KARAKTERISTIK GRUP RIORDAN

(Skripsi)

Oleh

Anissa Septya Rizky

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

2016

ABSTRACT

CHARACTERISTICS RIORDAN GROUP

By

ANISSA SEPTYA RIZKY

The Riordan group is a group of infinite lower triangular matrices that are defined by two generating functions, g and f. The k column of the matrix has the generating function gf^k. In the Double Riordan group there are two generating function f_1 and f_2 such that the columns, starting at the left, have generating functions using f_1 and f_2 alternately. Examples include Dyck paths with level steps of length 2 allowed at even height and also ordered trees with differing degree possibilities at even and odd height(perhaps representing summer and winter). The Double Riordan group is a generalization not of the Riordan group itself but of the checkerboard subgroup. In this context both familiar and far less familiar sequences occur such as the Motzkin numbers and the number of spoiled child trees. The latter is a slightly enhanced cousin of ordered trees which are counted by the Catalan numbers.

ABSTRAK

KARAKTERISTIK GRUP RIORDAN

Oleh

ANISSA SEPTYA RIZKY

Riordan grup adalah grup tak terbatas matriks bersegitiga bawah yang didefinisikan oleh dua fungsi pembangkit, g dan f. Kolom k dari matriks memiliki fungsi pembangkit gf^k. Pada double Riordan grup ada dua fungsi pembangkit f_1 dan f_2 sehingga kolom, dimulai dari sebelah kiri, telah menghasilkan fungsi menggunakan f_1 dan f_2 bergantian. Contohnya termasuk jalur Dyck dengan langkah-langkah tingkat panjang 2 diizinkan di bahkan tinggi dan pohon-pohon juga memerintahkan dengan kemungkinan tingkat berbeda di genap dan ganjil tinggi (mungkin mewakili musim panas dan musim dingin). Double Riordan grup adalah bukan generalisasi dari Riordan grup itu sendiri tetapi dari *Checkerboard Subgroup*. Dalam konteks ini terkenal dan jauh lebih terkenal terjadi urutan seperti nomor Motzkin dan jumlah anak pohon. Yang terakhir adalah sepupu sedikit ditingkatkan pohon memerintahkan yang dihitung oleh angka Catalan.

KARAKTERISTIK GRUP RIORDAN

Oleh

Anissa Septya Rizky

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar

SARJANA SAINS

Pada

Program Studi Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

2016

Judul Skripsi	: **KARAKTERISTIK GRUP RIORDAN**
Nama Mahasiswa	: Anissa Septya Rizky
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1117031003
Program Studi	: Matematika
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Amanto, S.Si., M.Si.	**Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.**
NIP 19730314 200012 1 002	NIP 19620704 198803 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Amanto, S.Si., M.Si.** .....

Sekretaris : **Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.** .....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Agus Sutrisno, M.Si.** .....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **18 Oktober 2016**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"Karakteristik grup Riordan"** merupakan hasilkarya saya sendiri bukan hasil orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Oktober 2016

Penulis

Anissa Septya Rizky

NPM. 1117031003

RIWAYAT HIDUP

Penulis adalah putri satu-satunya, dari bapak Bambang Sutadi dan Ibu Asnizar yang dilahirkan pada 18 September 1993 di Bandar Lampung, Lampung.

Sekolah kanak-kanak telah diselesaikan di TK Tunas Karya pada tahun 1999. Pendidikan dasar diselesaikan di SD Kartika II-5 Bandar Lampung pada tahun 2005. Selanjutnya, pendidikan diselesaikan di SMP N 5 Bandar Lampung pada tahun 2008 dan dilanjutkan ke sekolah menengah atas di SMA N 10 Bandar Lampung pada tahun 2011.

Penulis melanjutkan pendidikan S1 Matematika di Universitas Lampung. Selama menjadi mahasiswi, penulis pernah aktif di Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) sebagai anggota pada periode 2013-2014.

Pada awal tahun 2015, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di desa Sriwijaya, Kecamatan Tanjung Raya, Mesuji. Selain itu pada awal tahun 2014 penulis juga melaksanakan kerja praktik di Dinas Pendidikan dan Kebudayaan Provinsi Lampung.

MOTTO

Ikhlas selalu dalam mengerjakan apapun dan dalam kondisi apapun.

Semangat, Shalat, Do'a serta Dzikir selalu dipanjatkan kepada Allah SWT.

Puji Syukur kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat mempersembahkan karya kecil ini untuk :

Mama Tercinta

dan

Ayah Tersayang

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT atas ridho dan karunianya karya ilmiah ini dapat diselesaikan.

Skripsi dengan "**Karakteristik Grup Riordan**" merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung. Dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Prof. Warsito, D.E.A,.P.hD. selaku dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung beserta jajarannya.
2. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph,D. selaku ketua Jurusan Matematika beserta jajarannya.
3. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing utama atas kesediaan memberi ilmu, waktu, bimbingan, saran dan nasihat-nasihat dalam pembuatan skripsi ini.
4. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph,D. selaku dosen pembimbing kedua yang telah memberikan bimbingan, saran dan nasihat-nasihat dalam pembuatan skripsi ini.

5. Bapak Agus Sutrisno, M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran dalam pembuatan skripsi ini.
6. Ibu Dra. Dorrah Azis, M.Si. selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan kepada penulis selama menjalani studinya.
7. MAMA yang selalu memberikan motivasi, semangat, kasih sayang yang begitu dalamnya, do'a yang tiada henti-hentinya dan materi yang tak henti-hentinya.
8. AYAH yang selalu memberikan do'a serta kasih sayangnya.
9. Nenek serta semua keluarga yang telah memberikan dukungan dalam bentuk semangat, do'a atau materi kepada penulis.
10. Muhammad Haidir Alam yang selalu menemani dengan penuh kesabaran dan atas do'a, bantuannya serta memberikan semangat, motivasinya, kasih sayangnya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini.
11. Triani, Ayu, Faiga yang selalu memberikan semangat, dukungan, dan motivasi serta do'a kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
12. Gusti, Iril, Joe, Dela yang selalu memberikan semangat dan dukungan kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
13. Besti yang selalu memberikan semangat, do'a, dukungan dan motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
14. Feby yang selalu memberikan do'a dan dukungan kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
15. Febyka dan Mas Ryan yang selalu memberikan semangat, do'a dan motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

16. Keluarga Matematika angkatan 2011 dan HIMATIKA yang terus memberi semangat dan dukungan, terimakasih atas kebersamaan dan pengalaman yang tak terlupakan.
17. Semua pihak yang telah membantu penulis baik selama masa studi maupun dalam penyelesaian skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa tulisan sederhana ini masih jauh dari kesempurnaan, akan tetapi terselip harapan semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi masyarakat luas. Aamiin.

Bandar Lampung, Oktober 2016

Penulis

Anissa Septya Rizky

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR ISI ..... **i**

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Batasan Masalah 3

1.3 Tujuan Penelitian 3

1.4 Manfaat Penelitian 4

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Bilangan Bulat 5

2.2 Barisan dan Deret 6

2.3 Sigma 13

2.4 Matriks 14

2.5 Operasi-operasi Matriks 15

2.6 Sifat-sifat Operasi Matriks 18

2.7 Grup 19

2.8 Grup Riordan 21

2.9 Generating Function 23

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 25

3.2 Metode Penelitian..... 25

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Karakteristik Grup Riordan..... 26

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

DAFTAR PUSTAKA

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan bidang ilmu yang sangat penting dan bermanfaat dalam kehidupan sehari-hari. Berbagai macam fenomena dan kejadian yang sangat erat kaitannya dengan dunia matematika. Bidang lain seperti fisika, kimia, bahkan biologi tidak terlepas dari dunia matematika. Dalam penggunaannya matematika, tidak hanya terpaku pada sebuah rumus-rumus yang telah ada.

Dalam kehidupan sehari–hari, sering berhadapan dengan persoalan yang apabila kita telusuri ternyata merupakan masalah matematika. Dengan mengubahnya kedalam bahasa atau persamaan matematika, maka persoalan tersebut lebih mudah diselesaikan. Tetapi, terkadang kita mengalami kesulitan jika suatu persoalan seringkali memuat lebih dari dua persamaan atau variabel. Bahkan di negara maju, sering ditemukan model ekonomi yang harus dipecahkan dengan suatu sistem persamaan dengan puluhan atau ratusan variabel.

Pada dasarnya, matriks merupakan suatu alat atau instrumen yang cukup ampuh untuk memecahkan persoalan tersebut. Matriks memudahkan kita untuk membuat analisis-analisis yang mencakup hubungan variabel–variabel dari suatu persoalan. Gagasan matriks pertama kali diperkenalkan oleh Athur Cayley (1821-1895) pada tahun 1859 di Inggris dalam sebuah studi sistem persamaan linear dan transformasi linear. Namun pada awalanya, matriks hanya dianggap permainan karena tidak bisa diaplikasikan. Baru pada tahun 1925 (30 tahun setelah Cayley meninggal), matriks digunakan pada mekanika kuantum. Selanjutnya matriks mengalami perkembangan yang pesat dan digunakan dalam berbagai bidang.

Suatu barisan $U_1, U_2 U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$ disebut baris aritmatika jika selisih dua suku sebelum dan sesudahnya tetap, dimana selisih tersebut dinamakan beda (b) dan rumus umum untuk suku ke-n nya adalah $U_n = a + (n-1)b$ dengan a adalah suku pertama pada barisan tersebut dan b adalah beda yaitu $U_2 - U_1$.

Grup adalah suatu himpunan beserta satu operasi biner, seperti perkalian atau penjumlahan, yang memenuhi beberapa aksioma. Misalnya, himpunan bilangan bulat adalah suatu grup terhadap operasi penjumlahan. Cabang matematika yang mempelajari grup disebut teori grup. Banyak sekali objek yang dipelajari dalam matematika ternyata berupa grup. Hal ini mencakup sistem bilangan, seperti bilangan bulat, bilangan rasional,

bilangan nyata dan bilangan kompleks terhadap penjumlahan, atau bilangan rasional, bilangan nyata, dan bilangan kompleks yang tak-nol, masing-masing terhadap perkalian. Contoh penting lainnya misalnya matriks non-singular terhadap perkalian, dan secara umum, fungsi terinverskan terhadap komposisi fungsi. Teori grup memungkinkan sifat-sifat sistem-sistem ini dan berbagai sistem lain untuk dipelajari dalam lingkup yang umum, dan hasilnya dapat diterapkan secara luas. Teori grup juga merupakan sumber kaya berbagai teorema yang berlaku dalam lingkup grup.

1.2 Batasan Masalah

Pada penelitian ini akan diselidiki bagaimana metode ataupun cara membuktikan suatu matriks merupakan grup Riordan.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dilakukannya penelitian ini, yaitu mengkaji karakteristik dari grup Riordan.

1.4 Manfaat Penelitian

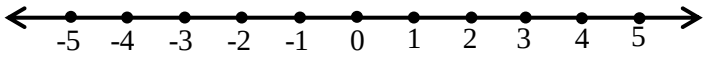
Manfaat penelitian ini adalah :

1. Menambah pengetahuan dan pengalaman penulis agar dapat mengembangkan ilmu yang diperoleh selama mengikuti perkuliahan di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung
2. Memberikan sumbangan pemikiran untuk memperluas dan memperdalam ilmu matematika dibidang aljabar terutama tentang grup Riordan.
3. Memberikan motivasi bagi pembaca dan peniliti untuk mengkaji lebih dalam permasalahan yang berhubungan dengan grup Riordan.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Bilangan Bulat

Bilangan Bulat merupakan bilangan yang terdiri dari bilangan cacah dan negatifnya. Yang termasuk dalam bilangan cacah yaitu 0,1,2,3,4,… sehingga negatif dari bilangan cacah yaitu -1,-2,-3,-4,… Himpunan semua bilangan bulat dilambangkan dengan Z atau Ƶ. Himpunan Z tertutup terhadap operasi penjumlahan, operasi pengurangan dan operasi perkalian.



Berdasarkan garis bilangan di atas, bilangan bulat positif terletak disebelah kanan nol atau disebut dengan bilangan asli sedangkan untuk bilangan bulat negatif terletak di sebelah kiri nol.

Sifat-sifat operasi bilangan bulat :

(i) (Asosiatif)

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

(ii) (Komutatif)

$a + b = b + a$

$a \times b = b \times a$

(iii) (Unsur Identitas)

$a + 0 = a$

$a \times 1 = a$

(iv) (Distributif)

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

(v) (Invers)

$a + (-a) = 0$ (Riyanto, 2008)

2.2 Barisan dan Deret

Dalam bahasa sederhana, barisan $(a_{1,}a_{2,}a_3, ...)$ adalah susunan bilangan-bilangan real yang teratur, satu untuk bilangan bulat positif. Lebih tepatnya, barisan tak terhingga (Infinite Sequence) adalah fungsi yang daerah asal (domain)-nya adalah himpunan bilangan bulat positif dan daerah hasil (range)-nya adalah himpunan bilangan real. Kita dapat menotasikan sebuah barisan dengan $a_{1,}a_{2,}a_3, ...$ dengan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ atau sederhana dengan $\{a_n\}$. Kadangkala, kita juga dapat sedikit memperluas batasan tersebut dengan membuat daerah asalnya terdiri dari seluruh bilangan bulat yang lebih besar atau sama dengan bilangan bulat tertentu,

seperti $b_0 b_{1,} b_2, \ldots$ dan $c_8, c_{9,} c_{10}, \ldots$ yang masing masing dilambangkan dengan $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dan $\{c_n\}_{n=8}^{\infty}$

Sebuah barisan dapat ditentukan dengan memberikan suku awal yang cukup untuk membentuk sebuah pola, seperti pada

1, 4, 7, 10, 13, . . .

Dengan rumus eksplisitnya untuk suku ke-n yaitu $a_n = 3n - 2$; $n \geq 1$.

(Purcell, 2002)

Definisi 2.2.1

Jika U_n bilangan real, $\forall_n$ maka jumlahan :

$$\sum_{n=1}^{\sim} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots$$

Disebut dengan deret :

Selanjutnya :

i. U_n suku ke-n dari deret tersebut.

ii. $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$ disebut dengan jumlah parsial ke-n dari deret tersebut. $S_1 = U_1, S_2 = U_1 + U_2, S_3 = U_1 + U_2 + U_3$

iii. $\{sin\} = S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ Barisan jumlah parsial dari deret tersebut.

Perhatikan : $\lim_{n\to 4} S_n = \lim_{n\to 4} \sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{\sim} U_k$

Definisi 2.2.2

Deret $\sum_{k=1}^{\sim} U_k$ dikatakan <u>konvergen</u>. Jika barisan jumlah parsialnya konvergen : $\lim_{n\to 4} S_n$ ada.

Contoh :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{\sim}{n+1}$$

$S_n = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ konvergen ke 1.

$\therefore \sum_{k=1}^{\sim} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$

Catatan : Jika barisan jumlah parsialnya divergen, maka deret $\sum_{k=1}^{\sim} U_k$ katakan divergen.

Contoh : * $\sum_{k=1}^{\sim} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots$

** $\sum_{n=1}^{\sim} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \{1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots\} = +\sim$$

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\sim} U_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to\sim} U_n = 0$

$\Leftrightarrow$ {jika $\lim_{n\to\sim} U_n \neq 0$, maka $\sum_{n=1}^{\sim} U_n$ divergen}

Bukti :

$\sum_{n=1}^{\sim} U_n$ konvergen$(= \ell)$ berarti

$$\lim_{n\to\sim} \sin \ell$$

$$\lim_{n\to\sim} \sin -1 = \ell$$

$$\lim_{n\to\sim} U_n = \lim_{n\to\sim} (\tan - \sin -1) = \ell - \ell = 0$$

Contoh : $\sum_{n=1}^{\sim} \frac{n}{n+1}$, $U_n = \frac{n}{n+1}$

$$\lim_{n\to\sim} U_n = \lim_{n\to\sim} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

$\therefore$ $\frac{\sim}{\frac{2}{n=1}} \frac{n}{n+1}$ divergen.

Selanjutnya merupakan deret tak terhingga. Dalam sebuah paradox yang terkenal sekitar 2400 tahun yang lalu. Zeno dari Elea mengatakan bahwa seorang pelari tidak dapat menyelesaikan sebuah pertandingan karena pelari tersebut pertama harus memutuskan setengah jarak, kemudian setengah jarak sisanya, kemudian setengah dari sisa jarak yang masih ada,

dan seterusnya, selamanya. Karena waktu tempuh pelari adalah terhingga. Meskipun demikian, kita mengetahui bahwa kenyataannya pelari-pelari dapat menyelesaikan pertandingan.

Bayangkan sebuah lintasan pertandingan yang mempunyai jarak sepanjang 1 mil. Maka segmen-segmen dari argumen Zeno akan mempunyai panjang $\frac{1}{2}$ mil, $\frac{1}{4}$ mil, $\frac{1}{8}$ mil, dan seterusny. Dalam bahasa matematika, menyelesaikan pertandingan tersebut akan merupakan jumlah dari perhitungan

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$$

yang mungkin terlihat mustahil. Tetapi, tunggu dulu. Hingga saat ini, istilah *jumlah (sum)* hanya didefinisikan sebagai penambahan suku-suku yang terhingga banyaknya. Istilah "jumlah takterhingga" tak mempunyai makna bagi kita.

Perhatikan jumlah-jumlah parsial berikut ini

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{nd}}$$

Tampak jelas, jumlah-jumlah parsial tersebut semakin mendekat menuju 1. Kenyataannya,

$$\lim_{n \to \sim} S_n = \lim_{n \to \sim} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

Jumlah takterhingga kemudian didefinisikan sebagai limit dari jumlah parsial S_n.

Lebih umum lagi, perhatikan **deret takterhingga** *(infinite series)*

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

yang juga dilambangkan dengan $\sum_{k=1}^{\sim} a_k$ atau $\sum a_k$. Maka S_n, **jumlah parsial ke-*n*** *(n-th partial sum)*, dapat dinyatakan dengan

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Kita berikan definisi formal berikut ini.

Definisi 2.2.3

Deret takterhingga $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{\sim} a_k}$ **konvergen** *(converges)* dan mempunyai **jumlah** *(sum)* S jika barisan jumlah-jumlah parsial $\{S_n\}$ konvergen menuju S. Jika $\{S_n\}$ divergen, maka deret tersebut **divergen** *(diverges)*. Deret divergen tidak mempunyai jumlah.

Deret Geometrik (deret berbentuk)

$$\sum_{k=1}^{\sim} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

di mana $a \neq 0$ disebut **deret *geometric*** *(geometric series)*.

Contoh 1 Tunjukkan bahwa sebuah deret geometric konvergen dengan jumlah $S = a/(1-r)$ jika $|r| < 1$, tetapi divergen jika $|r| \geq 1$.

Penyelesaian

Misalkan $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$. Jika $r = 1$, $S_n = na$, yang akan bertambah tanpa batas, sehingga $\{S_n\}$ divergen. Jika $r \neq 1$, kita dapat menuliskan

$$S_n - rS_n = (a + ar + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n) = a - ar^n$$

sehingga

$$\boxed{S_n = \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}r^n}$$

Jika $|r| < 1$, maka $\lim_{n\to\sim} r^n = 0$ (Subbab 10.1, Contoh 5), sehingga

$$S = \lim_{n\to\sim} S_n = \frac{a}{1-r}$$

Jika $|r| > 1$ atau $r = -1$, maka barisan $\{r^n\}$ divergen, demikian pula dengan $\{S_n\}$. ■

Contoh 2 Gunakan hasil dari Contoh 1 untuk menentukan jumlah dari dua deret geometric berikut.

a) $\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \cdots$

b) $0{,}515151\ \ldots\ = \frac{51}{100} + \frac{51}{10.000} + \frac{51}{1.000.000} + \cdots$

Penyelesaian

a) $S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$

b) $S = \frac{\frac{51}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{51}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}$

Secara kebetulan, prosedur pada bagian (b) menyarankan bagaimana caranya untuk menunjukkan bahwa pengulangan bilangan decimal tertentu mempresentasikan sebuah bilangan rasional. ■

2.3 Sigma

Digunakan untuk menyatakan penjumlahan berurutan dari suatu bilangan. Simbol Σ merupakan huruf capital "S" dalam abjad Yunani dan juga huruf pertama dari kata SUM yang berarti jumlah.

Bentuk umum notasi sigma :

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$$

Berikut contohnya :

$$\sum_{i=1}^{50} 2i = 2.1 + 2.2 + 2.3 + \cdots + 2.50 = 2 + 4 + 6 + \cdots + 100$$

Sifat notasi sigma :

1. $\sum_{i=1}^{n} U_i = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$
2. $\sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{k=1}^{n} U_k$
3. $\sum_{i=1}^{n} K = nK$; dimana K adalah Konstanta
4. $\sum_{i=1}^{n} KU_i = K \sum_{i=1}^{n} U_i$
5. $\sum_{i=1}^{n} (U_i \pm V_i) = \sum_{i=1}^{n} U_i \pm \sum_{i=1}^{n} V_i$

6. $\sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=0}^{n-1} U_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} U_{i-1}$

7. $\sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=1}^{m} U_i + \sum_{i=m+1}^{n} U_1$; dimana 1 < m < n

8. $\sum_{i=m}^{n} U_i = \sum_{i=m+p}^{n+p} U_{i-p} = \sum_{i=m-p}^{n-p} U_{i+p}$

9. a. $\sum_{i=1}^{n} (U_i + V_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} U_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} U_i V_i + \sum_{i=1}^{n} V_i^2$

   b. $\sum_{i=1}^{n} (U_i - V_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} U_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} U_i V_i + \sum_{i=1}^{n} V_i^2$

(Purcell, 2002)

2.4 Matriks

Matriks merupakan suatu susunan angka berbentuk segiempat. Bilangan Bilangan dalam susunan itu disebut anggota dalam matriks. Ukuran matriks diberikan oleh jumlah baris (garis horisontal) dan kolom (garis vertikal) yang dikandungnya. Misalkan pada contoh matriks dibawah ini, matriks pertama mempunyai tiga baris dan dua kolom, sehingga ukurannya adalah 3 kali 2 (ditulis 3×2). Dalam suatu uraian ukuran, angka pertama selalu menyatakan jumlah baris dan angka kedua menyatakan jumlah kolom. Matriks matriks lainnya pada contoh dibawah ini masing masing mempunyai ukuran $1 \times 4, 3 \times 3, 2 \times 1,$ dan 1×1. Sebuah matriks dengan hanya satu kolom disebut matriks kolom, dan sebuah matriks dengan hanya satu baris disebut matriks baris.

Contoh 2.4.1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

Untuk menyatakan matriks, biasanya dengan menggunakan huruf besar, dan huruf kecil untuk menyatakan bilangan.

Contoh 2.4.2

A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ atau C = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

Anggota pada baris i dan kolom j dari sebuah matriks A akan dinyatakan sebagai a_{ij}. Jadi sebuah matriks umum 3×4 dapat ditulis sebagai

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

dan sebuah matriks umum$m \times n$ ditulis sebagai :

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{m}_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{mn} \end{bmatrix}$$

Sebuah matriks A dengan n baris dan n kolom disebut matriks bujur sangkar berorde n, dan anggota anggota m_{11}, m_{22}, ... m_{nn} disebut sebagai diagonal utama. (bisa dilihat pada matriks A diatas). (Anton, 2000)

2.5 Operasi Operasi Matriks

Definisi 2.5.1

Dua matriks didefinisikan sama jika keduanya mempunyai ukuran yang sama dan anggota naggotanya yang berpadanan sama.

Dalam notasi matriks, jika A=$[a_{ij}]$ dan B=$[b_{ij}]$ mempunyai ukuran yang sama maka A=B jika dan hanya jika $(A)_{ij}=(B)_{ij}$.

Contoh 2.5.2

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Jika x = 5, maka A = B, tidak ada nilai x yang membuat A = C karena A dan C adalah matriks dengan ukuran yang berbeda.

Definisi 2.5.3

Jika A dan B adalah matriks matriks berukuran sama, maka jumlah A+B adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota anggota B dengan anggota anggota A yang berpadanan, dan selisih A-B adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan anggota anggota A dengan anggota-anggota B yang berpadanan. Matriks-matriks berukuran berbeda tidak bisa ditambahkan atau dikurangkan.

Contoh 2.5.4

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

maka,

$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 2 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ dan $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & 0 \\ -4 & -6 & 6 \end{bmatrix}$

Ungkapan A+C, B+C, A-C, dan B-C tidak terdefinisi.

Definisi 2.5.5

Jika A adalah sebarang matriks dan c adalah sebarang skalar, maka hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap anggota A dengan c.

Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$,

maka

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$$

Contoh 2.5.6

Untuk matriks matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Kita mendapatkan

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \qquad (-1)\,B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Adalah umum menyatakan $(-1)B$ dengan $-B$.

Definisi 2.5.7

Jika A adalah sebuah matriks $m \times r$ dan B adalah sebuah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang anggota anggotanya didefinisikan sebagai berikut. Untuk mencari anggota dalam baris i dan kolom j dari AB, pilih baris i dari matriks A dan kolom secara bersama – sama dan kemudian jumlah hasilnya sama. (Anton, 2000)

2.6 Sifat-sifat Operasi Matriks

Pada bagian ini akan dibahas beberapa sifat operasi aritmatika pada matriks. Kita akan melihat bahwa banyak aturan dasar aritmatika untuk bilangan bilangan yang berlaku untuk matriks tetapi ada beberapa yang tidak.

Teorema 2.6.1

Dengan menganggap bahwa ukuran matriks matriks dibawah ini adalah sedemikian sehingga operasi yang bisa ditunjukkan bisa dilakukan, maka aturan aturannya adalah berikut ini :

a. $A + B = B + A$ (hukum komutatif untuk penjumlahan)

b. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (hukum asosiatif untuk penjumlahan)

c. $A(BC) = (AB)C$ (hukum asosiatif untuk perkalian)

d. $A(B + C) = AB + AC$ (hukum distributif kiri)

e. $(B + C)A = BA + CA$ (hukum distributif kanan)

f. $A(B - C) = AB - AC$

g. $(B - C)A = BA - CA$

h. $a(B + C) = aB + aC$

i. $a(B - C) = aB - aC$

j. $(a + b)C = aC + bC$

k. $(a - b)C = aC - bC$

l. $a(bC) = (ab)C$

m. $a(BC) = (aB)C = B(aC)$ (Anton, 2000)

2.7 Grup

Definisi 2.7.1

Diberikan himpunan G dan operasi biner $*$. G disebut grup yang dinotasikan dengan $(G,*)$ jika memenuhi aksioma berikut :

(i) $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \epsilon G$ (* bersifat assosiatif)

(ii) Terdapat elemen e di G, yang disebut identitas di G, sedemikan sehingga $a * e = e * a = a$, untuk setiap $a \epsilon G$;

(iii) Untuk setiap $a \epsilon G$ terdapat a^{-1} ϵG, sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, elemen a^{-1} disebut invers dari a (Dummit and Foote, 2004)

Untuk lebih memahami definisi grup, berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.7.2

Diberikan n bilangan bulat positif dan $nZ = \{nm \mid m \epsilon Z\}$. Akan ditunjukkan bahwa $< nZ, +>$ merupakan grup.

(i) Akan ditunjukkan bahwa nZ bersifat tertutup terhadap operasi +.

Diberikan sebarang $, y \epsilon nZ$ dengan $x = nm_1$ dan $y = nm_2$ untuk suatu $m_1, m_2, \epsilon Z$.

$x + y = nm_1 + nm_2 = n(m_1 + m_2) \quad \epsilon n\mathbb{Z}$

Jadi, $n\mathbb{Z}$ bersifat tertutup terhadap operasi +.

(ii) Akan ditunjukkan bahwa nZ bersifat tertutup terhadap operasi +.

Diberikan sebarang $x, y \epsilon nZ$ dengan $x = nm_1$ dan $y = nm_2$ dan $w = nm_3$ untuk suatu $m_1, m_2, m_3 \epsilon Z$, sehingga :

$$
\begin{aligned}
x + (y + w) &= nm_1 + (nm_2 + nm_3) \\
&= nm_1 + n(m_2 + m_3) \\
&= n(m_1 + (m_2 + m_3)) \\
&= n(m_1 + m_2) + m_3) \\
&= n(m_1 + m_2) + m_3) \\
&= (nm_1 + nm_2) + nm_3 \\
&= (x + y) + w
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa elemen di nZ bersifat assosiatif terhadap operasi +.

(iii) Akan ditunjukkan setiap elemen di $n\mathbb{Z}$ memiliki elemen identitas.

Untuk setiap $nm \epsilon nZ$, terdapat $0 \epsilon nZ$ sehingga untuk suatu $m \epsilon Z$ $nm + 0 = 0 + nm = nm$.

Jadi, elemen identitas pada nZ yaitu 0.

(iv) Akan ditunjukkan setiap elemen di nZ memiliki invers.

Diberikan sebarang $x \epsilon nZ$ dengan $x = nm$, akan ditentukan invers dari x sebagai berikut :

$x + y = 0$ (dengan y adalah invers dari x)

$nm + y = 0$

$y = 0 + (-nm)$

$y = -(nm)$

$y = n(-m) \epsilon nZ$

Jadi, invers dari nm adalah $n(-m)$. Hal ini berakibat bahwa setiap elemen di nZ memiliki invers.

Berdasarkan (i)-(iv) terbuktu bahwa nZ merupakan grup.

(Fraleigh, 2000)

2.8 Grup Riordan

$$M = (m_{ij});\ i,j \geq 0 = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & \dots & m_{0n} & \dots \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} & \dots \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ m_{no} & m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

Misalkan $C_i(x) = \sum_{n\geq 0}^{\sim} m_{n,i}\, x^n$

Sekarang akan dibuktikan $C_i(x) = \sum_{n\geq 0}^{\sim} m_{n,i}\, x^n$ merupakan Grup Riordan

dengan $(g(x), f(x)) * (h(x), l(x)) = (g(x) \cdot h(f(x)),\ l(f(x))$ untuk $(g(x), f(x)), (h(x), l(x)) \in M$

(i) Akan dibuktikan $C_i(x)$ tertutup terhadap operasi $*$

$B(x) = g(x)\, A\, (f(x))$,

maka

$(g(x), f(x)) * (h(x), l(x)) = (g(x) \cdot h(x), l(x)) =$

$(p(x), q(x))$ ■

(ii) Akan dibuktikan M asosiatif

$$\left[\left(g(x), f(x)\right) * \left(h(x), l(x)\right) * \left(m(x), n(x)\right)\right]$$

$$= \left[g(x) \cdot h\left(f(x)\right), l\left(f(x)\right)\right] * \left(m(x), n(x)\right)$$

$$= \left[g(x) \cdot h\left(f(x)\right) \cdot m\left(l\left(f(x)\right)\right), n\left(l\left(f(x)\right)\right)\right]$$

$$= \left[g(x) \cdot S\left(f(x)\right), n\left(l\left(f(x)\right)\right)\right]$$

$$= \left(g(x) \cdot S\left(f(x)\right), n\left(l\left(f(x)\right)\right)\right)$$

$$= \left(g(x), f(x)\right) * \left(S(x), n\left(l(x)\right)\right)$$

$$= \left(g(x), f(x)\right) * \left(h(x), m\left(l(x)\right), n\left(l(x)\right)\right)$$

$$= (g(x), f(x)) * \left[\left(h(x), l(x)\right) * \left(m(x), n(x)\right)\right] \qquad \blacksquare$$

(iii) Akan dibuktikan $\mathrm{I} = (1, x)$ identitas di M

$$\left(g(x), f(x)\right) * (1, x) = \left(g(x) \cdot h\left(f(x)\right), l\left(f(x)\right)\right)$$

$$= \left(g(x), 1, f(x)\right) = \left(g(x), f(x)\right)$$

dan

$$(1, x) * \left(g(x), f(x)\right) = \left(h(x) \cdot g\left(l(x)\right), f\left(l(x)\right)\right)$$

$$= \left(1 \cdot g(x), f(x)\right) = \left(g(x), f(x)\right)$$

Terbukti $\mathrm{I} = (1, x)$ identitas di M $\blacksquare$

(iv) Akan dibuktikan $\frac{1}{g\left(\bar{f}(x)\right)}$, $\bar{f}(x)$ merupakan invers $\left(g(x), f(x)\right)$

dalam M.

$\bar{f}$ merupakan invers dari f dengan $f\left(\bar{f}(x)\right) = \bar{f}\left(f(x)\right) = x$

$$\left(g(x), f(x)\right) * \left(\frac{1}{g\left(\bar{f}(x)\right)}, \bar{f}(x)\right) = \left(g(x) \cdot \frac{1}{g\left(\bar{f}(f(x))\right)}, \bar{f}\left(f(x)\right)\right)$$

$$= \left(g(x) \cdot \frac{1}{g(x)}, x\right) = (1, x)$$

$$\left(\frac{1}{g\left(\bar{f}(x)\right)}, \bar{f}(x)\right) * \left(g(x), f(x)\right) = \left(\frac{1}{g\left(\bar{f}(x)\right)} \cdot g\left(\bar{f}(x), f\left(\bar{f}(x)\right)\right)\right)$$

$$= (1, x)$$

Terbukti M adalah grup, sehingga $C_i x$ merupakan Grup Riordan.

(Shapiro, dkk. 1991)

2.9 *Generating Function*

Definisi 2.9.1

Diberikan deret $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,$ dapat didefinisikan *generating function* dengan deret $\{a_n\}$ menjadi :

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

Contoh 2.9.2

(i) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, …

Dengan menggunakan *generating function* :

$$G(x) = 1 + 1x + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 0x^6 + 0x^7 + \ldots$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

Dapat diterapkan dengan rumus untuk jumlah deret geometri ditulis dengan $G(x)$ sebagai $G(x) = \frac{1-x^6}{1-x}$.

(ii) 1, 1, 1, 1, 1, …

Dengan menggunakan *generating function* :

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

Dimana $|x| < 1$, dapat diterapkan dengan rumus untuk jumlah yang tak terbatas dari deret geometri ditulis dengan $G(x)$ sebagai $G(x) = \frac{1}{1-x}$.

Dalam pengerjaan *generating function*, kita akan mengabaikan pertanyaan konvergensi dan hanya mengatakan $(x) = \frac{1}{1-x}$.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2016/2017 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang dilakukan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Mengumpulkan bahan literatur serta studi kepustakaan yang berhubungan dengan baris, matriks dan grup.
2. Mempelajari dan memahami definisi dan/atau teorema yang berkaitan dengan penelitian ini.
3. Melakukan pembuktian pada matriks yang mempunyai sifat grup Riordan.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dalam penelitian ini diperoleh tiga kesimpulan, yaitu :

1. grup Riordan merupakan grup yang dibangun dari matriks dengan operasi biner perkalian.
2. Matriks Riordan merupakan suatu grup. Pada matriks Riordan digunakan *generating function* $C_i(x) = g(x)[f(x)]^i$ untuk membutikkan suatu matriks Riordan.
3. Matriks Henkel mempunyai sifat-sifat yang sama dengan matriks Riordan.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan materi *Double Riordan Group*.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 2000. *Elementary Linear Algebra*. First Edition. Interaksara, Batam

Dummit, D.S and Foote, R.M. 2004. *Abstract Algebra*. Third Edition. John Wiley & Sons,Inc.United States America.

Fraleigh, J.B. 2000. *A First Course In Abstract Algebra*. Sixth Edition. Addision Wesley Publishing Company, Inc. Philippines.

Purcell, Edwin J. 2003. *Calculus*. Eighth Edition. Addision Wesley Publishing Company, Inc. Philippines.

Riyanto, Zaki. 2008. Pengantar Analisis Real I. Andi, Yogyakarta

Shapiro, dkk. 1991. *The Riordan Group,Discrete Applied Mathematics*. United States America.