PENYELESAIAN PERSAMAAN TELEGRAF DENGAN METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL

(Skripsi)

Oleh

JEFERY HANDOKO

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2017

ABSTRAK

PENYELESAIAN PERSAMAAN TELEGRAF DENGAN METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL

Oleh

Jefery Handoko

Persamaan diferensial parsial tak linear berbentuk $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $+\psi(x,t)$ dikenal dengan persamaan Telegraf dengan $\alpha, \beta \in R$, $\psi : R \times R \to R$ dan $u : R \times R \to R$ adalah fungsi tidak diketahui. Setelah diberikan nilai awal dan syarat batas, selanjutnya dicari solusi eksaknya. Konsep metode transformasi diferensial yaitu menyelesaikan permasalahan linear atau tak linear seperti dalam masalah rangkaian listrik, lalu mengembangkan metode penyelesaian persamaan diferensial parsial dan aplikasinya. Penyelesaian persamaan Telegraf dengan metode transformasi diferensial dilakukan dengan mentransformasikan persamaan Telegraf sesuai sifat-sifat transformasi persamaan diferensial.

Kata Kunci : Persamaan Diferensial, Persamaan Telegraf, Metode Transformasi Diferensial

ABSTRACT

SOLVING TELEGRAPH EQUATION WITH DIFFERENTIAL TRANSFORMATION METHOD

By

Jefery Handoko

The non linear partial differential equation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \psi(x,t)$ known as Telegraph equation where $\alpha, \beta \in R$, $\psi : R \times R \to R$ and $u : R \times R \to R$ is unknown function. After knowing initial and boundary conditions, then finding the function as known exact solution. Differential transformation method is used to solve linear or non linear problems such as in electrical circuit problem, then applied to partial differential equation method with its application. Solving telegraph equation with differential transformation method by transformating telegraph equation using the differential equation operations.

Keyword : Differential Equation, Telegraph Differential Equation, Differential Transformation Method.

PENYELESAIAN PERSAMAAN TELEGRAF DENGAN METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL

Oleh

Jefery Handoko

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Skripsi : **PENYELESAIAN PERSAMAAN TELEGRAF DENGAN METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL**

Nama Mahasiswa : *Jefery Handoko*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1317031042

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.	**Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**
NIP 19620513 198603 1 003	NIP 19700831 199903 1 002

2. Mengetahui

Ketua Jurusan Matematika

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.** ....

Sekretaris : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **13 januari 2017**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Jefery Handoko**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1317031042**
Judul	: **PENYELESAIAN PERSAMAAN TELEGRAF DENGAN METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 13 Januari 2017

Penulis,

JEFERY HANDOKO
NPM. 1317031042

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Jefery Handoko, anak pertama dari satu bersaudara yang dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 12 Juni 1995 oleh pasangan Bapak Budi Handoko dan Ibu Tjia Carolina.

Penulis menempuh pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Xaverius 2 Bandar Lampung pada tahun 1999 – 2001, Sekolah Dasar (SD) Xaverius 2 Bandar Lampung pada tahun 2001 – 2007, Sekolah Menengah Pertama (SMP) Xaverius 3 Bandar Lampung pada tahun 2007 – 2010, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) Xaverius Bandar Lampung pada tahun 2010 – 2013.

Pada tahun 2013 penulis terdaftar sebagai mahasiswa S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN).

Pengalaman organisasi penulis yaitu pada tahun 2014 - 2015 penulis menjadi anggota bidang keilmuan Himpunan Mahasiswa Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung. Pada tahun 2014 – 2015 penulis menjadi anggota divisi kesekretariatan dan tahun 2016 penulis menjadi sekretaris Unit Kegiatan Mahasiswa Buddha Universitas Lampung.

Pada tahun 2016 penulis melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Karang Agung, Kecamatan Semaka, Kabupaten Tanggamus, Provinsi Lampung serta Kerja Praktik (KP) di PT. Pertamina (Persero) Terminal BBM Panjang.

PERSEMBAHAN

Dalam perlindungan Tuhan Yang Maha Esa dan Sang Triratna kupersembahkan karya kecil dan sederhana untuk :

Ayah dan Ibu yang membesarkan, memberi semangat, mendoakan, serta memotivasi

Keluarga besar yang mendukung dan memotivasi penulis dalam suka dan duka

Dosen Pembimbing dan Penguji yang sangat berjasa dan selalu memotivasi penulis

Para dosen dan staff Jurusan Matematika FMIPA Unila memberikan ilmu bermanfaat kepada penulis

Para sahabat yang terkasih, terima kasih atas kebersamaan, suka duka serta doa dan semangat yang diberikan

Para rekan Unit Kegiatan Mahasiswa Buddha Universitas Lampung dan Himpunan Mahasiswa Matematika FMIPA Universitas Lampung

Almamater Universitas Lampung

KATA INSPIRASI

"Ada tiga cara untuk mendapatkan kebijaksanaan. Pertama adalah refleksi, yang merupakan cara tertinggi. Kedua adalah pembatasan, yang merupakan cara termudah. Ketiga adalah pengalaman, yang merupakan cara terpahit"
Confucius (Kong Hu Chu)

"Bila seorang anak menggendong ayahnya di pundak kiri dan ibunya di pundak kanan selama seratus tahun, maka anak tersebut belum cukup membahas jasa kebaikan yang mendalam dari orang tuanya."
(Anguttara Nikaya Bab IV ayat 2)

"Dia memberi kekuatan kepada yang lelah dan menambah semangat kepada yang tiada berdaya."
(Yesaya 40:29)

"Melalui pengabdian kita memperoleh kesucian; dengan kesucian kita memperoleh kemuliaan. Dengan kemuliaan kita mendapat kehormatan dan dengan kehormatan kira peroleh kebenaran."
(Yayurveda XIX. 30)

"Apa saja di antara rahmat Allah yang dianugerahkan kepada manusia, maka tidak ada yang dapat menahannya; dan apa saja yang ditahan-Nya maka tidak ada yang sanggup untuk melepaskannya setelah itu. Dan Dialah Yang Mahaperkasa, Mahabijaksana."
(QS. Fatir : 2)

"Sayangilah setiap cobaan yang dapat membuat Anda berhasil. Hargailah setiap pandangan dan kritikan dari setiap orang dan juga belajarlah untuk menerima nasehat dari orang lain dengan hati yang gembira."
(Wejangan Para Suci 4 : 206)

SANWACANA

Penulis memanjatkan puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, Sang Triratna atas karunia serta rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Penyelesaian Persamaan Telegraf Dengan Metode Transformasi Diferensial**". Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Selesainya penulisan skripsi ini adalah berkat motivasi, pengarahan serta bimbingan dari berbagai pihak. Dengan segala kerendahan dan ketulusan hati penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Bapak Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I, terima kasih untuk bimbingan, arahan, nasehat, motivasi dan kesediaan waktu selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku dosen Pembimbing II, terima kasih atas bantuan, kritik dan saran selama penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Penguji Utama, terima kasih atas kesediaan untuk menguji, saran dan kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.

4. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing Akademik, terima kasih atas bimbingan dan pembelajaran dalam proses perkuliahan.
5. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D. selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Staff Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Ayah dan Ibu tercinta yang tak pernah berhenti memberi semangat, doa, dorongan, nasehat, kasih sayang serta pengorbanan tak terhingga kepada penulis untuk melalui segala ujian yang dijalani.
9. Sahabat-sahabat Matematika 2013 di antaranya Karina S.D., M. Irfan K., Sanfernando N., Siti N.A. serta rekan-rekan seperjuangan, terima kasih atas dukungan, kebersamaan, nasehat dan doa selama ini.
10. Sahabat-sahabat UKM Buddha Universitas Lampung periode 2014 - 2016 dan Himatika FMIPA Unila periode 2014/2015 yang memberi kesempatan kepada penulis untuk memotivasi, berkarya dan menjalani suatu organisasi.
11. Almamater tercinta Universitas Lampung.
12. Seluruh pihak yang telah membantu yang tidak dapat disebutkan semuanya.

Bandar Lampung, Januari 2017
Penulis

Jefery Handoko

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Matematika adalah salah satu ilmu penunjang dalam bidang ilmu. Pengusaan ilmu matematika diperlukan dalam menghadapi era globalisasi. Permasalahan matematika yang dihadapi dapat dalam berbagai macam bentuk, salah satunya pemodelan. Pemodelan matematika digunakan antar bidang lintas ilmu seperti teknik, pertanian, ekonomi, dan IPA. Pengetahuan dasar yang baik dan benar diperlukan mahasiswa dalam mencari solusi model yang diperlukan sesuai bidang ilmunya.

Mata kuliah persamaan diferensial merupakan pengantar ilmu untuk menerapkan pemikiran matematika. Diferensial berarti beda suatu nilai. Persamaan diferensial adalah persamaan matematika memuat fungsi satu variabel atau lebih dan menghubungkan fungsi dan turunannya dalam berbagai orde. Persamaan diferensial bermanfaat dalam berbagai ilmu eksakta dan ilmu sosial. Munculnya persamaan diferensial terkait dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Persamaan diferensial berawal dari penemuan kalkulus dan integral. Pada tahun 1676 Newton menyelesaikan suatu persamaan diferensial menggunakan metode deret tak hingga, sebelas tahun setelah penemuan bentuk fluksional dari kalkulus diferensial pada tahun 1665. Newton tidak mempublikasikan penemuan tersebut sampai tahun 1693, saat Leibniz menemukan rumusan persamaan diferensial pertama.

Ada dua macam persamaan diferensial, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan yang melibatkan satu atau lebih turunan dari sebuah *unknown function* dengan satu variabel. Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang melibatkan satu atau lebih turunan dari sebuah *unknown function* dengan dua atau lebih variabel. Kedua persamaan diferensial menggunakan variabel bebas dan variabel tetap.

Penyelesaian persamaan diferensial pada umumnya dilakukan melalui proses linearisasi. Persamaan diferensial tak linear ditransformasikan menggunakan fungsi transformasi yang diselesaikan dengan metode penyelesaian persamaan diferensial linear. Permasalahan dalam kehidupan sehari-hari dapat dirumuskan ke dalam bentuk persamaan diferensial tak linear. Secara umum persamaan diferensial tak linear diselesaikan dengan linearisasi dan selanjutnya mendapat solusi dalam bentuk metode penyelesaian persamaan diferensial linear.

Pada kenyataannya, tidak semua persamaan diferensial tak linear dapat diselesaikan langsung dengan linearisasi. Salah satu metode yang digunakan untuk penyelesaian dari persamaan diferensial tak linear yaitu dengan metode transformasi diferensial yaitu metode tanpa proses linearisasi. Pada tahun 1986, Zhou memperkenalkan suatu metode yang dapat diterapkan pada persamaan tak linear tanpa linearisasi. Metode ini umumnya digunakan untuk menyelesaikan permasalahan linear dan tak linear dalam masalah rangkaian sirkuit listrik. Metode transformasi diferensial ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tak linear yaitu persamaan Telegraf.

Persamaan diferensial parsial tak linear berbentuk $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\beta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\psi\left(x,t\right)$ dikenal dengan persamaan Telegraf dengan $\alpha,\beta\in R$, $\psi:R\times R\rightarrow R$ adalah fungsi diketahui dan $u:R\times R\rightarrow R$ adalah fungsi tidak diketahui. Dengan memasukkan nilai awal dan syarat batas pada persamaan tersebut, maka diperoleh suatu nilai eksak dalam penyelesaian tersebut. Setelah ditentukan semua nilainya, dapat dibentuk suatu persamaan dari solusi eksak yang ada. Penyelesaian persamaan Telegraf dengan metode transformasi diferensial dilakukan dengan mentransformasikan persamaan Telegraf sesuai sifat-sifat transformasi persamaan diferensial.

Metode transformasi diferensial adalah suatu metode dengan langkah iterasi untuk memperoleh solusi eksak dari deret Taylor. Solusi eksak adalah solusi penyelesaian model matematika dengan menggunakan rumus-rumus aljabar. Untuk menemukan solusi eksak dari persamaan tersebut, maka digunakan metode analitik. Metode analitik yaitu metode yang memberikan solusi sejati atau solusi sesungguhnya dengan galat sama dengan nol.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Menyelesaikan suatu persamaan diferensial parsial tak linear yaitu persamaan Telegraf dengan metode transformasi diferensial.
2. Mempelajari penggunaan metode transformasi diferensial untuk menyelesaikan persamaan Telegraf.
3. Mempelajari penggunaan metode ini dalam mengevaluasi solusi approksimasi dengan deret Taylor hingga.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Mengetahui sifat-sifat transformasi diferensial dan menyelesaikan persamaan Telegraf dengan metode transformasi diferensial.
2. Menambah bahan referensi mengenai persamaan Telegraf.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini diberikan beberapa definisi dan istilah yang digunakan dalam penelitian ini.

Definisi 2.1 Turunan

Turunan merupakan kajian dari kalkulus diferensial mengenai suatu besaran dapat berubah terhadap besaran lain. Turunan fungsi f pada bilangan a dinyatakan dengan $f'(a)$ (dibaca f aksen a) adalah

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2.1}$$

Jika limit ini ada.

Contoh 1.

Carilah turunan fungsi $f(x) = x^2 - 8x + 9$ pada bilangan a.

Penyelesaian :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9\right] - \left[a^2 - 8a + 9\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2a + h - 8)$$

$$= 2a - 8$$

(Stewart, 2012).

Definisi 2.2 Diferensial

Gagasan tentang hampiran linear terkadang dirumuskan dalam istilah dan notasi diferensial. Untuk fungsi satu variabel, jika $y = f(x)$ adalah suatu fungsi yang diferensiabel, maka diferensial dx adalah peubah bebas yaitu dengan memberi nilai sebarang bilangan real dan diferensial dy terhadap dx didefinisikan oleh persamaan

$$dy = f'(x)dx \tag{2.2}$$

sehingga dy adalah peubah tak bebas serta bergantung pada nilai x dan dx. Jika dx diberikan nilai tertentu dan x diambil berupa suatu bilangan dalam daerah definisi dari f, maka nilai numerik dari x dapat ditentukan. Untuk fungsi dua variabel, $z = f(x, y)$ adalah fungsi yang diferensiabel, maka diferensial dx dan dy sebagai variabel bebas atau fungsi dapat diberikan sebarang nilai bilangan real. Diferensial dz disebut diferensial total didefinisikan oleh

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{2.3}$$

dengan notasi df digunakan untuk menggantikan dz.

Contoh 2.

Jika $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, tentukan diferensial dz.

Penyelesaian :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (2x+3y)dx + (3x-2y)dy$$

(Stewart, 2012).

Definisi 2.3 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan dengan fungsi tidak diketahui dituliskan sebagai fungsi $u = u(t)$ dan menghubungkan fungsi yang diketahui dengan beberapa turunannya. Beberapa notasi yang digunakan untuk turunan diantaranya

$$u', \frac{du}{dt}, \dot{u}, \ldots$$

Notasi titik atas umumnya digunakan pada fisika dan teknik atau menggunakan notasi umum. Persamaan diferensial dapat digunakan sampai derivatif ke n dinotasikan dengan $u^{(n)}$.

Contoh 3.

1. $\theta^n + \sqrt{\frac{g}{l}}\sin\theta = 0$

2. $Lq^n + Rq' + \frac{1}{C}q = \sin\omega t$

3. $p' = rp\left(1 - \frac{p}{K}\right)$

(Logan, 2006).

Definisi 2.4 Orde Persamaan Diferensial

Jika y adalah suatu fungsi tidak diketahui dengan variabel bebas tunggal x, dan $y^{(k)}$ didefinisikan turunan ke-k dari y, maka suatu persamaan diferensial orde n dalam matematika ditulis sebagai relasi

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0 \tag{2.4}$$

atau

$$y^{(n)} = G\left(x, y.y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{2.5}$$

Contoh 4.

Jika y adalah fungsi tidak diketahui dari x, maka persamaan diferensial biasa orde 2 dari $2\frac{d^2y}{dx^2} + e^x\frac{dy}{dx} = y + \sin x$ dapat ditulis sebagai

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + e^x\frac{dy}{dx} - y - \sin x = 0 \text{ atau } \underbrace{2y'' + e^x y' - y - \sin x}_{F(x, y, y', y'')} = 0$$

F dinotasikan terhadap variabel bebas x, fungsi tidak diketahui y, dan turunan pertama dan kedua dari y (Ricardo, 2009).

Definisi 2.5 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan meliputi derivatif biasa dari *unknown function*. Di dalam persamaan diferensial biasa, *unknown function* bergantung pada satu variabel bebas. Solusi umum dari persamaan diferensial biasa memuat satu konstanta sembarang. Solusi umum dapat diinterpretasikan secara geometri dengan bidang ruang berdimensi dua, yaitu memiliki nilai yang berbeda dari sembarang konstanta. Keunikan solusi memuat nilai awal $y = y_0$ ketika $x = x_0$.

Contoh 5.

Tentukan solusi umum dari persamaan diferensial berikut.

$$\frac{dy}{dx} + (\tan x)y = \sin x$$

Penyelesaian:

Persamaan diferensial linear orde 1 dengan

$$a(x) = \tan x \text{ dan } b(x) = \sin x$$

Keduanya kontinu pada interval $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Kalikan kedua sisi dengan

$$e^{\int \tan x dx} = e^{-\ln \cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

maka didapat

$$\left(y \frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Integralkan kedua ruas, maka didapat

$$y \frac{1}{\cos x} = c - \ln \cos x$$

Dengan membagi kedua sisi dengan $\frac{1}{\cos x}$ (mengalikan kedua sisi dengan $\cos x$), maka solusi adalah

$$y(x) = (\cos x)(c - \ln \cos x),\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

(Finizio dan Ladas, 1982).

Definisi 2.6 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan meliputi derivatif parsial dari *unknown function*. Di dalam persamaan diferensial parsial, *unknown function* bergantung pada dua atau lebih variabel bebas. Misal variabel bebas x dan variabel tak bebas y serta *unknown function* adalah u. Secara geometri solusi umum persamaan digambarkan sebagai bidang ruang berdimensi tiga. Kondisi yang tidak sederhana membuat bidang kurva tidak spesifik.

Contoh 6.

Tentukan solusi $u = u(x, y)$ dari persamaan diferensial parsial

$$u_x = x + y$$

Penyelesaian :

Dengan mengintegralkan persamaan diferensial parsial terhadap x, dengan variabel y konstan, maka diperoleh

$$u = \frac{1}{2}x^2 + xy + c$$

Untuk menunjukkan nilai u, maka substitusikan persamaan di u ke persamaan diketahui. Walaupun c bukan konstanta tetapi fungsi dari variabel y, seperti $f(y)$, maka u dengan c diganti dengan $f(y)$ merupakan solusi persamaan diferensial parsial dengan $\frac{\partial f(y)}{\partial x} = 0$. Solusi umum dari persamaan diferensial parsial ini adalah

$$u = \frac{1}{2}x^2 + xy + f(y)$$

dengan f adalah fungsi sebarang terhadap y (Finizio dan Ladas, 1982).

Definisi 2.7 Masalah Syarat Nilai Awal

Suatu masalah syarat nilai awal untuk persamaan diferensial orde-1 adalah masalah untuk menentukan solusi $u = u(t)$ ke $u' = f(t,u)$ memenuhi syarat nilai awal $u(t_o) = u_0$ dengan t_0 adalah suatu nilai tertentu dan u_0 adalah hasil tertentu dapat ditulis

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(\mathrm{t}_0) = u_0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Syarat awal akan memberikan nilai tertentu dari sebarang konstanta C pada solusi umum dari suatu persamaan.

Contoh 7.

Persamaan diferensial linear orde 1 dari

$$u' = -u + e^{-t},\ u(0) = 1$$

memiliki solusi $u(t) = (t+1)e^{-t}$, berlaku untuk semua nilai t. Kurva melewati titik (0,1) dengan nilai awal $u(0) = 1$ (Logan, 2006).

Definisi 2.8 Masalah Syarat Batas

Suatu masalah syarat batas adalah permasalahan dengan menghitung solusi ke persamaan diferensial terhadap syarat dari fungsi tidak diketahui khususnya pada dua atau lebih nilai dari variabel bebas.

Contoh 8.

Persamaan diferensial orde 2 dari $y'' + y = 0$ dengan dua parameter dari solusi $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ dengan syarat batas $y(0) = 1$ dan $y(\pi) = 1$.

Kondisi 1 : $1 = y(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 \rightarrow c_1 = 1$

Kondisi 2: $1 = y(\pi) = c_1 \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) = -c_1 \rightarrow -c_1 + \pi = 1 \rightarrow c_1 = \pi - 1$

Karena c_1 = 1 dan c_1 = -1, maka persamaan diferensial tidak memiliki solusi (Ricardo, 2009).

Definisi 2.9 Persamaan Diferensial Telegraf

Persamaan diferensial parsial tak linear berbentuk $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \psi\left(x, t\right)$ dikenal dengan persamaan Telegraf dengan $\alpha, \beta \in R$, $\psi : R \times R \rightarrow R$ adalah fungsi diketahui dan $u : R \times R \rightarrow R$ adalah fungsi tidak diketahui. Setelah diketahui nilai awal dan syarat batas, maka dibentuk suatu persamaan dari solusi eksak. Konsep metode transformasi diferensial yaitu menyelesaikan permasalahan linear dan tak linear dalam masalah rangkaian listrik, mengembangkan metode persamaan diferensial parsial dan aplikasinya. Penyelesaian persamaan Telegraf dengan metode transformasi diferensial dilakukan dengan mentransformasikan persamaan telegraf sesuai sifat-sifat transformasi persamaan diferensial (Soltanalizadeh, 2011).

Definisi 2.10 Fungsi Real Analitik

Suatu fungsi f dengan domain himpunan buka $U \in \mathbb{R}^m$ dan daerah hasil $\mathbb{R}$ dikatakan fungsi real analitik pada U dapat ditulis $f \in C^{\omega}(U)$ jika untuk setiap $\alpha \in U$ dari fungsi f sebagai deret pangkat konvergen pada suatu tetangga dari α (Krantz dan Parks, 2002).

Definisi 2.11 Spektrum Berdimensi Satu

Jika $u(t)$ adalah fungsi analitik pada domain T didefinisikan oleh

$$\frac{d^k u(t)}{dt^k} = \varphi(t,k), \forall t \in T \tag{2.11}$$

Untuk $t = t_i$, $\varphi(t,k) = \varphi(t_i,k)$ dengan k adalah bilangan positif tak negatif dinotasikan sebagai domain K. Persamaan (2.11) dapat ditulis sebagai

$$U_i(k) = \varphi(t_i,k) = \left[\frac{d^k u(t)}{dt^k}\right]_{t=t_i}, \forall t \in T \tag{2.12}$$

dengan $U_i(k)$ disebut spektrum $u(t)$ pada $t = t_i$ di dalam domain K (Soltanalizadeh, 2011).

Definisi 2.12 Metode Transformasi Diferensial Berdimensi Satu

Jika $u(t)$ adalah fungsi analitik, maka spektrum dari $u(t)$ didefinisikan oleh

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_i)^k}{k!} U(k) \tag{2.13}$$

Persamaan (2.13) dikenal sebagai invers transformasi dari $U(k)$. Jika $U(k)$ didefinisikan

$$U(k) = M(k)\left[\frac{d^k q(t)u(t)}{dt^k}\right]_{t=t_i}, k = 0,1,2,\dots \tag{2.14}$$

maka fungsi $u(t)$ dapat dituliskan sebagai

$$u(t) = \frac{1}{q(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_i)^k}{k!} \frac{U(k)}{M(k)} \tag{2.15}$$

dengan $M(k) \neq 0$, $q(t) \neq 0$. $M(k)$ disebut faktor terintegrasi dan $q(t)$ adalah kernel yang memenuhi $u(t)$. Jika $M(k) = 1$ dan $q(t) = 1$, maka persamaan

(2.13) dan (2.15) adalah sama. Transformasikan dengan $M(k)=\frac{1}{k!}$ dan $q(t)=1$, maka didapat

$$U(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(t)}{dt^k}\right]_{t=t_i},k=0,1,2,\ldots \tag{2.16}$$

Dengan menggunakan transformasi diferensial, persamaan diferensial dalam domain yang diinginkan dapat ditransformasikan ke dalam persamaan aljabar dalam domain K dan $u(t)$ dapat memuat deret Taylor berhingga dan galat dituliskan sebagai

$$u(t)=\frac{1}{q(t)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(t-t_i)^k}{k!}\frac{U(k)}{M(k)}+R_{n+1}(t)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(t-t_0)^k U(k)+R_{n+1}(t) \tag{2.17}$$

(Soltanalizadeh, 2011).

Definisi 2.13 Spektrum Berdimensi Dua

Suatu fungsi dua variabel $u(x,t):R\times R\rightarrow R$ dapat dituliskan sebagai hasil kali dari dua fungsi satu variabel, yaitu $u(x,t)=u(x)v(t)$. Berdasarkan ketentuan pada transformasi diferensial berdimensi satu, fungsi $w(x,t)$ dapat ditulis sebagai

$$w(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}W(i,j)x^i t^j \tag{2.18}$$

dengan $W(i,j)$ disebut spektrum dari $w(x,t)$ (Soltanalizadeh, 2011).

Definisi 2.14 Metode Transformasi Diferensial Berdimensi Dua

Jika $w(x,t)$ adalah fungsi analitik dan diferensiabel kontinu terhadap waktu t pada domain yang diketahui, maka

$$W(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h} w(x,t)\right]_{x=x_0,t=t_0} \tag{2.19}$$

dengan $W(k,h)$ adalah fungsi spektrum sebagai transformasi fungsi T. Misal $w(x,t)$ adalah fungsi asal dengan batas atas $W(k,h)$ menggunakan transformasi fungsi. Invers transformasi diferensial dari $W(k,h)$ adalah sebagai berikut.

$$w(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} W(k,h)(x-x_0)^k (t-t_0)^h \tag{2.20}$$

Dengan persamaan (2.19) dan (2.20), didapat hasil sebagai berikut.

$$w(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h} w(x,t)\right]_{x=x_0,t=t_0} x^k t^h$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} W(k,h)x^k t^h \tag{2.21}$$

dengan $x_0=0$ dan $t_0=0$.

Berdasarkan definisi dan persamaan (2.20) dan (2.21) dapat ditentukan sifat-sifat operasi dari transformasi diferensial berdimensi satu dan berdimensi dua pada Tabel 1.

Tabel 1. Operasi transformasi diferensial berdimensi dua

Fungsi Asal	Fungsi Transformasi
$w(x,t)=u(x,t)\pm v(x,t)$	$W(k,h)=U(k,h)\pm V(k,h)$
$w(x,t)=cu(x,t)$	$W(k,h)=cU(k,h)$
$w(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)$	$W(k,h)=(k+1)U(k+1,h)$
$w(x,t)=\frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial t^s}u(x,t)$	$W(k,h)=\frac{(k+r)!(h+s)!}{k!h!}U(k+r,h+s)$

$w(x,t)=u(x,t)v(x,t)$	$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U(r,h-s)V(k-r,s)$
$w(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\frac{\partial}{\partial t}v(x,t)$	$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)(h-s+1)$ $\times U(k-r+1,s)V(r,h-s+1)$

(Soltanalizadeh, 2011).

Definisi 2.15 Deret Taylor

Jika deret pangkat $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-c)^k$ adalah deret pangkat yang konvergen dengan radius konvergensi $r>0$, maka deret konvergen untuk suatu fungsi f dapat ditulis sebagai

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

$$= f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \quad (2.22)$$

$P_n(x)$ adalah polinomial berderajat n dengan $\frac{f^{(k)}(c)}{k!}$ adalah konstan untuk setiap nilai k untuk f disekitar $x=c$ (Smith dan Minton, 2008).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2016/2017 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian literatur yaitu buku-buku dan jurnal *online* matematika sebagai penunjang berkaitan dengan masalah nilai awal dan syarat batas dalam penyelesaian persamaan Telegraf.

Tahapan penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut :

1. Merumuskan persamaan diferensial dengan nilai awal dan syarat batas yang diketahui pada Persamaan Telegraf.
2. Membuat batasan nilai dengan selang tertentu pada persamaan Telegraf.
3. Menyelesaikan persamaan Telegraf dengan metode transformasi diferensial.

   3.1 Pandang persamaan Telegraf berbentuk :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \psi(x,t) \tag{3.1}$$

3.2 Gunakan Tabel 1, Persamaan (2.10) dan Definisi (2.12). Dengan $x_0 = t_0 = 0$, maka didapat transformasi diferensial dari persamaan Telegraf yaitu

$$(h+1)(h+2)U(k,h+2)+\alpha(h+1)U(k,h+1)+\beta U(k,h)$$
$$=(k+1)(k+2)U(k+2,h)+\psi(k,h) \qquad (3.2)$$

3.3 Dengan syarat nilai awal pertama, maka diperoleh :

$$\sum_{k=0}^{\infty} U(k,0)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!}x^k \qquad (3.3)$$

dengan nilai

$$U(k,0)=\frac{f^k(0)}{k!}, k=0,1,2,...,N \qquad (3.4)$$

3.4 Dengan syarat nilai awal kedua dan Tabel 1, maka diperoleh :

$$\sum_{k=0}^{\infty} U(k,1)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^k(0)}{k!}x^k \qquad (3.5)$$

dengan nilai

$$U(k,1)=\frac{g^k(0)}{k!}, k=0,1,2,...,N \qquad (3.6)$$

3.5 Dengan syarat batas pertama, maka diperoleh :

$$\sum_{h=2}^{N} U(0,h)=\frac{r^h(0)}{h!}, h=2,3,...,N \qquad (3.7)$$

dengan nilai

$$U(0,h)=\frac{r^h(0)}{h!}, h=2,3,...,N \qquad (3.8)$$

3.6 Dengan syarat batas kedua, maka diperoleh

$$\sum_{h=2}^{N} U(1,h)=\frac{s^h(0)}{h!}, h=2,3,...,N \qquad (3.9)$$

dengan nilai

$$U(1,h) = \frac{s^h(0)}{h!}, h = 2,3,\ldots,N \tag{3.10}$$

3.7 Secara umum, nilai awal dan syarat batas didefinisikan oleh

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{h=2}^{N} U(k,h) = \frac{f^k(0)}{k!}\frac{s^h(0)}{h!}, k = 0,1,\ldots,N, h = 2,3,\ldots,N \tag{3.11}$$

3.8 Dengan menggunakan Persamaan (3.2) dan (3.8), maka nilai dari U dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$U(k,h+2) = \frac{1}{(h+1)(h+2)}(-\beta U(k,h) + (k+1)(k+2)U(k+2,h)$$

$$-\alpha(h+1)U(k,h+1) + \psi(k,h))$$

$$k = 0,1,\ldots,N-2, h = 0,1,\ldots,N-2. \tag{3.12}$$

4. Mensubstitusikan nilai awal dan syarat batas ke nilai $U(k,h+2)$.
5. Menggabungkan hasil tersebut sehingga berbentuk persamaan yang berbentuk deret Taylor.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan perhitungan pada bab sebelumnya, maka persamaan Telegraf memiliki hasil sebagai berikut.

1. Nilai awal pertama $U(k,0)$ yang memenuhi persamaan $f(x) = x$ yaitu $k = 1$ bernilai 1 dan 0 untuk lainnya.
2. Nilai awal kedua $U(k,1)$ yang memenuhi persamaan $g(x) = -x$ yaitu $k = 1$ bernilai -1 dan 0 untuk lainnya.
3. Syarat batas pertama $U(0,h)$ yang memenuhi persamaan $r(t) = 0$ yaitu bernilai 0 untuk semua nilai t.
4. Syarat batas kedua $U(1,h)$ yang memenuhi persamaan $s(t) = \exp(-t)$ yaitu $\frac{\pm 1}{n!}$.
5. Secara umum, nilai $\sum_{k=0}^{N}\sum_{h=2}^{N} U(k,h)$ selain poin di atas dengan persamaan $\psi(x,t) = x.\exp(-t)$ yaitu bernilai 0 untuk semua nilai x dan t.
6. Nilai $U(k,h+2)$ yang memenuhi persamaan $u(x,t) = x \times \exp(-t)$ adalah nilai $k = 1$ yaitu $x\left(1 - t + \frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{5}t^5 + ...\right)$ dan 0 untuk lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Finizio, N. and Ladas, G. 1982. *An Introduction to Differential Equation*. Wadsworth, California.

Krantz, S.G. and Parks, H.R. 2002. *A Premier of Real Analytical Functions*. Second Edition. Birkhäuser, Berlin.

Logan, J. D. 2006. *A First Course in Differential Equation*. Springer, USA.

Ricardo. H. 2009. *A Modern Introduction to Differential Equations*. Elselvier, Canada.

Smith, R.T. and Minton, R.B. 2008. *Calculus*. Fourth Edition. Mc Graw Hill, New York.

Soltanalizadeh, B. 2011. Differential Transformation Method for Solving One-Space-Dimensional Telegraf Equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. **30**(3):639-653.

Stewart, J. 2012. *Calculus*. Seventh Edition. Brooks/Cole, USA.