BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARBEL

(Skripsi)

Oleh

DANAR MUBARAK

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

ABSTRACT

THE LOCATING-CHROMATIC NUMBER OF BARBELL GRAPH

By

Danar Mubarak

For example c a true coloration in G with $c(u) \neq c(v)$ for u dan v are adjacent in G. Suppose C_i is the set of points that are color i, then $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ is the set consisting of the classes of color in $V(G)$. The color codes, $c_\Pi(v)$ of v is k-pair sequences $(d(v,C_1), d(v,C_2), \cdots, d(v,C_k))$ with $d(v,C_i) = \min\{d(v,x) | x \in C_i\}$ for $i \leq k$. If any point in G has a different color code, then c is called the coloring of G. Graf location barbells are two complete graph K_n which connect with a hand, denoted $B_{n,n}$. The locating-chromatic number of barbell graph to $B_{n,n}$ with $n \geq 3$ is $n + 1$, while the graph barbell $B_{n,m}; m, n \geq 3$ and $m \neq n$ is $maks\ \{m, n\}$.

Keywords: complete graph, locating-chromatic number, barbell graph

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARBEL

Oleh

Danar Mubarak

Misal c suatu pewarnaan sejati di G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna di $V(G)$. Kode warna, $c_\Pi(v)$ dari v adalah k-pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \cdots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Graf barbel adalah dua buah graf lengkap K_n yang di hubungkan dengan sebuah sisi, dinotasikan $B_{n,n}$. Bilangan kromatik lokasi graf barbel untuk $B_{n,n}$ dengan $n \geq 3$ adalah $n + 1$, sedangkan untuk graf barbel $B_{n,m}; m, n \geq 3$ dan $m \neq n$ adalah $maks\ \{m, n\}$.

Kata kunci : Graf lengkap, bilangan kromatik lokasi, graf barbel

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARBEL

Oleh

DANAR MUBARAK

Skripsi
Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
SARJANA SAINS

Pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Skripsi : **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARBEL**

Nama Mahasiswa : **Danar Mubarak**

Nomor Pokok Mahasiswa : 1217031017

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.	**Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**
NIP. 19760411 200012 2 001	NIP. 19720227 199802 1 001

2. Mengetahui

Ketua Jurusan Matematika

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI UNIVERSITAS LAMPUNG FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : 28 Desember 2016

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel"** adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Januari 2017 .

Yang menyatakan

Danar Mubarak
1217031017

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Danar Mubarak, dilahirkan di Bandar Lampung, pada tanggal 15 Juni 1994. Merupakan anak kedua dari tiga bersaudara, pasangan Bapak Solhan Khairi dan Ibu Siti Suaidah.

Menempuh pendidikan awal Taman Kanak-kanak di TK Pewarnida I pada tahun 2000, Sekolah Dasar (SD) di SD Negeri 1 Sukaraja tahun 2005 dan pindah sekolah pada tahun 2006 di SD Negeri 1 Sukabumi, Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMP Negeri 11 Bandar Lampung tahun 2009, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA Negeri 2 Bandar Lampung tahun 2012.

Pada tahun 2012 penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung, melalui jalur SNMPTN Selama menjadi mahasiswa, penulis bergabung di Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) yang diamanahkan sebagai Anggota di Bidang Kaderisasi periode 2012-2014 dan pada tahun ketiga sebagai anggota Biro Dana dan Usaha HIMATIKA.

Pada bulan Januari 2015 melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Badan Penataan dan Pembangunan Daerah (BAPPEDA) Bandar Lampung untuk mengaplikasikan serta menerapkan ilmu yang telah diperoleh dalam perkuliahan.

Selanjutnya bulan Juli-September 2015 melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Mulyo Jadi, Kecamatan Gunung Terang, Kabupaten Tulang Bawang Barat.

KATA INSPIRASI

Setiap Pribadi orang, merupakan proyeksi dirinya dan membentuk
dirinya sendiri, pertumbuhan dan perkembangan.
membutuhkan keberanian dan kekuatan pribadi, atau perlindungan,
kesempatan, dan dorongan dari lingkungannya.
(Abraham Maslow)

Apapun yang terjadi jangan pernah menyerah,
jika menyerah habislah sudah.
(Top Ittipat)

Persembahan

Dengan segala kerendahan hati dan rasa syukur, aku persembahkan karya kecilku ini untuk Ibu, Ayah, kakak dan adikku tercinta yang selalu memberikan kasih sayang dan memberikan dukungan dan tempat istimewa di hati kalian, yang selalu memberikan motivasi untuk tetap semangat.

Kepada teman-temanku yang telah memberikan warna dalam perjalanan selama perkuliahan,

Ku persembahkan karya ini untuk kalian.

SANWACANA

Alhamdulillah, Segala puji bagi Allah SWT, karena berkat rahmat, dan ridho-Nya skripsi yang berjudul "Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel" dapat diselesaikan tepat pada waktunya. Dalam penyusunan skripsi ini, penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi memberikan bimbingan dan saran - saran. Untuk itu, penulis ucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya , terutama kepada:

1. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing 1 yang telah meluangkan waktu untuk membimbing dan memberi saran kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing 2 yang telah memberikan banyak sekali saran dan arahan dengan penuh kesabaran guna menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji yang telah mengevaluasi, memberikan saran dan kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini
4. Ibu Wamiliana, Ph.D., selaku Pembimbing Akademik yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc.,Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas lampung.
7. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung yang telah memberikan banyak ilmu dan pengalaman.
8. Ayah dan Ibu tercinta yang selalu mendukung, mendoakan dan memberikan arahan.
9. Teman-teman seperjuangan, seluruh angkatan matematika 2012 yang bersama-sama menjalani perkuliahan selama ini.
10. Keluarga HIMATIKA, Kelompok KKN 2015 yang selalu menjadi penyemangat.
11. Seluruh pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu, atas peran dan dukungannya dalam menyusun skripsi ini.

Penulis berharap Allah SWT akan membalas kebaikan dan pengorbanan mereka. Semoga karya kecil ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Bandar Lampung,   Januari 2017

Penulis,

Danar Mubarak

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

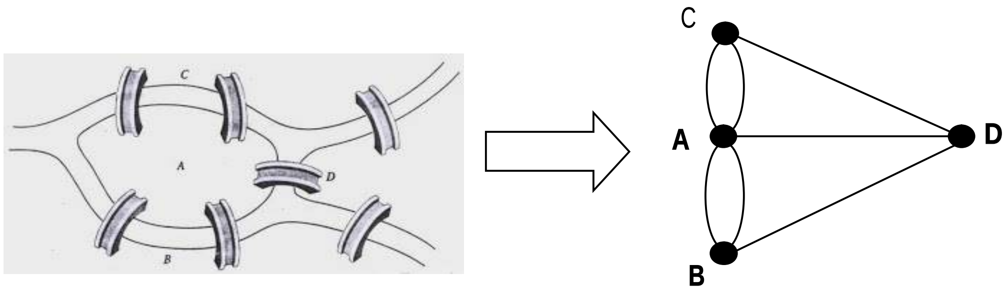
Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Graf merupakan salah satu ilmu yang dibahas dalam matematika yang mempelajari himpunan titik yang dihubungkan oleh himpunan sisi. Graf adalah himpunan tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu himpunan pasangan tidak terurut titik-titik tersebut yang disebut sisi, yang dinotasikan dengan $G = (V,E)$, dimana V menyatakan himpunan titik yang tak kosong dan E menyatakan himpunan sisi yang merupakan pasangan sisi tak terurut dari titik-titik V.

Teori graf lahir pada Tahun 1736 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan *Konigsberg* yang sangat terkenal di Eropa. Masalah jembatan Konigsberg adalah mungkin atau tidaknya melewati tujuh jembatan yang ada di Kota Konigsberg masing-masing tepat satu kali dan kembali ketempat semula. Untuk memecahkan masalah tersebut, Euler memisalkan daratan dengan titik (*vertex*) dan jembatan dinyatakan dengan garis atau sisi (*edge*).



(i) (ii)

Gambar 1. (i) Jembatan Konigsberg dan (ii) graf yang merepresentasikan jembatan Konigsberg

Misalkan c adalah suatu pewarnaan titik pada graf G dengan menggunakan warna 1,2, ….,k untuk suatu bilangan bulat positif k. Secara ekuivalen, c merupakan suatu partisi Π dari $V(G)$ kedalam kelas-kelas warna yang saling bebas $C_1, C_2, \ldots, C_k$ yang mana titik-titik di C_i berwarna i, $1 \leq i \leq k$. Jarak titik v ke suatu C_i, dinotasikan dengan $d(v, C_i)$ adalah min$\{d\ (v, x) | \ x \in C_i\}$. Kode warna, $c_\Pi\ (v)$ dari suatu titik $v \in V$ didefinisikan sebagai k-vektor yaitu:

$$c_\Pi \ = \ (d(v, C_1), d(v, C_2), \ldots, d(v, C_k))$$

Jika setiap titik di G memiliki kode warna yang berbeda terhadap partisi Π, maka c disebut pewarnaan lokasi. Banyaknya warna minimum yang digunakan pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G, dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Chartrand dkk. (2002) telah menentukan bilangan kromatik lokasi dari beberapa kelas graf, diantaranya pada graf lintasan P_n dengan n $\geq$ 3 diperoleh $\chi_L\ (P_n) = 3$; pada graf siklus diperoleh dua hasil yaitu $\chi_L\ (C_n) =$ 3 untuk n ganjil dan untuk n genap diperoleh $\chi_L\ (C_n) = 4$; pada graf bintang ganda $(S_{a,b})$, $1 \leq a \leq b$ dan $b \geq 2$, bilangan kromatik lokasinya adalah $b + 1$. Misalkan G graf terhubung berorde $n \geq 3$, maka $\chi_L(G) = n$ jika hanya jika G graf multipartit lengkap.

Selanjutnya pada tahun 2011 dan 2012, Asmiati dkk. telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf kembang api dan graf bintang. Pada graf almagamasi bintang seragam, $S_{k,m}$ adalah almagamasi dari k buah graf bintang $K_{1,m}$ bila $n_i = m$, untuk setiap i diperoleh jika $H\ (a) = (m + a - 1)\binom{m+a-1}{m-1}$ untuk $a \geq 0$, $k \geq 2$ dan $m \geq 3$ maka $\chi_L(S_{k,m}) = m$ untuk $2 \leq k \leq H\ (0)$, $m \geq 3$ dan $\chi_L(S_{k,m}) = m + a$ untuk $H\ (a) \leq k \leq H\ (0)$, $a \geq 1$. Pada graf kembang api $F_{n,k}$ untuk $n \geq 2$ diperoleh $\chi_L(F_{n,k}) = 4$ sedangkan untuk $k \geq 5$ diperoleh $\chi_L(F_{n,k}) = k - 1$, untuk $2 \leq n \leq k - 1$ dan $\chi_L(F_{n,k}) = k - 1$ untuk lainnya.

Sejauh penelusuran literatur belum ada kajian bilangan kromatik lokasi pada graf barbel. Jadi, pada penelitian ini akan dibahas tentang Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel.

1.2 Rumusan Masalah

Pada penelitian ini akan dibahas tentang Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel. Graf Barbel adalah graf sederhana yang diperoleh dari dua buah graf lengkap yang dihubungkan dengan sebuah jembatan.

1.3 Tujuan Penelitian

Pada penelitian ini akan ditentukan bilangan kromatik lokasi pada Graf Barbel.

1.4 Manfaat Penelitian

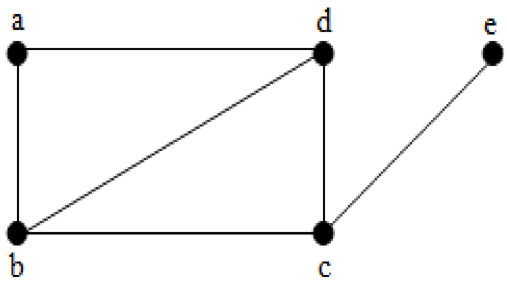
Manfaat dari peneitian ini adalah:

1. Menambah pengetahuan penulis tentang hubungan antara perwanaan graf kromatik pada graf barbel.
2. Memberikan sumbangan pemikiran untuk memperluas wawasan mengenai pewarnaan graf kromatik, khususnya pada graf lengkap terhadap graf barbel.
3. Memberikan masukan bagi para penulis lain yang ingin mengkaji lebih lanjut mengenai pewarnaan pada graf barbel.

II. TINJAUAN PUSTAKA

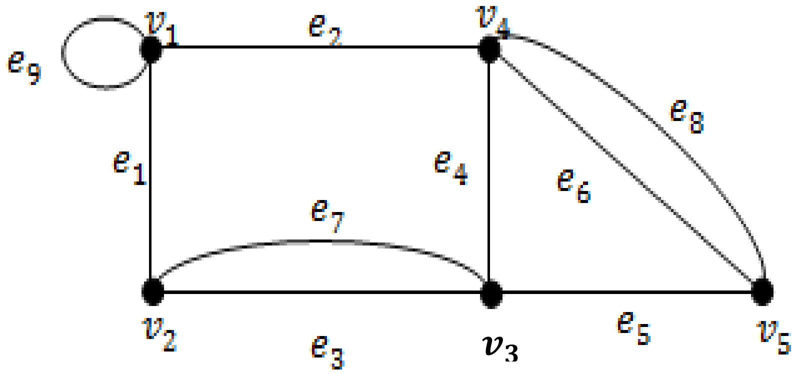
2.1 Konsep Dasar Graf

Pada sub bab ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema tentang graf yang diambil dari Deo (1989). Suatu graf *G* adalah pasangan himpunan terurut (V(G),E(G) dengan V(G) menyatakan himpunan titik (*vertex*) tak kosong dan E(G) menyatakan himpunan sisi (*edge*) yakni pasangan tak terurut dari V(G). Pada Gambar 2, terlihat V(G) = {*a*,*b*,*c*,*d*,*e*} dan E(G) = {*ab*,*bc*,*cd*,*ce*,*ad*}.



Gambar 2**.** Graf dengan 5 titik dan 6 sisi

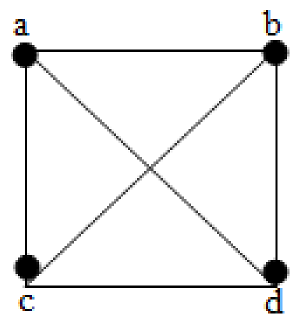
Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek-objek sebagai bulatan atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan sisi.



Gambar 3. Graf dengan titik 5 dan 9 sisi.

Loop adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sisi paralel adalah sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama.pada Gambar 3, terdapat *loop* pada titik v_1 yaitu e_9, sedangkan e_3, e_7, e_6dan e_8 disebut sisi paralel. Graf yang tidak mempunyai sisi ganda dan/atau *loop* disebut graf sederhana *(simple graf)*. Graf pada Gambar 3, bukan merupakan graf sederhana *(simple graf)* karena terdapat *loop* (e_9)dan sisi ganda $(e_3, e_7$ dan $e_6, e_8)$.

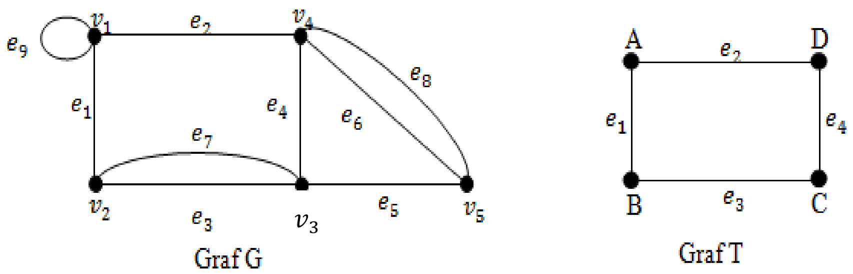
Suatu graf G dikatakan graf lengkap jika untuk setiap pasangan titik terdapat sisi yang menghubungkannya.



Gambar 4. Graf Lengkap K_4

Misalkan G dikatakan graf dengan himpunan titik V(G) dan sisi E(G), maka graf T dikatakan subgraf G dinotasikan dengan $T \subseteq G$ jika dan hanya jika V(T) himpunan bagian dari V(G) dan E(T) himpunan bagian dari E(G). Graf T

dikatakan subgraf sejati *G* jika dan hanya jika *H* subgraf dari *G* dan *T*≠*G*. Contoh subgraf dapat dilihat pada gambar berikut :



Gambar 5. $T \subseteq G$

Dua titik pada graf *G* dikatakan bertetangga (*adjacent*) bila keduanya terhubung oleh suatu sisi. Suatu sisi dikatakan menempel (*incident*) dengan suatu titik *u*, jika titik *u* merupakan salah satu titik ujung dari sisi tersebut. Pada Gambar 3, dapat dilihat bahwa sisi e_1 menempel (*incident*) dengan titik v_1 dan v_2 dan titik v_1 menempel pada sisi e_1 dan e_2. Titik v_1 bertetangga (*adjacent*) dengan titik v_2 karena terdapat sisi-sisi yang menghubungkan v_1 dan v_2. Demikian pula dengan titik v_1 bertetanggaan dengan v_4, dan titik v_2 bertetanggaan dengan titik v_3.

Derajat (*degree*) dari suatu titik $v \in V(G)$, dinotasikan dengan d(V) dari graf *G* adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik *v*. Jika setiap titik pada graf *G* mempunyai derajat yang sama, maka *G* disebut graf reguler. Daun (*pendant vertex*) adalah titik yang berderajat satu. Pada Gambar 3. $d(v_1) = 4$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 4$, $d(v_4) = 4$ dan $d(v_5) = 3$. Graf tersebut tidak memiliki daun karena setiap titiknya memiliki derajat lebih dari satu.

Jalan (*walk*) adalah barisan berhingga dari titik dan sisi dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelumnya dan sesuadahnya. *Walk* pada Gambar 3. adalah $v_1, e_2, v_4, e_6, v_5, e_5, v_3, e_3, v_2, e_1$.

Lintasan (*path*) adalah jalan yang memiliki atau melewati titik yang berbeda-beda. Lintasan yang memiliki titik awal dan akhir yang sama disebut lintasan tertutup atau siklus. Graf pada Gambar 3. adalah v_1, v_4, v_5, v_3, v_2 adalah salah satu lintasan tertutup. Siklus yang banyak titik genap disebut sirkuit genap, sedangkan jika banyak titiknya ganjil, maka disebut siklus ganjil. Graf G dikatakan terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik yang berbeda. Jika tidak, maka G disebut graf tak terhubung. Suatu sisi *e* pada graf G disebut jembatan, jika sis *e* dibuang mengakibatkan G menjadi tak terhubung.

2.2 Bilangan Kromatik Lokasi

Bilangan kromatik lokasi diperkenalkan oleh Chartrand dkk. (2002). Bilangan kromatik lokasi didefinisikan sebagai berikut. Misalkan *c* suatu pewarnaan sejati di *G* dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk *u* dan *v* yang bertetangga di *G*. Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna *i*, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari *V(G)*. Kode warna, $c_\Pi(v)$ dari *v* adalah *k*-pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk *i* $\leq$ *k*, jika setiap titik di *G* mempunyai kode warna yang berbeda, maka *c* disebut pewarnaan lokasi dari *G*, banyaknya warna minimum yang digunakan pada pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari *G*, dan dinotasikan dengan $X_L(G)$.

Berikut ini diberikan teorema dasar tentang bilangan kromatik lokasi yang telah dibuktikan oleh Chartrand dkk. (2002). Lingkungan dari u, dinotasikan dengan $N(u)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan u.

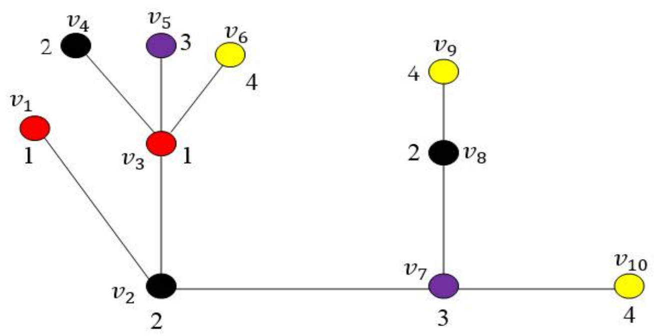
Teorema 2.1. Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf G. Jika u dan v adalah dua titik yag berbeda di G sedemikian sehingga $d(u,w) = d(v,w)$ untuk semua $w \in V(G) - \{u,v\}$, maka $c(u) = c(v)$. Secara khusus, jika u dan v titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti: Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi dari titik-titik G kedalam kelas warna C_i. Untuk suatu titik $u, v \epsilon V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π. Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \epsilon V(G) - \{u,v\}$ maka $d\left(u, C_j\right) = d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i$, $1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi, $c(u) \neq c(v)$. ■

Akibat 2.1. Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $X_L(G) \geq k + 1$.

Bukti: Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun, yaitu $x_1, x_2, \dots, x_k$ di G. Berdasarkan Teorema 2.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna yang berbeda untuk setiap $x_i, i = 1,2, \dots, k$. Karena v bertetangga dengan semua x_i, maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibatnya, $X_L(G) \geq k + 1$. ■

Berikut ini diberikan graf *G* dan akan ditentukan bilangan kromatik lokasi dari graf *G* tersebut.



Gambar 6. Pewarnaan lokasi minimum dari graf *G*

Diberikan graf *G* seperti yang terlihat pada Gambar 6. Akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf *G*. Karena terdapat titik v_3 yang mempunyai 3 daun, maka berdasarkan Akibat 2.1, $X_L(G) \geq 4$. (2.1)

Misalkan *c* adalah pewarnaan titik menggunakan empat warna. Pada graf *G* diberikan kelas warna sedemikian diperoleh $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ dengan $C_1 = \{v_1, v_3\}, C_2 = \{v_2, v_4, v_8\}, C_3 = \{v_5, v_7\}$ dan $C_4 = \{v_6, v_9, v_{10}\}$. Oleh karena itu, didapatkan kode warna sebagai berikut :

$c_\Pi(v_1) = (0,1,2,3)$; $c_\Pi(v_2) = (1,0,1,2)$; $c_\Pi(v_3) = (0,1,1,1)$;

$c_\Pi(v_4) = (1,0,2,2)$; $c_\Pi(v_5) = (1,2,0,2)$; $c_\Pi(v_6) = (1,2,2,0)$;

$c_\Pi(v_7) = (2,1,0,1)$; $c_\Pi(v_8) = (3,0,1,1)$; $c_\Pi(v_9) = (4,1,2,0)$;

$c_\Pi(v_{10}) = (3,2,1,0)$

Karena kode warna dari semua titik di *G* berbeda, maka *c* adalah pewarnaan lokasi. Jadi, $X_L(G) \leq 4$

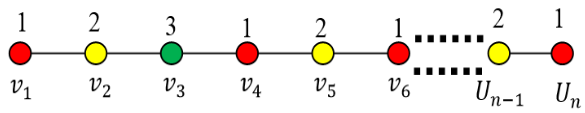
Berdasarkan (2.1) dan (2.2), maka Π adalah pewarnaan lokasi dari *G* dan $X_L(G) = 4$.

Teorema 2.2 (*Chartrand dkk. 2002*) Misalkan k derajat maksimum di graf G, maka $X_L(G) \leq 1 + k$.

Berikut ini akan diberikan bilangan kromatik lokasi beberapa kelas graf sederhana.

Teorema 2.3 (*Cartrand dkk. 2002*) Bilangan Kromatik Lokasi Graf Lintasan $P_n (n \geq 3)\ adalah\ 3$.

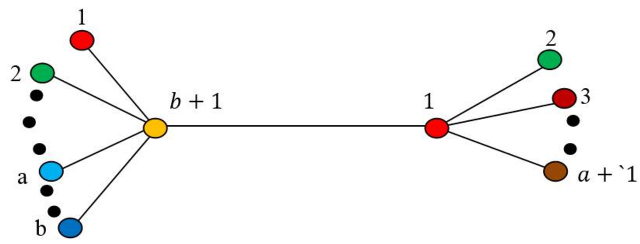
Bukti: Perhatikan bahwa $X_L(P_1) = 1$ dan $X_L(p_2) = 2$. Jelaslah bahwa $X_L(P_L) \geq 3$ untuk $n \geq 3$. Berdasarkan Teorema 2.2 $X_L(G) \leq 1 + k$, dengan k derajat titik maksimum. Karena pada $P_n, k = 2$, maka $X_L(P_n) \leq 1 + 2$. Akibatnya $X_L(G) \leq 3$. Jadi terbukti $X_L(P_n) = 3$. ■



Gambar 7. Pewarnaan Lokasi pada Graf Lintasan P_n

Teorema 2.4 (*Chartand dkk, 2002*) Untuk bilangan bulat a dan b dengan $1 \leq a \leq b$ dan $b \geq 2$, $X_L(S_{a,b}) = b + 1$.

Bukti: Berdasarkan Akibat 2.1, diperoleh batas bawah yaitu $X_L(S_{a,b}) \leq b + 1$. Selanjutnya, akan ditentukan batas atasnya yaitu $X_L(S_{a,b}) = b + 1$. Misalkan c adalah pewarnaan titik menggunakan $(b + 1)$ warna sebagaimana terlihat pada Gambar 8. Perlihatkan bahwa kode warna dari setiap titik $(S_{a,b})$ berbeda, akibatnya c adalah pewarnaan lokasi. Jadi $X_L(S_{a,b}) \leq b + 1$. ■

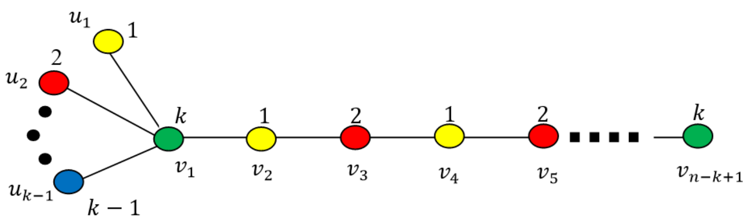


Gambar 8. Pewarnaan Lokasi minimum pada $S_{a,b}$

Chartrand dkk. (2003) Telah mendapatkan bentuk graf pohon dengan titik $n \geq 5$ yang memiliki bilaga kromatik lokasi 3 sampai n, kecuali $n - 1$, sebagaimana teorema berikut.

Teorema 2.5 (*Chartrand dkk, 2002*) Terdapat graf Pohon dengan titik $n \geq 5$ yang mempunyai bilangan kromatik k jika dan hanya jika $k \in (3,4, \dots, n-2, n)$.

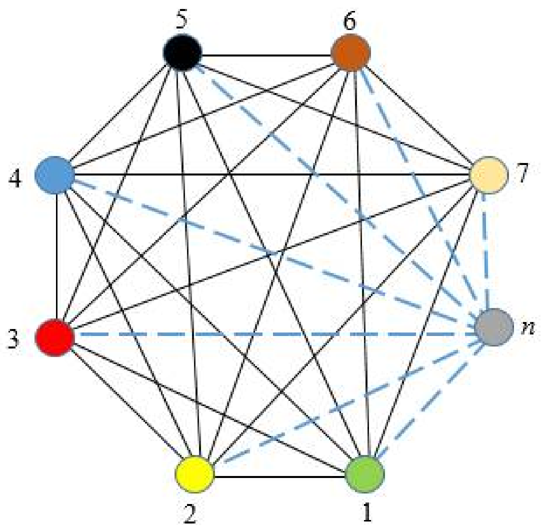
Pewarnaan Teorema 2.5 dapat diartikan sebagai berikut:



Gambar 9. Graf Pohon T dengan titik n dengan $X_L(T) = k$

Teorema 2.6 Bilangan kromatik lokasi graf K_n adalah n.

Bukti: Karena setiap titik saling bertetangga maka setiap titik diberi warna berbeda, jadi $X_L(K_n) = n, n \geq 1$.



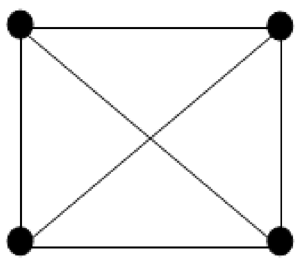
Gambar 10. Graf Lengkap K_n dengan pewarnaan n

2.3 Beberapa Kelas Graf

Berikut akan diberikan beberapa kelas graf yang akan digunakan dalam penelitian ini.

2.3.1 Graf Lengkap

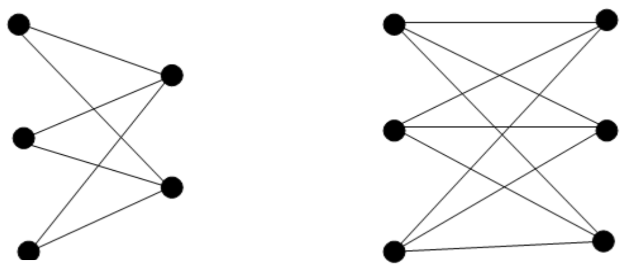
Graf Lengkap merupakan graf sederhana yang setiap sisinya terhubung ke semua sisi lainnya. Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf sederhana, jika untuk setiap pasangan titik V_i dan V_j di G terdapat sebuah sisi yang menghubungkannya, maka G disebut graf lengkap. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n.



Gambar 11. Graf Lengkap K_4

2.3.2 Graf Bipartit (*Bipartite Graph*)

Sebuah graf G dikatakan graf bipartit jika graf $G(V, E)$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan V_1 dan V_2 sedemikian sehingga $V_1 \cap V_2 = \phi, V_1 \cup V_2 = V$ dan titik-titik di V_1 dihubungkan ke V_2. Jika setiap titik di V_1 dihubungkan ke setiap titik di V_2 disebut graf bipartit lengkap. Graf bipartit lengkap, dinotasikan dengan $K_{m,n}$ yang mana $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$.

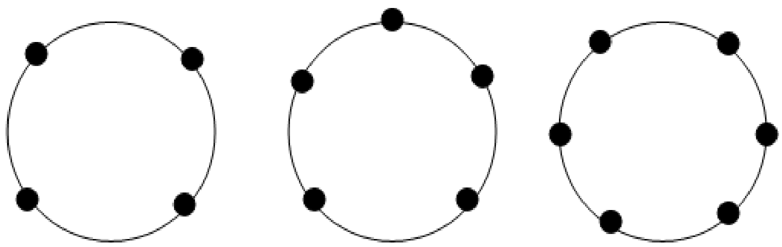


$K_{3,2}$ $K_{3,3}$

Gambar 12. Graf $K_{3,2}$ dan $K_{3,3}$

2.3.3 Graf Siklus (*Cycle Graph*)

Graf siklus dinotasikan C_n dengan *n* menyatakan banyaknya titik dari graf. Pada graf siklus, banyaknya titik dan sisi sama (Ridwan. 2013). Diantara contoh dari graf siklus ditunjukkan pada gambar berikut.

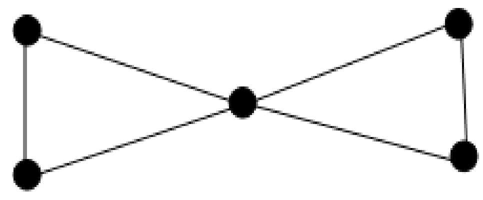


C_4 C_5 C_6

Gambar 13. Graf Siklus dengan *order* 4, 5 dan 6.

2.3.4 Graf Kincir (*Windmill Graph*)

Graf kincir W_m^k adalah graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah garis pada k buah graf lengkap K_m. Gambar berikut adalah contoh graf kincir

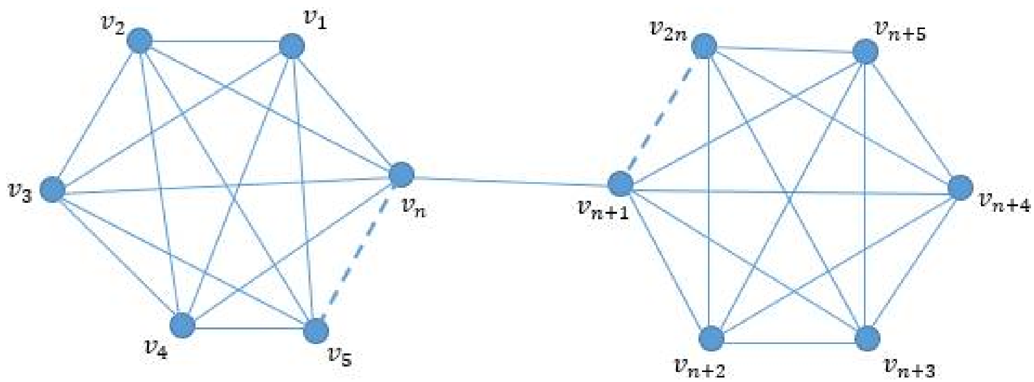


K_3^2

Gambar 14. Graf Kincir dengan titik 2

2.4 Graf Lengkap terhadap Graf Barbel

Graf barbel adalah sebuah graf sederhana yang didapat dari dua buah graf lengkap $K_n, n \geq 3$ yang dihubungkan dengan sebuah sisi, dinotasikan dengan $B_{n,n}$. Graf barbel terdiri dari himpunan *vertex* $V(B_{n,n}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, v_{2n-1}, v_{2n}\}$ dengan $n \geq 3$. Himpunan *vertex-vertex* $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $\{v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_{2n}\}$ masing-masing merupakan graf lengkap. Berikut ilustrasi graf barbel :



Gambar 15. Graf barbel $B_{n,n}$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini akan dilakukan pada semester ganjil tahun anjaran 2016/2017 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf Barbel.

B_n, n ≥ 3.

1. Konstruksi batas atas bilangan kromatik lokasi graf Barbel B_n, n ≥ 3, dengan cara memberikan pewarnaan sebarang pada setiap titik di graf Barbel B_n, n ≥ 3. Jika setiap titik mempunyai kode warna berbeda, maka pewarnaan titik yang diberikan menjadi pewarnaan lokasi.
2. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf barbel B_n, n ≥ 3. Karena graf barbel memuat graf lengkap, maka berdasarkan Teorema 2.6, $X_L(B_n) \geq n$. Namun, jika batas bawah trivial ini tidak bisa digunakan, maka akan ditentukan batas bawah dengan menggunakan pembuktian kontradiksi.

V. KESIMPULAN

Dalam penelitian ini diperoleh kesimpulan bahwa bilangan kromatik lokasi graf barbel untuk $B_{n,n}$ dengan $n \geq 3$ adalah $n + 1$, sedangkan untuk bilangan kromatik lokasi graf barbel dengan $B_{n,m}$; $m, n \geq 3$ dan $m \neq n$ adalah $maks\{m, n\}$.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati. 2014. The Locating-Chromatic Number of Non-Homogeneous Almagamation of Stars, *Far East Journal of Mathematical Science* (*FJMS*), 93(1), 89-96.

Asmiati, Assyiyatun, H, Baskoro, E.T, Suprijanto, D, Simanjuntak, R, Uttunggadewa, S. 2012. Locating-Chromatic Number of Firecracker Graph, *For East Journal of Mathematics Science*, 63(1), 11-23.

Asmiati, Assyiyatun, H, Baskoro, E.T. 2011. Locating-chromatic Number of Almagamation of Stars, *ITB J.Sci.*, 43A, 1-8.

Chartrand, G., Erwin, D, Henning, M.A, Slater, P.J, dan Zhang, P. 2002. *The Locating-Chromtic Number of a grph. Bull.inst. combin. Apll.,* 36, 89-101.

Chartrand, G., Erwin, D.,Henning, M.A., Slater, P.J., dan Zhang, P. 2003. *Graf of Order n with Locating-Chromatic Number n-1*. Discrate Math., 269, 65-79.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Application to Engineering and computer science.* Prentice hall Inc, New York.

Welyyanti, D., Baskoro, E.T., Simanjuntak, R., Uttungdewa, S. 2014. The Locating-Chromatic Number of Disconnected Graphs, 171-172.