# BILANGAN KROMATIK LOKASI PADA GRAF KNESER

**( Skripsi )**

**Oleh**

**Muhammad Haidir Alam**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS LAMPUNG**

**BANDAR LAMPUNG**

**2016**

# ABSTRAK

## BILANGAN KROMATIK LOKASI PADA GRAF KNESER

**Oleh**

**MUHAMMAD HAIDIR ALAM**

Misalkan $G$ adalah graf terhubung dan $c$ merupakan pewarnaan dari $G$. Diberikan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ yang merupakan himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna di $V(G)$, dengan $S_i$ adalah himpunan titik-titik yang berwarna $i$. Kode warna $c_{\Pi}(v)$ dari $v$ adalah $k$ pasang terurut $(d(v, S_1), d(v, S_2), \dots\dots, d(v, S_k))$ dengan $d(v, S_i)$ adalah min $\{d(v, x) | x \epsilon S_i\}$ untuk setiap $i$. Jika semua titik di $G$ memiliki warna yang berbeda, maka $c$ disebut pewarnaan lokasi dari graf $G$. Nilai terkecil $k$ sedemikian sehingga $c$ merupakan pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik graf $G$, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Pada tulisan ini didiskusikan tentang beberapa bilangan kromatik lokasi pada graf Kneser yaitu untuk $m = 1$, $m = 2$ dan $m = 3$.



**Kata kunci**: graf, bilangan kromatik lokasi, graf Kneser.

**BILANGAN KROMATIK LOKASI PADA GRAF KNESER**

**Oleh**

**Muhammad Haidir Alam**

**Skripsi**

**Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar**

**SARJANA SAINS**

**Pada**

**Jurusan Matematika**

**Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS LAMPUNG**

**BANDAR LAMPUNG**

**2016**

Judul Skripsi : **BILANGAN KROMATIK LOKASI PADA GRAF KNESER**

Nama Mahasiswa : *Muhammad Haidir Alam*

No. Pokok Mahasiswa : 1117031035

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

**MENYETUJUI,**

1. Komisi Pembimbing

| | |
|---|---|
| **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** | **Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** |
| NIP 19760411 200012 2 001 | NIP 19631108 198902 2 001 |

**MENGETAHUI,**

2. Ketua Jurusan Matematika

**Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.**
NIP 19620704 198803 1 002

# MENGESAHKAN

**1. Tim Penguji**

**Ketua** : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ..................

**Sekretaris** : **Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ..................

**Penguji**
**Bukan** Pembimbing : **Agus Sutrisno, M.Si.** ..................

**2. Dekan** Fakultas MIPA

**Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D.**
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : 16 November 2016

**PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"Bilangan Kromatik Lokasi Pada Graf Kneser"** merupakan hasil karya saya sendiri bukan hasil orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, November 2016

Penulis


Muhammad Haidir Alam

NPM. 1117031035

# RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 8 November 1993. Penulis merupakan anak pertama dari pasangan Bapak Alamsyah dan Ibu Adiati Kusumo Sudani.

Penulis telah menyelesaikan pendidikan sekolah taman kanak-kanak di TK Taruna Jaya pada tahun 1999. Penulis menyelesaikan pendidikan sekolah dasar di SD Negeri 2 Perumnas Way Halim Bandar Lampung pada tahun 2005. Selanjutnya, pada tahun 2008 penulis menyelesaikan pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 29 Bandar Lampung dan pada tahun 2011 penulis menyelesaikan pendidikan sekolah menengah atas di MAN 1 Bandar Lampung.

Pada tahun 2011, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Selama menjadi mahasiswa, penulis pernah aktif di Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) sebagai anggota pada periode 2012/2013 dan 2013/2014.

Pada awal tahun 2014, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) selama 30 hari di Dinas Pendidikan dan Kebudayaan Provinsi Lampung. Selain itu, pada awal tahun 2015 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di desa Sriwijaya, Kecamatan Tanjung Raya, Mesuji.

# MOTTO

"The imagination is more important than any knowledge"

(Albert Einstein)

"You can never kill an idea"

(Namaste)

Kupersembahkan hasil karyaku

ini untuk Papa, Mama, Hari,

Adek Ki dan Mbak Kiki

## SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT atas ridho dan karunia-Nya karya ilmiah ini dapat diselesaikan. Skripsi dengan judul "**Bilangan Kromatik Lokasi Pada Graf Kneser**" merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung. Dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing I atas kesediaan memberi ilmu, waktu, bimbingan, saran, dan nasihat-nasihat dalam pembuatan skripsi ini.
2. Ibu Dra. Wamiliana M.A., Ph,D. selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, saran, dan nasihat-nasihat dalam pembuatan skripsi ini.
3. Bapak Agus Sutrisno, M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran dalam pembuatan skripsi ini.
4. Ibu Ir. Netti Herawati, M.Sc. selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan kepada penulis selama menjalani studi.
5. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph,D. selaku ketua Jurusan Matematika beserta jajarannya.
6. Bapak Prof. Warsito, D.E.A,.P.hD. selaku dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung beserta jajarannya.

7. Papa dan Mama yang selalu memberikan motivasi, semangat, kasih sayang, dan do’a yang tiada henti-hentinya.
8. Hari, Adek Ki serta semua keluarga yang telah memberikan dukungan dalam bentuk semangat, do’a atau materi kepada penulis.
9. Anissa Septya Rizky yang selalu memotivasi dengan penuh kesabaran dan atas do’a serta bantuannya penulis mampu menyelesaikan skripsi ini.
10. Wesly, Triani, Ayu, Iril, Gusti, Joe, Charissa, Dhia yang selalu memberikan semangat, dukungan, dan motivasi kepada penulis.
11. Om Pion, Gembul, Ruri cs, Acong, Wahyu yang selalu memberikan bantuan, semangat, dan dukungan di malam hari kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
12. Keluarga Matematika angkatan 2011 dan HIMATIKA yang terus memberi semangat dan dukungan, terimakasih atas kebersamaan dan pengalaman yang tak terlupakan.
13. Semua pihak yang telah membantu penulis baik selama masa studi maupun dalam penyelesaian skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa tulisan sederhana ini masih jauh dari kesempurnaan, akan tetapi terselip harapan semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi masyarakat luas. Amin.

Bandar Lampung,     November 2016

Penulis

Muhammad Haidir Alam

# DAFTAR ISI

# DAFTAR GAMBAR

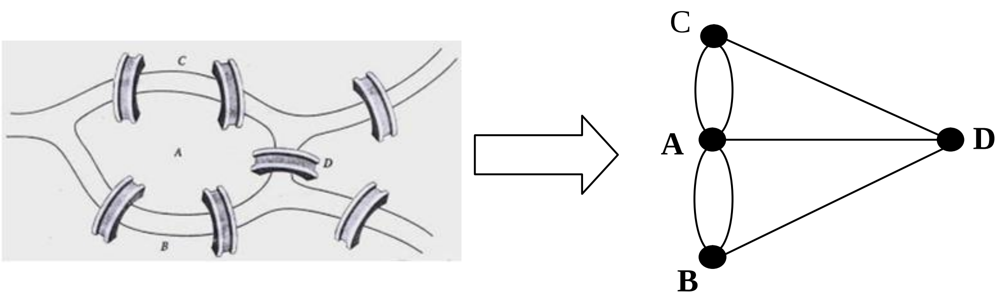
Halaman

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Teori graf lahir pada Tahun 1736 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan *Konigsberg* yang sangat terkenal di Eropa. Masalah jembatan Konigsberg adalah mungkin atau tidaknya melewati tujuh jembatan yang menghubungkan empat pulau di Kota Konigsberg masing-masing tepat satu kali dan kembali ketempat semula. Untuk memecahkan masalah tersebut, Euler memisalkan daratan dengan titik (*vertex)* dan jembatan dinyatakan dengan garis atau sisi *(edge).*




(a) (b)

Gambar 1. (a) Jembatan Konigsberg (b) Representasi jembatan Konisberg

Euler berkesimpulan bahwa tidak mungkin seseorang dapat melalui ketujuh jembatan masing-masing tepat satu kali dan kembali ketempat semula jika derajat setiap titik tidak genap. Sehingga kisah jembatan Konigsberg ini menjadi sejarah lahirnya teori graf.

Teori graf merupakan salah satu kajian matematika yang sampai saat ini masih memiliki banyak terapan diberbagai bidang. Kajian tentang pewarnaan lokasi pada suatu graf adalah suatu kajian yang cukup baru dalam teori graf. Konsep pewarnaan lokasi untuk pertama kalinya dikaji oleh Chartrand dkk. pada tahun 2002, yang merupakan pengembangan dari dua konsep dalam graf yaitu pewarnaan titik pada graf dan dimensi partisi graf.

Misalkan *c* adalah suatu pewarnaan titik pada graf *G* dengan menggunakan warna 1,2, ….,*k* untuk suatu bilangan bulat positif *k*. Secara ekuivalen, *c* merupakan suatu partisi $\Pi$ dari *V*(*G*) kedalam kelas-kelas warna yang saling bebas $C_1, C_2, \ldots., C_k$ yang mana titik-titik di $C_i$ berwarna *i*, $1 \leq i \leq k$. Jarak titik *v* ke suatu $C_i$, dinotasikan dengan $d(v, C_i)$ adalah min$\{d\ (v, x) |\ x \in C_i\}$. Kode warna, $c_\Pi\ (v)$ dari suatu titik $v \in V$ didefinisikan sebagai *k*-vektor yaitu:

$$c_\Pi = (d(v, C_1), d(v, C_2), \ldots\ldots, d(v, C_k))$$

Jika setiap titik di *G* memiliki kode warna yang berbeda terhadap partisi $\Pi$, maka *c* disebut pewarnaan lokasi. Banyaknya warna minimum yang digunakan pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari *G*, dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Chartrand dkk. (2002) telah menentukan bilangan kromatik lokasi dari beberapa kelas graf, diantaranya pada graf lintasan $P_n$ dengan n $\geq$ 3 diperoleh $\chi_L\ (P_n) = 3$; pada graf siklus diperoleh dua hasil yaitu $\chi_L\ (C_n) =$ 3 untuk n ganjil dan untuk n genap diperoleh $\chi_L\ (C_n) =\ 4$; pada graf bintang ganda $(S_{a,b})$, $1 \leq a \leq b$ dan $b \geq 2$, bilangan kromatik lokasinya adalah $b + 1$. Misalkan G graf terhubung berorde $n \geq 3$, maka $\chi_L(G) = n$ jika hanya jika G graf multipartit lengkap.

Selanjutnya pada tahun 2011 dan 2012, Asmiati dkk. telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf kembang api dan graf bintang. Pada graf almagamasi bintang seragam, $S_{k,m}$ adalah almagamasi dari $k$ buah graf bintang $K_{1,m}$ bila $n_i = m$ , untuk setiap $i$ diperoleh jika $H\ (a) = (m + a - 1)\binom{m+a-1}{m-1}$ untuk $a \geq 0$, $k \geq 2$ dan $m \geq 3$ maka $\chi_L(S_{k,m}) = m$ untuk $2 \leq k \leq H\ (0)$, $m \geq 3$ dan $\chi_L(S_{k,m}) = m + a$ untuk $H\ (a) \leq k \leq H\ (0)$, $a \geq 1$. Pada graf kembang api $F_{n,k}$ untuk $n \geq 2$ diperoleh $\chi_L(F_{n,k}) = 4$ sedangkan untuk $k \geq 5$ diperoleh $\chi_L(F_{n,k}) = k - 1$, untuk $2 \leq n \leq k - 1$ dan $\chi_L(F_{n,k}) = k - 1$ untuk lainnya.

Pada permasalahan karakteristik graf dengan bilangan kromatik tertentu, Chartrand dkk. (2003) telah berhasil mengkarakterisasi graf dengan bilangan kromatik $(n - 1)$ dan $(n - 2)$. Asmiati dan Baskoro (2013) juga telah berhasil mengkarakterisasi graf berbilangan kromatik lokasi tiga berupa pohon maupun yang memuat siklus. Selanjutnya Asmiati (2014) telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf almagamasi bintang tak homogen.

Graf dapat digambarkan dengan berbagai macam cara, sehingga dapat menghasilkan berbagai macam graf. Pada tahun 1955 Martin Kneser menemukan suatu graf dengan titik-titik dan sisi-sisinya adalah sebuah rumusan kombinatorial yang terbentuk $n$ dan $m$, dimana $n$ dan $m$ adalah bilangan bulat positif. Sehingga graf tersebut dinamakan graf Kneser dan dinotasikan dengan $KG_{n,m}$. Dalam skripsi ini akan dibahas bilangan kromatik lokasi dari beberapa graf Kneser berdasarkan tulisan Behtoei dan Omoomi (2011).

## 1.2 Rumusan Masalah

Pada penelitian ini akan ditentukan bilangan kromatik lokasi untuk beberapa graf Kneser $KG_{n,m}$ dengan $m = 1, 2, 3$.

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf Kneser $KG_{n,m}$ dan menganalisis sifat-sifatnya.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Mengembangkan wawasan tentang teori graf terutama tentang bilangan kromatik lokasi pada graf Kneser.
2. Memberikan sumbangan pemikiran untuk memperluas dan memperdalam ilmu matematika dibidang teori graf terutama tentang bilangan kromatik lokasi graf Kneser.
3. Sebagai referensi untuk penelitian lanjutan tentang menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf Kneser.

# BAB II

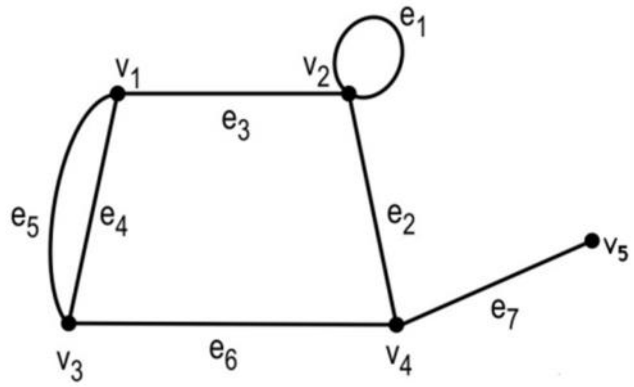
# TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bagian ini akan diberikan konsep dasar graf dan bilangan kromatik lokasi pada suatu graf sebagai landasan teori penelitian ini.

## 2.1 Konsep Dasar Graf

Beberapa teori dasar yang digunakan dalam penelitian ini diambil dari Deo (1989). Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan terurut *(V(G),E(G))* dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ menyatakan himpunan titik dengan $V(G) \neq \emptyset$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ menyatakan himpunan sisi yaitu pasangan tak terurut dari $V(G)$. Banyaknya titik di $V(G)$ disebut orde dari graf $G$.

Misalkan $v$ dan $w$ adalah titik pada graf $G$, jika $v$ dan $w$ dihubungkan oleh sisi $e$, maka v dan w dikatakan bertetangga ($adjacent$), sedangkan titik $v$ dan $w$ dikatakan menempel ($incident$) dangan sisi $e$, demikian juga sisi $e$ dikatakan menempel dengan titik $v$ dan $w$. Himpunan tetangga ($Neigborhood$) dari suatu titik $v$, dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan $v$.



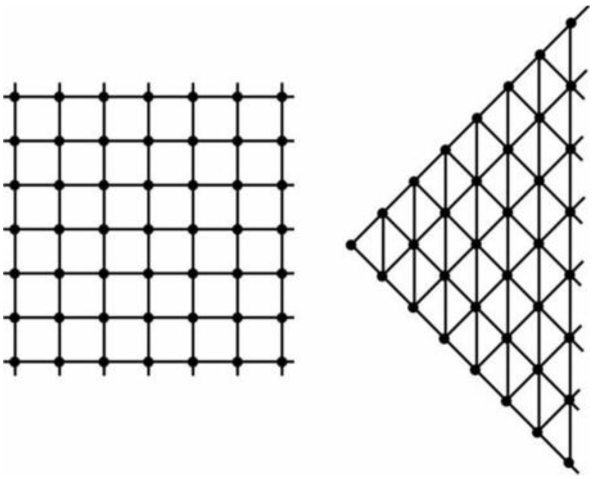

Gambar 2. Graf dengan lima titik dan tujuh sisi

Dalam sebuah graf, seperti terlihat pada contoh di atas, dimungkinkan adanya suatu sisi yang dikaitkan dengan pasangan ($v_1$, $v_2$). Suatu sisi yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut sebagai *loop*. Dalam graf pada Gambar 2, $e_1$ merupakan sebuah *loop*. Sedangkan dua sisi atau lebih yang menghubungkan dua titik yang sama disebut sebagai sisi paralel. Sebagai contoh, $e_4$ dan $e_5$ pada graf di atas dikaitkan dengan pasangan titik ($v_1$, $v_3$).

Pada Gambar 2 di atas, sisi $e_2$, $e_6$, dan $e_7$ adalah sisi-sisi yang menempel dengan titik $v_4$. Dua sisi yang tidak paralel disebut bertetangga, bila kedua sisi tersebut menempel dengan titik yang sama. Sebagai contoh, $e_2$ dan $e_7$ dalam Gambar 2, merupakan dua sisi yang bertetangga. Selain itu, $v_4$ dan $v_5$ adalah dua titik yang saling bertetangga. Sedangkan titik $v_2$ dan $v_5$ merupakan himpunan tetangga dari titik $v_4$.

Jumlah atau banyaknya sisi yang menempel dengan suatu titik $v_i$ (loop dihitung dua kali), disebut derajat (*degree*) dari titik tersebut, dinotasikan $d(v_i)$. Sebagai contoh, pada Gambar 2, $d(v_1) = d(v_3) = d(v_4) = 3$, $d(v_2) = 4$, dan $d(v_5)$ adalah daun karena berderajat satu.

Walaupun dalam definisi graf tidak disebutkan secara eksplisit bahwa himpunan titik *V* dan himpunan sisi *E* tidak perlu merupakan sebuah himpunan hingga, akan tetapi dalam kebanyakan aplikasi teori graf kedua himpunannya tersebut kebanyakan merupakan himpunan hingga. Sebuah graf $G = (V, E)$ dengan *V* dan *E* hingga disebut *graf hingga* atau *graf terhingga* dan jika sebaliknya yakni jika *V* dan *E* tak hingga, maka G disebut *graf tak hingga*. Contoh graf hingga dapat dilihat pada Gambar 2, sedangkan Gambar 3 di bawah ini merupakan contoh dari graf tak hingga.



Gambar 3. Graf tak hingga

Graf memiliki banyak jenis, dalam tulisan ini akan dibahas beberapa jenis graf yang sering digunakan. Berdasarkan ada tidaknya sisi paralel pada suatu graf dan berdasarkan sisi pada graf yang mempunyai orientasi arah.

Berdasarkan ada tidaknya sisi paralel pada suatu graf maka graf digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graf sederhana (*simple graph*)

   Graf yang tidak mengandung sisi paralel dinamakan graf sederhana. Berdasarkan sifat-sifatnya, graf sederhana dapat dibagi menjadi beberapa graf sederhana khusus, yaitu:

   - Graf lengkap (*complete graph*) adalah graf sederhana yang setiap titiknya bertetangga dengan titik lainnya. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan $K_n$. Setiap titik pada $K_n$ berderajat *n-1*.
   - Graf Lingkaran adalah graf yang setiap titiknya berderajat 2. Graf lingkaran dengan *n* buah titik dinyatakan dengan $C_n$.
   - Graf Teratur adalah graf yang setiap titiknya mempunyai derajat yang sama. Graf lengkap $K_n$ adalah graf teratur berderajat *n-1* dan graf lingkaran $C_n$ adalah graf teratur berderajat 2.
   - Graf Bipartit adalah Graf *G* yang himpunan titiknya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian $V_1$ dan $V_2$, sedemikian sehingga setiap sisi pada *G* menghubungkan sebuah titik di $V_1$ ke sebuah titik di $V_2$. Jika setiap titik di $V_1$ bertetangga dengan semua titik-titik di $V_2$, maka disebut dengan graf bipartit

lengkap. Misalkan $|V_1| = m$ dan $|V_1| = n$, graf bipartit lengkap dinotasikan dengan $k_{m,n}$.

2. Graf tak-sederhana (*unsimple graph*)

   Graf yang memuat sisi parallel atau *loop* dinamakan graf tak sederhana (*unsimple graph*). Ada dua macam graf tak sederhana, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi paralel. Graf semu adalah graf yang mengandung gelang (*loop*).

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis :

1. Graf tak-berarah (*undirected graph*)

   Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut tak-berarah. Pada graf tak-berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi, (*u*, *v*) = (*v*, *u*) adalah sisi yang sama.

2. Graf berarah (*directed graph atau digraph*)

   Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Pada graf berarah, (*u*, *v*) dan (*v*, *u*) menyatakan dua buah busur yang berbeda, dengan kata lain (*u*, *v*) $\neq$ (*v*, *u*). Untuk busur (*u*, *v*) titik *u* dinamakan titik asal (initial vertex) dan titik *v* dinamakan titik terminal (*terminal vertex*) (Siang, 2009).

Istilah lain yang sering muncul pada pembahasan graf adalah jalan (*walk*), lintasan (*path*) dan sirkuit (*circuit*). *Walk* adalah barisan berhingga dari titik dan sisi, dimulai dan diakhiri dengan titik, sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Tidak ada sisi yang muncul lebih dari sekali dalam satu *walk*. Sedangkan lintasan (*path*) merupakan *walk* yang semua titiknya berbeda. Suatu graf G dikatakan terhubung jika terdapat setidaknya satu lintasan (*path)* yang menghubungkan setiap titik di G. Sirkuit (*circuit*) adalah lintasan tertutup (*closed path*), yaitu lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sirkuit dibedakan menjadi dua macam, yaitu sirkuit genap dan sirkuit ganjil. Sirkuit genap adalah sirkuit dengan banyaknya titik genap, dan sirkuit ganjil adalah sirkuit dengan banyaknya titik ganjil (Deo,1989).

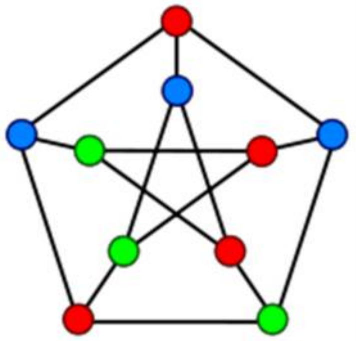
## 2.2 Pewarnaan graf

Pewarnaan graf adalah pemberian warna yang biasanya direpresentasikan sebagai bilangan asli terurut mulai dari 1 atau dapat juga direpresentasikan langsung dengan menggunakan warna merah, biru, hijau dan lainnya pada objek tertentu pada suatu graf.

Pewarnaan graf (*graph coloring*) adalah kasus khusus dari pelabelan graf. Pelabelan disini maksudnya, yaitu memberikan warna pada titik-titik pada batas tertentu. Ada tiga macam pewarnaan graf :

1. Pewarnaan titik

   Pewarnaan titik (*vertex coloring*) adalah member warna pada titik-titik suatu graf sedemikian sehingga tidak ada dua titik bertetangga mempunyai warna yang sama.

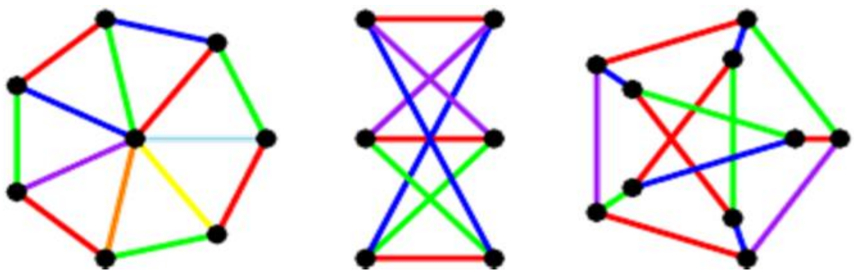


Gambar 4. Contoh Pewarnaan Titik

Dalam pewarnaan graf, tidak hanya sekedar mewarnai titik – titik dengan warna yang berbeda dari warna titik yang bertetangga saja, tetapi juga menginginkan jumlah macam warna yang digunakan seminimum mungkin. Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai titik pada suatu graph G disebut bilangan kromatik titik graf G, yang dilambangkan dengan $\chi(G)$**.** Suatu graf yang mempunyai bilangan kromatis $k$ dilambangkan dengan $\chi(G) = k$. Pada Gambar 4 di atas mempunyai bilangan kromatik = 3 atau $\chi(G) = 3$.

2. Pewarnaan sisi

Pewarnaan sisi (*edge coloring*) adalah memberi warna berbeda pada sisi yang bertetangga sehingga tidak ada dua sisi yang bertetangga mempunyai warna yang sama.



Gambar 5. Contoh Pewarnaan Sisi

Minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua sisi pada graf G sedemikan sehingga setiap dua sisi G yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda disebut bilangan kromatik sisi. Bilangan kromatik sisi dilambangkan dengan $\chi'(G)$.

3. Pewarnaan bidang

Pewarnaan bidang adalah memberi warna pada bidang sehingga tidak ada bidang yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Pewarnaan bidang biasanya sering dipakai untuk mewarnai peta. Pewarnaan bidang hanya bisa dilakukan dengan membuat graf tersebut menjadi graf planar terlebih dahulu. Graf planar adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi- sisi yang tidak saling memotong (bersilangan).


Gambar 6. Contoh Pewarnaan Bidang

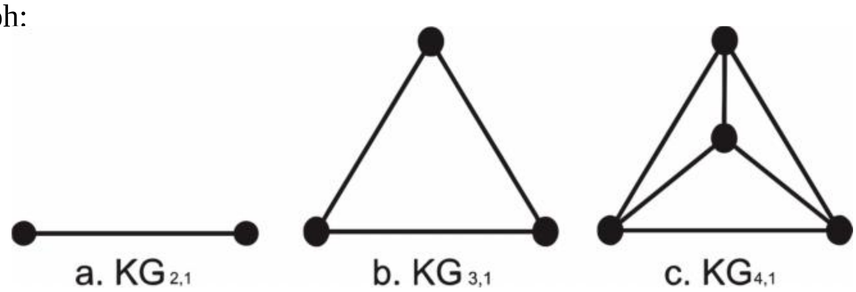
(Deo.1989)

## 2.3 Graf Kneser

Menurut Behtoei dan Omoomi (2011), misalkan A = {*1,2,3,…,n*} dengan |A| = *n* dan *m* adalah himpunan bagian yang mempunyai beberapa anggota yang telah ditentukan.

Graf Kneser ($KG_{n,m}$) adalah graf dengan $|V(KG_{n,m})| = \binom{n}{m}$ dan $|E(KG_{n,m})| = \frac{\binom{n}{m}\binom{n-m}{m}}{2}$ , dua titik akan bertetangga jika irisan dua sub himpunan bagian yang berkorespondensi dengan dua titik tersebut merupakan himpunan kosong.

Contoh:




Gambar 7. Beberapa contoh graf Kneser

## 2.4 Bilangan Kromatik Lokasi

Pada bagian ini akan diberikan definsi yang berkaitan dengan bilangan kromatik lokasi pada suatu graf. Bilangan kromatik lokasi pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk., pada tahun 2002, dengan mengembangkan dua konsep dalam graf yaitu pewarnaan titik pada graf dan dimensi partisi graf.

Misalkan c suatu pewarnaan titik pada graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan $C_i$ adalah himpunan titik-titik yang diberi warna $i$, yang selanjutnya disebut dengan kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$.

Kode warna, $C_{\Pi}(v)$ dari v adalah k-pasang terurut $(d(v, C_{1,}), d(v, C_{2,}), \dots, d(v, C_k)$ dengan $d(v, C_i) = min\{\, d(v, x) \mid x \in C_i \}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Banyaknya warna minimum yang digunakan pada pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G, dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Berikut ini adalah teorema dasar tentang bilangan kromatik lokasi pada graf yang diambil dari Chartrand dkk. 2002.

**Teorema 2.1.** Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf G. Jika $u$ dan $v$ adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk semua $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika $u$ dan $v$ titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

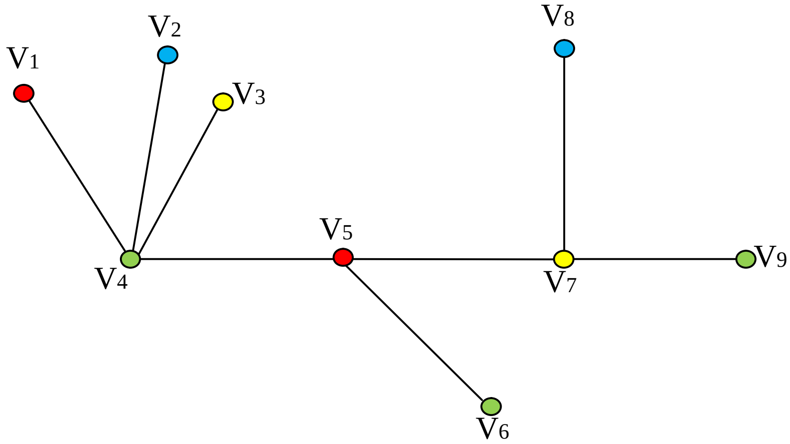
**Bukti** : Misalkan $c$ adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{ C_1, C_2, \dots, Ck \}$ adalah partisi dari titik-titik G kedalam kelas warna $C_i$. Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal $C_i$ dari $\Pi$. Akibatnya, $d(u, C_i) = d\,(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$ maka $d(u, C_j) = d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq 1, 1 \leq$

$j \leq k$. Akibatnya, $C_\Pi(u) = C_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi, $c(u) \neq c(v)$. ■

**Akibat 2.1.** Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan *k* daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

**Bukti** : Misalkan *v* adalah suatu titik yang bertetangga dengan *k* daun $x_1, x_2, \dots, x_k$ di G. Berdasarkan Teorema 2.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna yang berbeda untuk setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna yang berbeda untuk setiap $x_i$, $i = 1,2,\dots,k$. Karena *v* bertetangga semua $x_i$, maka $v$ harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun $x_i$. Akibatnya $\chi_L(G) \geq k + 1$. ■

Berikut ini diberikan contoh penentuan bilangan kromatik lokasi pada suatu graf




Gambar 8. Pewarnaan lokasi minimum pada graf G

Diberikan graf G seperti pada gambar di atas, untuk menentukan minimum pewarnaan lokasi pada graf tersebut terlebih dahulu akan ditentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi pada graf G. Karena terdapat titik $v_4$ yang memiliki 3 daun maka berdasarkan Akibat 2.1, $\chi_L(G) \geq 4$.

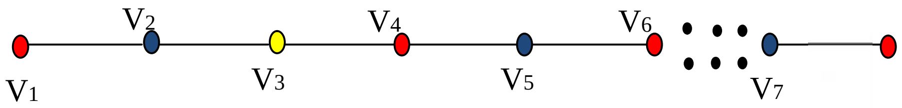
Selanjutnya, akan ditentukan batas atas bilangan kromatik lokasi dari graf G. Titik-titik pada $V(G)$ dipartisi sebagai berikut : $C_1 = \{v_1, v_5\}$ ; $C_2 = \{v_2, v_8\}$ ; $C_3 = \{v_3, v_7\}$ ; $C_4 = \{v_4, v_6, v_9\}$. Kode warnanya ialah $C_\Pi(v_1) = (0,2,2,1)$; $C_\Pi(v_2) = (2,0,2,1)$; $C_\Pi(v_3) = (2,2,0,1)$; $C_\Pi(v_4) = (1,1,1,0)$; $C_\Pi(v_5) = (0,2,1,1)$; $C_\Pi(v_6) = (1,3,2,0)$ ; $C_\Pi(v_7) = (1,1,0,1)$ ; $C_\Pi(v_8) = (2,0,1,2)$ ; $C_\Pi(v_9) = (2,1,2,0)$.

Karena semua titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka pewarnaan tersebut merupakan pewarnaan lokasi dengan $\chi_L(G) \leq 4$. Jadi diperoleh $\chi_L(G) = 4$.

**Teorema 2.2.** Misalkan k adalah derajat maksimum di graf G maka $\chi_L(G) \leq k + 1$.

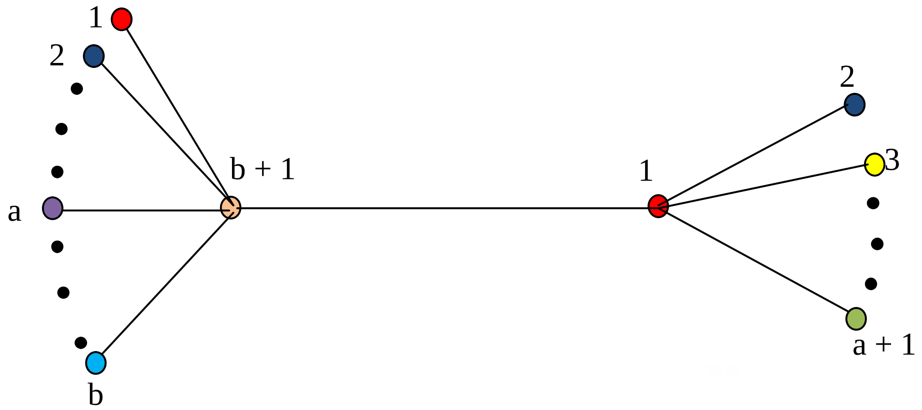
**Teorema 2.3.** Bilangan kromatik lokasi graf lintasan $P_n$ $(n \geq 3)$ adalah 3.

**Bukti** : Perhatikan bahwa $\chi_L(P_1) = 1$ dan $\chi_L(P_2) = 2$. Jelas bahwa $\chi_L(P_n) \geq 3$ untuk $n \geq 3$. Berdasarkan Teorema 2.2 $\chi_L(G) \leq k + 1$, dengan k derajat titik maksimum. Karena pada $P_{n,k} = 2$ maka $\chi_L(P_n) \leq 1 + 2$. Akibatnya $\chi_L(G) \leq 3$. Jadi terbukti $\chi_L(P_n) = 3$. ■




Gambar 9. Pewarnaan Lokasi Minimum Pada Graf Lintasan $P_n$

**Teorema 2.4.** Untuk bilangan bulat a dan b dengan $1 \leq a \leq b$ dan $b \geq 2$, $\chi_L(S_{a,b})$= b + 1.




Gambar 10. Pewarnaan lokasi minimum pada $S_{a,b}$.

**Bukti** : Berdasarkan Akibat 2.1, diperoleh batas bawah yaitu $\chi_L\ (S_{a,b})\ \geq$ b +1. Selanjutnya, akan ditentukan batas atasnya, yaitu$\chi_L(S_{a,b}) \leq$ b + 1. Misalkan c adalah pewarnaan titik menggunakan $(b\ + 1)$ warna sebagaimana terlihat pada Gambar 9. Perhatikan bahwa kode warna dari setiap titik $S_{a,b}$ berbeda, Akibatnya c adalah pewarnaan lokasi. Jadi $\chi_L\ (S_{a,b}) =$ b + 1. ■

**Teorema 2.5.** Untuk setiap $i$, misalkan $G_i$ adalah graf terhubung dan misalkan $H = \bigcup_{i=1}^{m} G_i$. Jika $\chi'_L\ (H) < \infty$, maka $q \leq \chi'_L(H) \leq r$, dengan $q = max\{\chi_L\ (G_i);\ i \in [1,m]\}$ dan $r = \min\{|V(G_i)|; i \in [1,m]\}$.

**Bukti :** Karena $q = max\{\chi_L\,(G_i);\ i \in [1, m]\}$, terdapat bilangan bulat $k \in [1, m]$ sedemikian sehingga $\chi_L\,(G_k) = q$. Artinya setiap pewarnaan lokasi dari graf H harus mempunyai paling sedikit $q$ warna untuk setiap komponen dari H. Maka $\chi'_L\,(H) \geq q$. Selanjutnya akan ditunjukkan batas atas $\chi'_L\,(H)$. Karena $r = \min\{|V(G_i)|; i \in [1, m]\}$, terdapat bilangan bulat $k \in [1, m]$ sedemikian sehingga $\chi_L\,(G_k) = r$. Artinya setiap pewarnaan lokasi dari H harus mempunyai paling banyak *r* warna di setiap komponen H. oleh karena itu $\chi'_L\,(H) \leq r$ ■

**Teorema 2.6.** Diberikan G graf terhubung dengan $\chi_L\,(G) = k$ dan $H = sG$. Misalkan G mempunyai tepat satu titik dominan di setiap pewarnan lokasi. Maka $\chi'_L\,(H) = k$ jika $s \leq k$, selain itu $\chi'_L\,(H) = \infty$.

**Bukti :** Jika $s \leq k$, maka menurut Teorema 4.1. k adalah batas bawah dari $\chi'_L\,(H)$ sehingga $\chi'_L\,(H) \geq k$. Tetapi G mempunyai satu titik dominan dan $\chi_L\,(G) = k$, maka $V(G) = k$ sehingga menurut Teorema 4.1. $\chi'_L\,(H) \leq k$. Karena $\chi'_L\,(H) \geq k$dan $\chi'_L\,(H) \leq k$ maka $\chi'_L\,(H) = k$. Jika $s > k$, karena setiap pewarnaan lokasi dari H merupakan pewarnaan lokasi dari G maka terdapat *s* titik dominan. Kontradiksi. Maka $\chi'_L\,(H) = \infty$. ■

# BAB III

# METODE PENELITIAN

## 3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Adapun waktu dan tempat penelitian yaitu semester genap tahun 2015/2016 bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

## 3.2 Metode Penelitian

Metode yang dilaksanakan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf Kneser, yaitu sebagai berikut:

1. Mempelajari literatur dan paper yang berkaitan dengan Graf Kneser ($KG$) .
2. Memberikan contoh Graf Kneser $KG_{n,m}$.
3. Menentukan bilangan kromatik lokasi pada Graf Kneser $KG_{n,m}$ dengan cara menentukan batas bawah $\chi_L(KG_{n,m})$ dan menentukan batas atas $\chi_L(KG_{n,m})$ untuk $m = 1, m = 2$ dan $m = 3$.
4. Menganalisa sifat-sifat pada Graf Kneser $KG_{n,m}$.

# BAB V

# KESIMPULAN DAN SARAN

## 5.1 Kesimpulan

Dalam penelitian ini diperoleh dua kesimpulan, yaitu:

1. Pada Graf Kneser $KG_{n,m}$ dengan $m = 1$ membentuk graf lengkap $K_n$. Karena bilangan kromatik lokasi pada graf lengkap $K_n = n$, maka bilangan kromatik lokasi pada Graf Kneser $KG_{n,1} = n$.
2. Bilangan kromatik lokasi pada graf G yang tidak terhubung dinotasikan dengan $\chi'_L\ (G)$. Pada Graf Kneser $KG_{4,2}$ dan $KG_{6,3}$ membentuk graf tidak terhubung dan mempunyai bilangan kromatik lokasi ∞, karena $s > k$.

## 5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menentukan bilangan kromatik lokasi $KG_{n,m}$ untuk $m \geq 4$.

## DAFTAR PUSTAKA


Asmiati. 2014. The Locating-Chromatic Number of Non-Homogeneous Almagamation of Stars, *Far East Journal of Mathematical Science* (*FJMS*), 93(1), 89-96.

Asmiati, Baskoro, E.T. 2013. Characterizing of graphs Containing Cycle with Locating-Chromatic Number Three, *AIP Conf. Proc.,* 1450, 351-357.

Asmiati, Assyiyatun, H, Baskoro, E.T, Suprijanto, D, Simanjuntak, R, Uttunggadewa, S. 2012. Locating-Chromatic Number of Firecracker Graph, *For East Journal of Mathematics Science*, 63(1), 11-23.

Asmiati, Assyiyatun, H, Baskoro, E.T. 2011. Locating-chromatic Number of Almagamation of Stars, *ITB J.Sci*., 43A, 1-8.

Behtoei, A, Omoomi, B. 2011. On the Locating Number of Kneser Graphs. *Discrete Applied Mathematics.* Vol 159, 2214-2221.

Chartrand, G, Erwin, D, Henning, M.A, Slater, P.J, dan Zhang, P. 2002. The locating-chromatic number of a graph. *Bull.Inst. Combin. Appl.* Vol 36, 89-101.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., dan Zhang, P. 2003. Graph of order n with locating-chromatic number n-1, *Discrete Mathematics.* Vol 269, 65-79.

Deo, N. 1998. *Graph Theory with Application to Engineering and Computer Science.* Prentice Hall of India Private Limited.

Siang, Jong jek. 2009. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer*. Andi Yogyakarta. Yogyakarta.

Welyyanti, D., Baskoro, E.T., Simanjuntak, R., Uttungdewa, S. 2014. The Locating-Chromatic Number of Disconnected Graphs, 171-172.