adalah sebagai berikut:

$$a|0, 1|a, \text{dan } a|a \text{ untuk } a \neq 0$$

Fakta $a|0$ dapat dijelaskan bahwa bilangan 0 selalu habis dibagi oleh bilangan apapun yang tidak nol. Fakta $1|a$ mengatakan bahwa 1 merupakan faktor atau pembagi dari bilangan apapun termasuk bilangan 0. Fakta $a|a$ menyatakan bahwa bilangan tidak nol selalu habis membagi dirinya sendiri dengan hasil baginya adalah 1.

Berdasarkan pengertian keterbagian bilangan terdapat pada Definisi 2.1, maka berikut ini akan diberikan teorema tentang keterbagian.

Teorema 2.3.1

Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku pernyataan berikut :

1. $a|1$ jika dan hanya jika $a = 1$ atau $a = -1$.
2. Jika $a|b$ dan $c|d$ maka $ac|bd$.
3. Jika $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$.
4. $a|b$ dan $b|a$ jika dan hanya jika $a = b$ atau $a = -b$.
5. Jika $a|b$ dan $b \neq 0$, maka $|a| < |b|$.
6. Jika $a|b$ dan $a|c$, maka $a|(bx + cy)$ untuk sebarang bilangan bulat *x* dan *y*

(Sukirman, 1997).

Bukti.

1. Jika $a = 1$ atau $a = -1$,maka jelas bahwa $a|1$, sesuai penjelasan sebelumnya. Sebaliknya, diketahui $a|1$ berarti ada $k \in \mathbb{Z}$ sehinga 1 = *ka*. Persamaan ini hanya dipenuhi oleh dua kemungkinan berikut: $k = 1$, $a = 1$ atau $k = -1, a = -1$. Jadi berlaku jika $a|1$ maka $a = 1$ atau $a = -1$. Jadi terbukti $a|1$ jika hanya jika $a = 1$ atau $a = -1$,

2. Diketahui $a|b$ dan$c|d$ yaitu ada $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga $b = k_1a$ dan $d = k_2c$.

   Dengan mengalikan kedua persamaan tersebut diperoleh :

   $bd = (k_1k_2)ac$, yaitu $ac|bd$.
3. Diketahui $a|b$ dan $b|c$,maka terdapat $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga

   $$b = k_1a \tag{2.1}$$

   dan

   $$c = k_2b \tag{2.2}$$

   Substitusi persamaan (2.1) ke persamaan (2.2), diperoleh

   $$c = k_2b = k_2(k_1a) = (k_1k_2a).$$
4. Diketahui

   $$a = k_1b \tag{2.3}$$

   dan

   $$b = k_2a \tag{2.4}$$

   Persamaan (2.3) dikalikan dengan persamaan (2.4), diperoleh $ab = (k_1k_2)(ab)$. Diperoleh$k_1k_2 = 1$, yakni $k_1 = k_2 = 1$ atau $k_1 = k_2 = -1$, jadi terbukti $a = b$ atau $a = -b$
5. Diberikan $b = ac$ untuk suatu $c \in \mathbb{Z}$. Diambil nilai mutlaknya $|b| = |ac| = |a||c|$. Karena $b \neq 0$ maka $|c| \geq 1$. Sehingga diperoleh $|b| = |a||c| \geq |a|$.
6. Diketahui $a|b$dan $a|c$, maka terdapat $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $b = k_1a$ dan $c = k_2a$. Untuk sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku

   $$bx + cy = k_1ax + k_2ay = (k_1x + k_2y)a$$

   yang berarti $a|(bx + cy)$. ■

Pernyataan terakhir teorema ini berlaku juga untuk berhingga banyak bilangan yang dibagi oleh a, yaitu $a|b_k, k = 1, \cdots, n$ yaitu:

$$a|(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n)$$

untuk setiap bilangan bulat $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Selanjutnya, akan dibahas pengertian faktor persekutuan terbesar.

2.4 Modulo

Definisi 2.4.1. Misalkan *a* adalah bilangan bulat dan *m* adalah bilangan bulat > 0. Operasi *a* mod *m* (dibaca "*a* modulo *m*") memberikan sisa jika *a* dibagi dengan *m*.

Notasi: *a* mod *m* = *r* sedemikian sehingga *a* = *mq* + *r*, dengan $0 \leq r < m$. Bilangan *m* disebut modulus atau modulo, dan hasil aritmetika modulo *m* terletak di dalam himpunan {0, 1, 2, …, *m* – 1} (Grillet, 2007).

Contoh 2.4.1 Beberapa hasil operasi dengan operator modulo:

23 mod 5 = 3 (23 = 5 • 4 + 3)

27 mod 3 = 0 (27 = 3 • 9 + 0)

2.5 Relasi Kongruensi

Definisi 2.5.1 Misalkan *a* dan *b* adalah bilangan bulat dan m bilangan bulat dengan $m > 0, a$ kongruen dengan b mod m, dituliskan dengan $a \equiv b$ (mod *m*) jika *m* habis membagi *a* – *b*.Jika *a* tidak kongruen dengan *b* dalam modulus *m*, maka dapat ditulis $a \not\equiv b$ (mod *m*) (Grillet, 2007).

Contoh 2.5.1

17 ≡ 2 (mod 3) (3 habis membagi 17 – 2 = 15)

12 ≢2 (mod 7) (7 tidak habis membagi 12 -2 =10)

Kekongruenan $a \equiv b$ (mod *m*) dapat pula dituliskan dalam hubungan

a = *b* + *km* , dengan ini *k* adalah bilangan bulat..

Contoh 2.5.2

17 ≡2 (mod 3) dapat ditulis sebagai 17 = 2 + 5 .3

–7 ≡15 (mod 11) dapat ditulis sebagai –7 = 15 + (–2)11

Contoh 2.5.3
Beberapa hasil operasi dengan relasi kongruensi berikut:

23 mod 5 = 3 dapat ditulis sebagai 23 ≡ 3 (mod 5)

27 mod 3 = 0 dapat ditulis sebagai 27 ≡ 0 (mod 3)

Berdasarkan pengertian kongruen terdapat pada Definisi 2.3.1, maka berikut ini akan diberikan teorema tentang kongruen.

Teorema 2.5.1.

Misalkan *m* adalah bilangan bulat positif.

1. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan *c* adalah sebarang bilangan bulat maka

   (i) $(a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$

   (ii) $ac \equiv bc \pmod{m}$

   (iii) $a^p \equiv b^p \pmod{m}$ untuk suatu bilangan bulat tak negatif *p*.

2. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$, maka

   (i) $(a + c) \equiv (b + d) \pmod{m}$

   (ii) $ac \equiv bd \pmod{m}$

(Grillet, 2007).

Bukti:
(i) $a \equiv b \pmod{m}$ berarti $a = b + km$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$

Untuk sebarang $c \in \mathbb{Z}$, diperoleh

$$a + c = b + c + km$$

$$\Leftrightarrow a + c = (b + c)(\text{mod } m)$$

(ii) $a \equiv b$ (mod m) berarti:

$a = b + km$, untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow a - b = km$

$\Leftrightarrow (a - b)c = ckm$

$\Leftrightarrow ac - bc = ckm$

$\Leftrightarrow ac = bc + ckm$

$\Leftrightarrow ac = bc + lm$, dengan $l = ck$

$\Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod m$

(iii) $a \equiv b$ (mod m) berarti $a = b + km$ dengan $k \in \mathbb{Z}$

$p \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

$a^p = (b + km)^p$

$\Leftrightarrow a^p = b^p + \binom{p}{1}b^{p-1}k + \binom{p}{2}b^{p-2}k^2m + \cdots + \binom{p}{p-1}b(km)^{p-1} +$

$(km)^p$

$= b^p + \{\binom{p}{1}b^{p-1}km + \binom{p}{2}b^{p-2}(km)^2 + \cdots + \binom{p}{p-1}bk^{p-1}m^{p-2} +$

$k^p m^{p-1}\}m$

$\Leftrightarrow a^p \equiv b^p(\mathrm{mod})m$

2. (i) $a \equiv b$ (mod m) $\Leftrightarrow a = b + k_1m$, untuk suatu $k_1 \in \mathbb{Z}$

$c \equiv d$ (mod m) $\Leftrightarrow c = d + k_2m$, untuk suatu $k_2 \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) + (k_1 + k_2)m$

$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) + km(k = k_1 + k_2)$

$\Leftrightarrow (a + c) \equiv (b + d) \pmod m$

(ii) $a \equiv b$ (mod m) $\Leftrightarrow a = b + mk$, untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$

$c \equiv d$ (mod m) $\Leftrightarrow c = d + ml$, untuk suatu $l \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow a \cdot c = (b + mk)(d + ml)$$

$$\Leftrightarrow a \cdot c = bd + blm + kdm + klm^2$$

$$\Leftrightarrow a \cdot c = bd + (bl + kd + klm)m$$

$$\Leftrightarrow a \cdot c \equiv bd (\text{mod } m)$$

2.6 Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Definisi 2.6.1 Misalkan *a* atau *b* bilangan – bilangan bulat yang tidak nol, *d* adalah faktor persekutuan terbesar (FPB) atau adalah greatest common divisor dari *a* dan *b* (ditulis (*a,b*)) jika dan hanya jika *d* faktor persekutuan dari *a* dan *b*, jika *c* faktor persekutuan dari *a* dan *b* maka $c \leq d$.

Dari Definisi 2.1.1, maka dapat dinyatakan sebagai berikut :

$d = (a, b)$ jika hanya jika

(i) $d|a$ dan $d|b$, dan

*(ii)*j ika $c|a$ dan $c|b$ maka $c \leq d$.

Syarat (i) menyatakan bahwa *d* adalah faktor persekutuan dari *a* dan *b*. Sedangkan syarat (ii) menyatakan bahwa *d* adalah faktor persekutuan terbesar (Burton, 1980).

2.7 Fungsi Teoritik Bilangan

Pada sub bab ini akan diberikan definisi dua fungsi teoritik bilangan ,yaitu fungsi phi dan fungsi thau.

Definisi 2.7.1

Untuk bilangan bulat positif n, fungsi®(n) (n) adalah banyaknya bilangan prima yang kurang dari atau sama dengan n.

Contoh 2.7.1

®(6) = 3, yaitu 2, 3 dan 5

Definisi 2.7.2

Untuk bilangan bulat positif n, fungsi$\tau(n)$ adalah banyaknya faktor positif dari n.

Contoh 2.7.2

$\tau(6) = 4$, yaitu 1, 2, 3 dan 6

Definisi 2.7.3 (Bilangan Tau)

Bilangan bulat positif n disebut bilangan Tau jika²$(n) \mid n$

Contoh 2.7.3

Bilangan 1, 2, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 48, 56, 60, 72, 80,…merupakan bilangan Tau.

Definisi 2.7.4

Untuk bilangan bulat positif n, didefinisikan T(n) adalah banyaknya bilangan Tau kurang dari atau sama dengan n.

2.8 Karakteristik Dasar Bilangan Tau

Definisi 2.8.1

Fungsi $\pi(n)$ adalah fungsi yang menyatakan banyaknya bilangan prima yang kurang dari atau sama dengan *n*. Sedangkan fungsi *T* (n) menyatakan banyaknya bilangan Tau kurang dari atau sama dengan *n*.

Contoh 2.8.1 :

1) $n = 2$, maka $\tau(n) = 2$, yaitu $\{1,2\}$

   $\pi(n) = 1$, yaitu $\{2\}$

   $T(n) = 2$, yaitu $\{1,2\}$

2) $n = 4$, maka $\tau(n) = 3$, yaitu $\{1,2,3\}$

   $\pi(n) = 2$, yaitu $\{2,3\}$

   $T(n) = 2$, yaitu $\{1,2\}$

3) $n = 8$, maka $\tau(n) = 4$, yaitu $\{1,2,4,8\}$

   $\pi(n) = 4$, yaitu $\{2,3,5,7\}$

   $T(n) = 3$, yaitu $\{1,2,8\}$

4) $n = 10$, maka $\tau(n) = 4$, yaitu $\{1,2,5,10\}$

   $\pi(n) = 4$, yaitu $\{2,3,5,7\}$

   $T(n) = 4$, yaitu $\{1,2,8,9\}$

Beberapa bilangan Tau pertama adalah 1,2,8,9,12,18,24,36,40, ….

$\tau(1) = 1$, (1 adalah bilangan Tau karena $\tau(1)|1$)

$\tau(2) = 2$, (2 adalah bilangan Tau karena $\tau(2)|2$)

$\tau(3) = 2$, (3 bukan bilangan Tau karena $\tau(3) \nmid 3$)

$\tau(4) = 3$, (4bukan bilangan Tau karena $\tau(4) \nmid 4$)

$\tau(5) = 2$, (5 bukan bilangan Tau karena $\tau(5) \nmid 5$)

$\tau(6) = 4$, (6 bukan bilangan Tau karena $\tau(6) \nmid 6$)

$\tau(7) = 2$, (7 bukan bilangan Tau karena $\tau(7) \nmid 7$)

$\tau(8) = 4$, (8 adalah bilangan Tau karena $\tau(8)|8$)

⋮

⋮

$\tau(24) = 8$, (24 adalah bilangan Tau karena $\tau(24)|24$)

Teorema 2.8.1

Jika $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ maka

$$\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \dots (a_k + 1).$$

Bukti :

Misalkan d suatu pembagi dari *n* , maka $d = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$ dengan $0 \leq b_i \leq a_i$ dan $1 \leq i \leq k$. Untuk setiap *i*, maka diperoleh bahwa $a_i + 1$ pilihan bagi b_i , sehingga diperoleh

$$\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \dots (a_k + 1). \blacksquare$$

Contoh 2.8.2 :

1. $\tau(4) = 3$

   Dengan Teorema 2.8.1 diperoleh

   $$4 = 2^2 \longrightarrow \tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$$

   $$\tau(4) = (2 + 1)$$

   $$= 3$$

2. $\tau(6) = 4$

   Dengan Teorema 2.8.1 diperoleh

$$6 = 2^1 . 3^1 \longrightarrow \tau(6) = (1+1)(1+1)$$
$$= 2.2$$
$$= 4$$

3. $\tau(200) = 12$

Dengan Teorema 2.8.1 diperoleh

$$200 = 2^3 . 5^2 \longrightarrow \tau(200) = (3+1)(2+1)$$
$$= 4.3 = 12$$

Jadi, $\tau(200) = 12$, yaitu $\{1,2,4,5,8,10,20,25,40,50,100,200\}$

Berikut akan diberikan teorema keterkaitan bilangan Tau dengan bilangan kuadrat sempurna.

Teorema 2.8.2

Setiap bilangan Tau ganjil adalah suatu kuadrat sempurna.

Bukti :

Diketahui n adalah bilangan Tau ganjil. Misalkan

$$n = p_1{}^{a_1} p_2{}^{a_2} p_3{}^{a_3} \ldots p_k{}^{a_k}$$

dengan p_i merupakan bilangan prima untuk setiap i.

Dengan Teorema 2.8.1 dan definisi dari bilangan Tau (Definisi 2.7.3), maka $(n) \mid n$. Sehingga, diperoleh

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \ldots (a_k + 1) \mid n$$

Oleh karena itu, untuk sebarang $0 < 1 < k + 1, a_1 + 1$ ganjil

($a_1 + 1$ ganjil karena n adalah bilangan Tau ganjil) $s$ehingga a_1 genap.

Karena setiap faktorisasi prima dari n muncul pangkat genap, maka n kuadrat sempurna. ■

Contoh 2.8.3

Misal : $g = 9$ adalah bilangan Tau ganjil

Maka, $g = 3^2 \rightarrow 2$ adalah pangkat genap

Contoh pangkat genap kuadrat sempurna :

$$x^4 = (x^2)^2$$

$$x^6 = (x^4)^2$$

Teorema 2.8.3

Sebuah bilangan bulat ganjil *n* merupakan bilangan Tau jika dan hanya jika *2n* adalah bilangan Tau.

Bukti :

Misalkan $n = p_1{}^{a_1} p_2{}^{a_2} \dots p_k{}^{a_k}$, maka

$\tau(2n) = 2(a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \dots (a_k + 1) = 2\tau(n).$

Karena $\tau(n)|n$ jika dan hanya jika $2\tau(n)|2n$, maka teorema di atas terbukti. ■

Contoh 2.8.4

Misalkan diambil n = 1 bilangan Tau ganjil, maka 2n = 2 juga merupakan bilangan Tau. Untuk n = 9 yang merupakan bilangan Tau ganjil, maka 2n = 18 juga merupakan bilangan Tau.

Teorema 2.8.4

Setiap bilangan Tau kongruen dengan 0,1,2 atau 4 mod 8.

Bukti :

Pembuktian teorema ini mengikuti Teorema 2.8.2 dan Teorema 2.8.3.

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada semester ganjil tahun ajaran 2016/2017.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam menyelesaikan tugas akhir ini adalah:

1. Mempelajari dan mengumpulkan materi tentang bilangan Tau.
2. Menentukan generalisasi/bentuk perumuman dari bilangan Tau.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan terkait bilangan Tau dapat disimpulkan hal-hal berikut :

1. Jika FPB(m,n) = 1 dan m, n keduanya adalah bilangan Tau, maka mn adalah bilangan Tau
2. Untuk setiap bilangan prima yang berbeda $p, q > 3$, bilangan $36pq$ adalah bilangan Tau.
3. Jika $n \equiv 4 \pmod{24}$, maka n bukan bilangan Tau.
4. Untuk sebarang bilangan k ganjil terdapat tak berhingga n sedemikian hingga n merupakan bilangan Tau yang relatif dengan k.
5. Untuk sebarang $Q(n)$ polinomial dengan koefisien bilangan bulat, terdapat tak terhingga banyaknya n sehingga $\tau(n) \mid Q(n)$.

DAFTAR PUSTAKA

Kennedy, R. E. and Cooper, C.N. 1990. Tau Numbers, Natural Density, and Hardy and Wright's Theorem 437. *Internat. J. Math. Sci.*, Vol. **13,** 383 - 386.

Burton, D. M. 1980. *Elementary Number Theory.* University Of New Hampshire.United State of Afrika.

Grillet, P.A. 2007. *Graduate Text In Mathematics.* Second Edition. Springer. New York.

Simolton Colton, 1990. Refactorable Numbers : A Machine Invention. *Journal of Integer Sequences*, Vol. 2, Article 99.1.2.

Sukirman, M. P. 1997. *Ilmu Bilangan.* Universitas Terbuka. Jakarta.