BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF TAK TERHUBUNG DARI GRAF BINTANG GANDA DAN SUBDIVISINYA

(Skripsi)

Oleh

SITI NURAZIZAH

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF TAK TERHUBUNG DARI GRAF BINTANG GANDA DAN SUBDIVISINYA

Oleh

Siti Nurazizah

Bilangan kromatik lokasi $\chi_L(G)$ adalah banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi di G. Penelitian ini menentukan bilangan kromatik lokasi graf tak terhubung pada graf bintang ganda. Bilangan kromatik lokasi graf tak terhubung yang setiap komponennya graf bintang ganda, $S_{n,n}^*$ adalah $n + 1$. Graf $S_{n,n}^*$ dapat diperluas dengan menambahkan subdivisi pada sisi-sisi tertentu dengan nilai bilangan kromatik lokasinya tetap.

Kata kunci: bilangan kromatik lokasi, graf bintang ganda, graf tak terhubung, subdivisi

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF TAK TERHUBUNG DARI GRAF BINTANG GANDA DAN SUBDIVISINYA

Oleh

SITI NURAZIZAH

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar

SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Skripsi : **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF TAK TERHUBUNG DARI GRAF BINTANG GANDA DAN SUBDIVISINYA**

Nama Mahasiswa : Siti Nurazizah

NPM : 1317031080

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.	**Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.**
NIP 19760411 200012 2 001	NIP 19620704 198803 1 002

2. Mengetahui

Ketua Jurusan Matematika

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing: **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **18 Januari 2017**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Siti Nurazizah**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1317031080**

Judul : **Bilangan Kromatik Lokasi Graf Tak Terhubung dari Graf Bintang Ganda dan Subdivisinya**

Jurusan : **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, Januari 2017

Penulis,

Siti Nurazizah
NPM. 1317031080

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bandar Jaya pada tanggal 11 Juli 1995, sebagai anak pertama dari dua bersaudara yang merupakan putri dari Bapak Dadah Dahlan dan Ibu Noneng Wahyuni. Penulis merupakan lulusan Taman Kanak-Kanak (TK) Tunas Harapan pada tahun 2001, Pendidikan Sekolah Dasar (SD) Proklamasi pada tahun 2007, Sekolah Menengah Pertama (SMP) Negeri 1 Terbanggi Besar pada tahun 2010, Sekolah Menengah Atas (SMA) Negeri 1 Terbanggi Besar pada tahun 2013.

Tahun 2013 penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui Jalur SBMPTN (Tertulis). Selama menjadi mahasiswa, penulis pernah bergabung di Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) yang diamanahkan menjadi anggota Bidang Keilmuan periode 2014-2015 dan dilanjutkan sebagai anggota pada periode 2015-2016. Selain itu penulis juga pernah menjadi anggota AMAR ROIS pada periode 20013-2014. Pada awal tahun 2016 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Biro Administrasi Pembangunan Kantor Gubernur Provinsi Lampung. Pada bulan Juli hingga Agustus 2016 penulis melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) dan bergabung pada KKN Tematik 2016 di Desa Negeri Ratu, Kec. Pubian, Kab. Lampung Tengah.

PERSEMBAHAN

Kupersembahkan karya kecil ku ini dengan segala cinta, kasih, dan kerendahan hati kepada:

Kedua orang tuaku tercinta, yang telah berjuang dengan cinta dan doanya, dengan segala keringat dan air matanya, dengan keluh dan kesahnya yang tertahan hingga dapat terselesaikannya skripsi ini.

Keluarga besarku yang selalu menemani langkahku dengan iringan doa-doanya dan selalu memberikan semangat.

Seseorang yang telah memberikan banyak dorongan, motivasi, kasih sayang, ketulusan serta bantuan yang juga tiada lelahnya selama proses penyelesaian skripsi ini.

KATA INSPIRASI

"Hidup merupakan sebuah pilihan, bahkan tidak memilihpun merupakan sebuah pilihan"

(Unknown)

"Sedikit mencukupi itu lebih baik daripada banyak tetapi melalaikan"

(HR Abu Ya'la)

"Boleh lelah, istirahatlah sejenak, namun jangan pernah lupa untuk kembali beranjak"

(Siti Nurazizah)

SANWACANA

Puji syukur Penulis ucapkan kehadirat Allah SWT, karena atas rahmat dan hidayah-Nya Penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Skripsi dengan judul "**Bilangan Kromatik Lokasi Graf Tak Terhubung dari Graf Bintang Ganda dan Subdivisinya**" disusun sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar Sarjana Sains (S.Si) di Universitas Lampung.

Adapun terselesaikannya skripsi ini juga tidak terlepas dari bantuan, motivasi, dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku Pembimbing I atas kesediannya memberikan bimbingan, saran, dan kritik dalam proses penyelesaian skripsi ini
2. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc.,Ph.D., selaku Pembimbing II dan sekaligus sebagai Ketua Jurusan Matematika atas kesediaannya memberikan bimbingan dalam proses penyelesaian skripsi ini.
3. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si., selaku pembahas yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam skripsi ini.
4. Ibu Widiarti, M.Si., selaku Pembimbing Akademik yang selama ini telah membimbing dan memberi saran bagi penulis.

5. Mamah dan Bapak tercinta yang senantiasa memberikan motivasi dan doa yang tak henti-hentinya. Serta adikku Robi Julian yang telah menjadi salah satu sumber semangat penulis.
6. Sahabat-sahabat Matematika 2013 Karina, Shintia, Irfan, Citra, Maimuri, Eka, Suri, Tiwi, Suci, Yucky, San, Jefery serta yang lainnya terimakasih atas dukungan dan bantuannya.
7. Sahabat-sahabat kosan yang selalu menemani dan memberi dukungan kepada Penulis, Maulindra, Arinda, Ana, dan Mae.
8. Bihikmi Semenguk, pria yang selama ini telah banyak membantu, menemani juga selalu memberikan dukungan yang tak henti-hentinya kepada penulis dalam proses penyelesaian skripsi ini.

Terimakasih, semoga skripsi ini bermanfaat bagi kita semua.

Bandar Lampung, Januari 2017

Penulis

Siti Nurazizah

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF TAK TERHUBUNG DARI PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Konsep teori graf diperkenalkan pertama kali oleh seorang matematikawan Swiss, Leonard Euler pada tahun 1736 dalam permasalahan jembatan Konigsberg. Teori graf merupakan salah satu kajian matematika yang semakin lama semakin berkembang. Banyak permasalahan yang dapat dinyatakan dan diselesaikan dengan menggunakan teori graf. Salah satunya adalah menyelesaikan masalah jalur penerbangan untuk menentukan jalur tercepat.

Dalam permasalahan penerbangan menentukan jalur tercepat dapat menggunakan metode pewarnaan graf. Pewarnaan tersebut berdasarkan perbedaan level ketinggian. Sehingga akan lebih mudah dalam menentukan jalurnya dan semakin mudah untuk dilihat jalur mana yang akan memberikan alternatif terbaik. Salah satu teori graf yang memiliki kontribusi besar bagi perkembangan ilmu pengetahuan adalah teori pewarnaan lokasi.

Kajian tentang pewarnaan lokasi adalah kajian yang baru dalam teori graf. Misalkan c suatu pewarnaan titik pada graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan C_i himpunan titik-titik yang diberi warna i, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah k-pasang terurut $\left(d(v,C_1), d(v,C_2), \ldots, d(v,C_k)\right)$ dengan $d(v,C_1) = \min\{d(v,x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi G. Bilangan kromatik lokasi dari G dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ adalah bilangan terkecil k sehingga G mempunyai pewarnaan-*k* lokasi (Chartrand dkk., 2002).

Teori pewarnaan lokasi pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk. pada tahun 2002 dengan menentukan lokasi dari beberapa kelas graf sebagai berikut. Untuk lintasan P_n dengan $n \geq 3$ diperoleh $\chi_L(P_n) = 3$. Untuk graf siklus diperoleh dua hasil yaitu n ganjil berlaku $\chi_L(C_n) = 3$ dan untuk n genap berlaku $\chi_L(C_n) = 4$. Selanjutnya juga diperoleh $\chi_L(G)$ untuk graf multipartit lengkap dan graf bintang ganda. Pada tahun 2003 Chartrand dkk. membuktikan bahwa bilangan kromatik lokasi graf G dengan orde n yang memuat graf multipartit lengkap berorde $(n-1)$ sebagai subgraf induksinya, berada pada selang $\left[\frac{(n+1)}{2}, n\right]$ dan juga graf-graf yang mempunyai bilangan kromatik lokasi dengan batas atasnya $(n-2)$. Selain itu, Chartrand dkk. (2003) juga menunjukkan bahwa terdapat pohon berorde $n \geq 5$ dengan bilangan kromatik lokasi $k \in \{3,4,\ldots,n-2,n\}$.

Selanjutnya beberapa penelitian Asmiati dkk. pada tahun 2011-2014 juga memberikan pemikiran untuk melatarbelakangi kajian penelitian ini. Asmiati dkk. (2011) berhasil mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi bintang. Selanjutnya, Asmiati dkk. (2012) memperoleh bilangan kromatik lokasi pada graf kembang api. Pada tahun yang sama juga, Asmiati dan Baskoro (2012) berhasil mengkarakterisasi semua graf yang memuat siklus berbilangan kromatik lokasi tiga. Kemudian, Baskoro dan Asmiati (2013) telah mendapatkan karakterisasi semua pohon berbilangan kromatik lokasi tiga. Masalah penentuan bilangan kromatik lokasi pada suatu graf masih terbuka untuk dikaji karena belum adanya teorema yang digunakan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi pada sembarang graf. Pada tulisan ini akan dikaji bilangan kromatik lokasi dari graf tak terhubung, khususnya adalah graf bintang ganda dan subdivisinya.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bilangan kromatik lokasi pada graf tak terhubung dari graf bintang ganda dan subdivisinya.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari karya ilmiah ini adalah sebagai berikut:

a. Mengembangkan wawasan tentang teori graf terutama tentang pewarnaan lokasi graf tak terhubung khususnya pada graf bintang ganda.
b. Sebagai referensi untuk penelitian lanjutan tentang menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf tak terhubung.

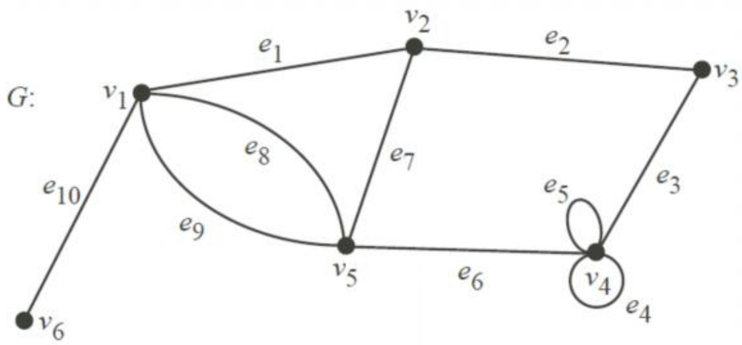
II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Konsep Dasar Graf

Beberapa konsep dasar mengenai graf yang akan digunakan dalam penelitian ini diambil dari Deo (1989). Graf *G* adalah himpunan terurut $(V(G),\ E(G))$, dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik (*vertex*) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dari G dengan $V(G) \neq 0$, dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi (*edge*) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ yakni pasangan tak terurut dari $V(G)$. Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut orde dari graf G. Jika u dan v dihubungkan oleh sisi e maka u dan v dikatakan bertetangga (*adjacent*), sedangkan titik v dan w dikatakan menempel (*incident*) dengan sisi e, demikian juga sisi e dikatakan menempel dengan titik v dan w. Himpunan tetangga (*neigborhood*) dari suatu titik *v*, dinotasikan dengan *N*(*v*) adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan *v*. Derajat dari titik *v* pada graf G adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v, dinotasikan dengan *d(v)*. Daun (*pendant vertex*) adalah titik yang berderajat satu.

Gelung (*loop*) adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sisi paralel adalah sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama. Graf yang tidak mempunyai sisi paralel atau *loop* disebut graf sederhana (*simple graph*). Pada graf terhubung G, jarak diantara dua titik x dan y adalah panjang lintasan terpendek antara kedua titik tersebut, dinotasikan $d(x, y)$.

Istilah lain yang sering muncul pada pembahasan graf adalah jalan, lintasan dan sirkuit. Jalan adalah barisan berhingga dari titik dan sisi dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Lintasan adalah jalan yang memiliki dan melewati titik yang berbeda. Graf G dikatakan graf terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik yang berbeda, dan jika tidak terdapat lintasan yang menghubungkan dua titik yang berbeda maka graf tersebut disebut graf tak terhubung. Sirkuit adalah lintasan tertutup, yaitu lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sirkuit dibedakan menjadi dua macam, yaitu sirkuit genap dan sirkuit ganjil. Sirkuit genap adalah sirkuit dengan banyaknya titik genap, dan sirkuit ganjil adalah sirkuit dengan banyaknya titik ganjil.



Gambar 1. Contoh graf G dengan 6 titik dan 11 sisi

Berdasarkan uraian di atas, pada Gambar 1, terlihat

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan

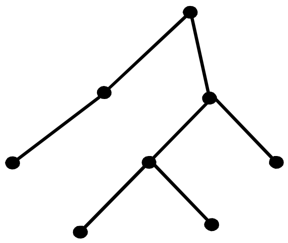
$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}$. Sisi e_1 menempel dengan titik v_1 dan v_2, dan titik v_2 menempel pada sisi e_1 dan e_2. Titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 karena terdapat sisi sisi yang menghubungkan v_1 dan v_2. Demikian pula dengan titik v_2 bertetangga dengan titik v_1, dan v_3 bertetangga dengan titik v_4, maka dapat ditulis $N(v_2) = \{v_1, v_3\}$.

Derajat graf pada Gambar 1 adalah $d(v_1) = 4$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 2, d(v_4) = 6, d(v_5) = 4$ dan $d(v_6) = 1$ adalah daun karena berderajat satu. Loop pada titik v_4 adalah e_4 dan e_5, sedangkan e_9 dan e_8 disebut sisi-sisi parallel pada graf G, karena mempunyai dua titik ujung yang sama. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa graf G pada Gambar 1 bukan merupakan graf sederhana karena memiliki loop dan sisi paralel.

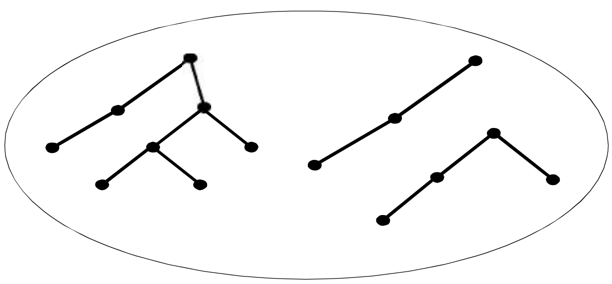
Contoh jalan pada Gambar 1 yaitu $v_6 - e_{10} - v_1 - e_1 - v_2 - e_2 - v_3 - e_3 - v_4 - e_6 - v_5$, contoh lintasan adalah $v_6 - e_{10} - v_1 - e_8 - v_5 - e_6 - v_4$ dan contoh sirkuit adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_2 - v_3 - e_3 - v_4 - e_6 - v_5 - e_8 - v_1$.

2.2. Beberapa Kelas Graf Pohon

Misalkan G adalah graf terhubung, G disebut pohon jika dan hanya jika tidak memuat siklus. Suatu graf yang setiap titiknya mempunyai derajat satu disebut daun. Sedangkan hutan merupakan kumpulan pohon yang saling lepas.



Gambar 2. Graf pohon

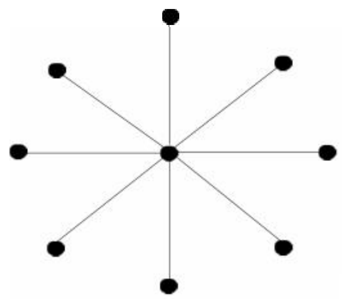


Gambar 3. Contoh hutan (*forest*)

Berikut adalah beberapa kelas dari graf pohon:

1. Graf Bintang (*Star Graph*)

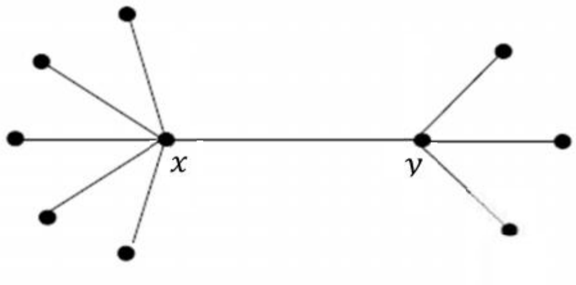
Graf bintang ($K_{1,n}$) adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat *n* yang disebut pusat dan titik lainnya berderajat satu.



Gambar 4. Graf Bintang $K_{1,8}$

2. Graf Bintang Ganda (*Double Star Graph*)

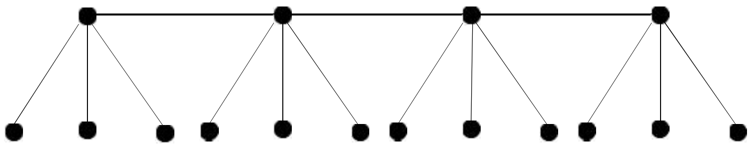
   Suatu graf pohon disebut graf bintang ganda jika graf pohon tersebut mempunyai tepat dua titik x dan y berderajat lebih dari satu. Jika x dan y berderajat lebih dari satu. Jika x dan y berturut-turut $a + 1$ dan $b + 1$, maka graf tersebut dinotasikan dengan $S_{a,b}$ (Chartrand dkk., 2002).



Gambar 5. Graf bintang ganda $S_{5,3}$

3. Graf Ulat

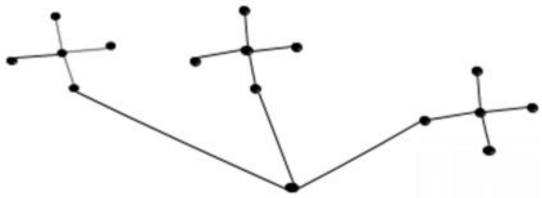
Graf ulat adalah graf pohon yang memiliki sifat apabila dihapus semua daunnya akan menghasilkan lintasan.



Gambar 6. Graf ulat

4. Graf Pohon Pisang (*Banana Tree*)

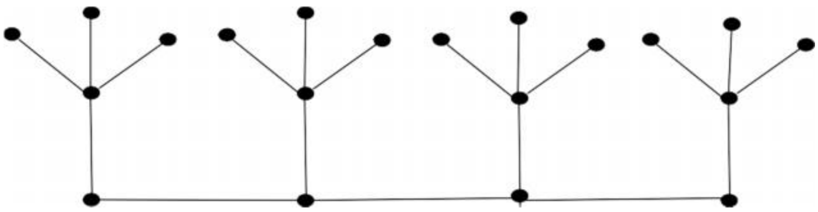
Graf pohon pisang $B_{n,k}$ adalah graf yang diperoleh dari n buah ke graf bintang dengan cara menghubungkan sebuah daun dari setiap graf bintang suatu titik baru. Titik baru itu disebut titik akar.



Gambar 7. Graf pohon pisang $B_{3,5}$

5. Graf Kembang Api

Graf kembang api seragam, $F_{n,k}$ adalah graf yang diperoleh dari n buah graf bintang S_k dengan cara menghubungkan sebuah daun dari setiap S_k melalui

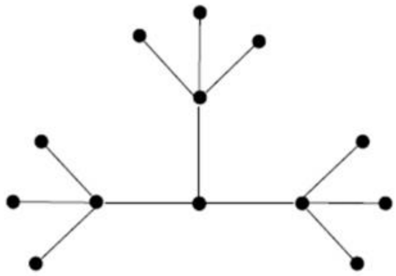


Gambar 8. Graf kembang api $F_{4,5}$

sebuah lintasan.

6. Graf Amalgamasi Bintang

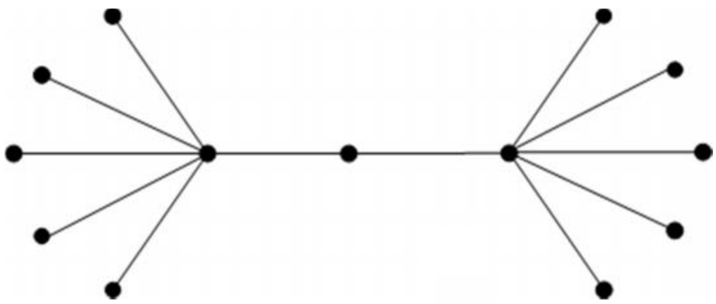
Graf amalgamasi bintang seragam, $S_{k,m}$ adalah amalgamasi dari k buah graf bintang $K_{1,m}$ (Asmiati dkk., 2012).



Gambar 9. Graf amalgamasi bintang $S_{3,4}$

2.3. Graf Subdivisi

Graf subdivisi $S(G)$ adalah graf yang diperoleh dari graf G dengan memasukkan titik tambahan ke beberapa sisi di graf G, atau dengan kata lain graf subdivisi $S(G)$ adalah graf yang diperoleh dari graf G dengan menyisipkan beberapa titik pada beberapa sisi di graf G (Mirajkar dkk., 2016).



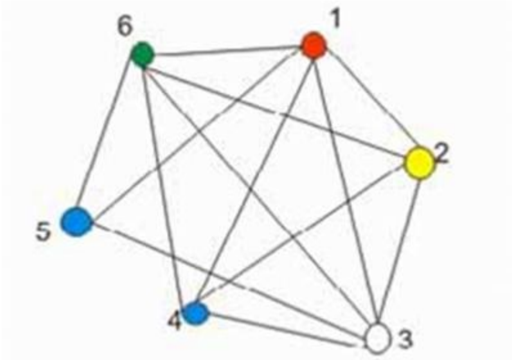
Gambar 10. Contoh graf bintang ganda ($S_{5,5}$) dengan subdivisi satu titik

Pada Gambar 10, graf tersebut telah disubdivisi satu titik pada sisi yang menghubungkan dua graf bintang (S_5), yang dinotasikan dengan ($S^*_{5,5}$).

2.4. Bilangan Kromatik Lokasi Graf

Bilangan kromatik lokasi graf pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk. pada tahun 2002. Konsep ini merupakan pengembangan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan graf.

Pewarnaan titik pada graf adalah $c: V(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots , k\}$ dengan syarat untuk setiap dua titik yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda. Minimum banyaknya warna yang digunakan untuk pewarnaan titik pada graf disebut bilangan kromatik, yang dinotasikan $\chi(G)$.



Gambar 11. Contoh bilangan kromatik dengan $\chi(G) = 6$

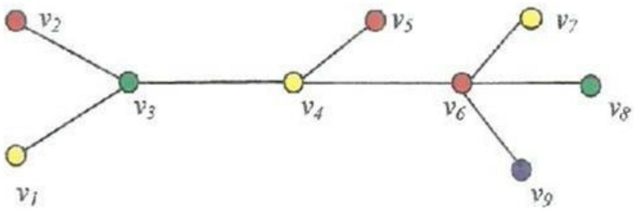
Berikut ini diberikan definisi bilangan kromatik lokasi graf yang diambil dari Chartrand, dkk. (2002). Misalkan c suatu pewarnaan titik pada graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan C_i himpunan titik-titik yang diberi warna i, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \dots , C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna $V(G)$. Kode warna $C_\pi(v)$ dari v adalah k-pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots , d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = min\{d(v, x) |\, x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi G. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G, dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Karena setiap pewarnaan lokasi juga merupakan pewarnaan titik, maka $\chi(G) \leq \chi_L(G)$.

Teorema 2.1 (Chartrand dkk., 2002) Misal c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika u dan v adalah dua titik pada graf G sedemikian sehingga $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G)\backslash\{u,v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Dalam hal khusus, jika u dan v adalah titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti: misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi dari titik-titik G ke dalam kelas warna C_i. Untuk titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π. Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G)\backslash\{u,v\}$ maka $d(u, C_j) = d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $C_\Pi(u) = C_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi $c(u) \neq c(v)$. ■

Akibat 2.1 (Chartrand dkk., 2002) Jika G adalah suatu graf terhubung yang memuat suatu titik yang bertetangga dengan k daun di G, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Bukti: misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun $x_1, x_2, \dots, x_k$ di G. Berdasarkan Teorema 2.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai pewarnaan yang berbeda untuk setiap x_i, $i = 1, 2, \dots, k$. Karena v bertetangga dengan semua x_i, maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibatnya, $\chi_L(G) \geq k + 1$. ■



Gambar 12. Pewarnaan lokasi minimum pada graf G

Diberikan graf G seperti terlihat pada Gambar 8 akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi dan graf G. Karena terdapat titik v_6 yang memiliki 3 daun, maka berdasarkan Akibat 3.1, $\chi_L(G) \geq 4$ ... (2.1.1)

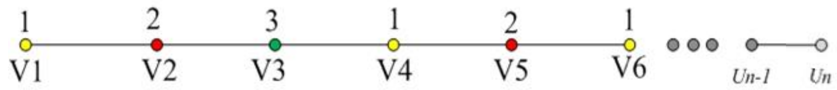
Selanjutnya, akan ditentukan batas atas bilangankromatik lokasi graf G. Titik-titik pada $V(G)$ dipartisi sebagai berikut:

$C_1 = \{v_1, v_4, v_7\}; C_2 = \{v_2, v_5, v_6\}; C_3 = \{v_3, v_8\}; C_4 = \{v_9\}$. Kode warnanya adalah $c_\Pi(v_1) = (0,2,1,4)$; $c_\Pi(v_2) = (2,0,1,4); c_\Pi(v_3) = (1,1,0,3); c_\Pi(v_4) = (0,1,1,2); c_\Pi(v_5) = (1,0,2,3); c_\Pi(v_6) = (1,0,1,1); c_\Pi(v_7) = (0,1,2,2); c_\Pi(v_8) = (2,1,0,2); c_\Pi(v_9) = (2,1,2,0)$. Karena kode warna semua titik V(G) berbeda, maka pewarnaan tersebut merupakan pewarnaan lokasi dengan $\chi_L(G) \leq 4$ … (2.1.2) ■

Berdasarkan persamaan (2.1.1) dan (2.1.2) maka $\chi_L(G) = 4$.

Teorema 2.2 (Chartrand dkk., 2003) Misalkan *k* adalah derajat maksimum di graf G maka $\chi_L(G) \leq k + 1$.

Teorema 2.3 (Chartrand dkk, 2002) Bilangan kromatik lokasi graf lintasan $P_n (n \geq 3)$ adalah 3.

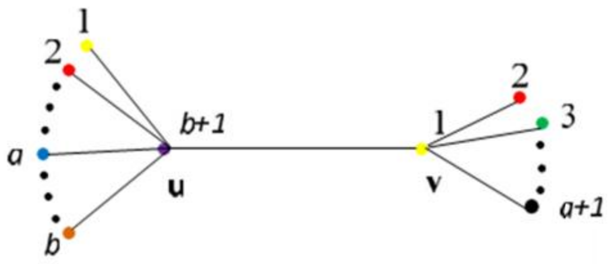


Gambar 13. Pewarnaan lokasi minimum pada graf lintasan P_n

Bukti: Perhatikan bahwa $\chi_L(P_1) = 1$ dan $\chi_L(P_2) = 2$. Jelas bahwa $\chi_L(P_n) \geq 3$ untuk n ≥ 3. Berdasarkan Teorema 2.2 $\chi_L(G) \leq k + 1$, dengan *k* derajat titik maksimum. Karena pada $P_{n,k} = 2$ maka $\chi_L(P_n) \leq 2 + 1$. Akibatnya $\chi_L(P_n) \leq$

3. Jadi terbukti $\chi_L(P_n) = 3$. ■

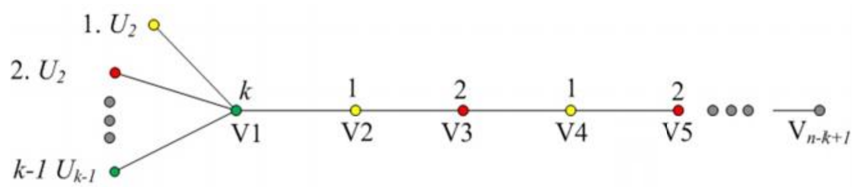
Teorema 2.4. (Chartrand dkk., 2002) Untuk bilangan bulat a dan b dengan $1 \leq a \leq b$ dan ≥ 2 $\chi_L(S_{a,b}) = b + 1$.



Gambar 14. Pewarnaan lokasi minimum pada $S_{a,b}$

Bukti: berdasarkan Akibat 2.1, diperoleh batas bawah yaitu $\chi_L(S_{a,b}) \geq b + 1$. Selanjutnya, akan ditentukan batas atasnya, yaitu $\chi_L(S_{a,b}) \leq b + 1$. Misalkan c adalah pewarnaan titik menggunakan $(b + 1)$ warna sebagaimana terlihat pada Gambar 14. Perhatikan bahwa kode warna dari setiap titik $S_{a,b}$ berbeda, akibatnya c adalah pewarnaan lokasi. Jadi $\chi_L(S_{a,b}) = b + 1$. ■

Teorema 2.5 Terdapat pohon dengan berorde $n \geq 5$ yang mempunyai bilangan kromatik k jika dan hanya jika $k \in \{3,4, \ldots, n-2, n\}$.



Gambar 15. Pohon T dari orde n dengan $\chi_L(T) = k$

Teorema 2.5 (Welyyanti, 2014) untuk setiap i, misal G_i adalah suatu graf terhubung dan misalkan $H = \bigcup_{i=1}^{m} G_i$. Jika $\chi'_L(H) < \infty$, maka $q \leq \chi'_L(H) \leq r$, dimana $q = \max\{\chi_L(G_i): i \in [1, m]\}$ dan $r = \min\{|V(G_i)|: i \in [1, m]\}$.

Bukti: Karena $q = \max\{\chi_L(G_i) | i \in [1, m]\}$, maka terdapat suatu bilangan bulat $k \in [1, m]$ sedemikian sehingga $\chi_L(G_k) = q$. Itu berarti bahwa setiap pewarnaan lokasi graf H harus memiliki paling sedikit q warna di setiap komponen dari H. Sehingga, $\chi'_L(H) \geq q$. Selanjutnya, akan ditunjukkan batas atas dari $\chi'_L(H)$. Karena $r = \min\{|G_i| i \in [1, m]\}$, maka terdapat suatu bilangan bulat $k \in [1, m]$ sedemikian sehingga $\chi_L(G_k) = r$. Itu berarti bahwa pewarnaan lokasi dari H harus memiliki paling banyak r warna di setiap komponen dari H. Sehingga, $\chi'_L(H) \leq r$. ∎

Teorema 2.6 (Welyyanti, 2014) Misalkan $H = \bigcup_{i=1}^{t} P_{n_i}$, $r = min\{n_i | i \in [1, t]\}$, jika $\chi' L\ (H) < \infty$, maka $3 \leq \chi'_{\mathrm{L}}(\mathrm{H}) \leq \mathrm{r}$. Secara khusus, $\chi'_{\mathrm{L}}(\mathrm{H}) = 3$ disebabkan oleh $t = 1,2$ atau 3.

Bukti: bagian pertama merupakan akibat langsung dari Teorema 2.5. Sekarang, akan dibuktikan bagian kedua. Asumsikan $\chi'_{\mathrm{L}}(\mathrm{H}) = 3$. Maka $t \leq 3$. Karena jika tidak, akan ada 3 titik dominan, suatu kontradiksi. Misal $V(H) = V(P_{n_1}) \cup V(P_{n_2}) \cup V(P_{n_3})$, dimana $V(P_{n_1}) = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_1}\}$, $V(P_{n_2}) = \{y_1, y_2, \dots, y_{n_2}\}$ dan $V(P_{n_3}) = \{z_1, z_2, \dots, z_{n_3}\}$. Sekarang, misalkan pewarnaan $c : V(H) \rightarrow \{1,2,3\}$ sedemikian sehingga

$$c(x_1) = c(y_2) = c(z_1) = 1,$$

$$c(x_2) = c(y_1) = c(z_3) = 2,$$

$$c(x_3) = c(y_3) = c(z_2) = 3;$$

Untuk $k \in [4, n_1], l \in [4, n_2] dan\ m \in [4, n_3]$, definisikan

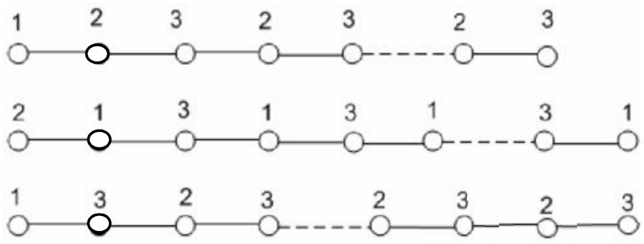
$$c(x_k) = \begin{cases} 2, jika\ k\ genap, \\ 3, jika\ k\ ganjil; \end{cases}$$

$$c(y_1) = \begin{cases} 1, jika\ l\ genap; \\ 3, jika\ l\ ganjil; \end{cases}$$

$$c(z_m) = \begin{cases} 3, jika\ n\ \ genap, \\ 2, jika\ n\ \ ganjil. \end{cases}$$

Misal $\Pi = \{C_1, C_2, C_3\}$ menjadi partisi yang diinduksi oleh c. Selanjutnya akan ditunjukkan kode warna dari semua titik yang berbeda (lihat Gambar 16). Pada gambar tersebut menunjukkan $c_\pi(x_1) = (0,1,2)$, $c_\pi(x_2) = (1,0,1), c_\pi(x_3) = (2,1,0), c_\pi(y_1) = (1,0,2), c_\pi(y_2) = (0,1,1), c_\pi(y_3) = (1,2,0), c_\pi(z_1) = (0,2,1), c_\pi(z_2) = (1,1,0), c_\pi(z_3) = (2,0,1)$. Untuk $k \in [4, n_1], c_\pi(x_k) = (k-1,0,1)$ jika k genap dan $c_\pi(x_k) = (k-1,1,0)$ jika k ganjil. Untuk $l \in [4, n_2], c_\pi(y_1) = (0, l-1,1)$ jika l genap dan $c_\pi(y_l) = (1, l-1,0)$ jika l ganjil. Untuk $m \in [4, n_2], c_\pi(z_m) = (m-1,1,0)$ jika m genap dan $c_\pi(z_m) = (m-1,0,1)$ jika m ganjil.

Sehingga, semua titik memiliki kode warna yang berbeda. Hal tersebut menyebabkan, $\chi'_L(H) \leq 3$. Jika $t \geq 2$, maka batas pewarnaan c disesuaikan dengan komponen. Jadi, $\chi'_L(H) = 3$ untuk $t = 1,2$ atau 3. ∎



Gambar 16. Pewarnaan lokasi pada $H = P_{n_1} \cup P_{n_2} \cup P_{n_3}$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2016/2017 bertempat di Gedung Matematika, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang dilaksanakan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi graf tak terhubung pada graf bintang ganda dan subdivisinya adalah sebagai berikut:

1. Menganalisa teorema-teorema yang berkaitan dengan bilangan kromatik dari graf terhubung dan graf tak terhubung.
2. Menentukan bilangan kromatik lokasi dari gabungan beberapa graf bintang ganda.
3. Membuktikan bilangan kromatik lokasi dari gabungan beberapa graf bintang ganda dengan menggunakan batas atas dan batas bawah.
4. Memperluas graf pada langkah 3 dengan cara melakukan subdivisi pada sisi-sisi tertentu sedemikian sehingga bilangan kromatik lokasinya tetap.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan dapat diperoleh kesimpulan bahwa bilangan kromatik lokasi graf tak terhubung yang setiap komponennya graf bintang ganda, $S^*_{n,n}$ adalah $n + 1$. Graf $S^*_{n,n}$ dapat diperluas dengan menambahkan subdivisi pada sisi-sisi tertentu dengan nilai bilangan kromatik lokasinya tetap.

5.2. Saran

Pada penelitian ini penulis menggunakan graf tak terhubung dari graf bintang ganda dan beberapa subdivisinya. Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf pohon yang lain dan subdivisinya.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati, Assiyatun, H. and Baskoro, E.T. 2011. Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars. *ITB J.Sci.* 43A(1): 1-8.

Asmiati, Assyiyatun H., Baskoro, E.T., Suprijanto, D., Simanjuntak, R., Uttunggadewa, S. 2012. The Locating-Chromatic Number of Firecracker Graphs. *Far East Journal of Mathematical Science.* 63(1): 11-23.

Asmiati, Baskoro, E.T. 2012. Characterizing All Graphs Containing Cycles with Locating-Chromatic Number 3. *AIP Conf. Proc.* 1450: 351-357.

Asmiati, Baskoro, E.T. 2013. Characterizing All Trees with Locating-Chromatic Number 3. *Electric Journal of Graph Theory and Application.* 1(2): 109 117.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J. dan Zhang, P. 2002. The Locating Chromatic Number of a Graph. *Bull Inst. Combin. Appl.* 36: 89 101.

Chartrand, G., Erwin, D., Slater, P.J. Zhang, P. 2003. Graphs of Order n with Locating-Chromatic Number n-1. *Discrete Mathematics*. 269: 65-79

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science.* Prentice Hall of India Private Limited.

Mirajkar, K.G., Doddamani, B.R., and Priyanka, 2016. The Reformulated First Zagreb Index of The Line Graphs of the Subdivision Graph for Class of Graphs. *International Journal of Engineering Sciences and Research Technology.* **5**(10):144-149.

Welyyanti, D., Baskoro, E.T., Simanjuntak, R., Utunggadewa, S. 2014. The Locating-Chromatic Number of Disconnected Graphs. *For East Journal of Mathematical Sciences.* 94(2):169-182.