PENDUGAAN SELANG KEPERCAYAAN

PADA PENDUGAAN AREA KECIL

(Skripsi)

Oleh

DESTI RESTIANA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

ABSTRAK

PENDUGAAN SELANG KEPERCAYAAN PADA PENDUGAAN AREA KECIL

Oleh

Desti Restiana

Pendugaan area kecil didefinisikan sebagai suatu teknik statistika untuk menduga parameter subpopulasi yang ukuran sampelnya kecil. Pendugaan parameter dalam statistika inferensia dibagi menjadi dua, yaitu pendugaan titik dan pendugaan selang. Penelitian ini difokuskan pada pendugaan selang kepercayaan pada model berbasis area dengan metode langsung dan metode Cox serta metode EBLUP sebagai penduga titiknya. Masing-masing metode disimulasikan dalam model dua tahap Fay Herriot dengan peubah penyerta. Evaluasi dari masing –masing metode berdasarkan nilai rata-rata panjang selang (AL) terpendek dan nilai peluang tercakup (CP) yang mendekati 95%. Hasil simulasi menunjukan bahwa penduga dengan metode EBLUP bersifat bias namun memiliki bias yang kecil dan penduga selang dengan metode Cox menghasilkan rata-rata panjang (AL) lebih pendek dibandingkan metode langsung dengan nilai peluang tercakup (CP) akan mendekati 95% untuk nilai A = 1 pada metode Cox dan nilai A ≤ 1 pada metode langsung.

Kata kunci: Area Kecil, Selang Kepercayaan, Metode Langsung, Metode Cox, EBLUP

ABSTRACT

CONFIDENCE INTERVAL ESTIMATION IN SMALL AREA ESTIMATION

By

Desti Restiana

Estimation of small area is defined as a statistical technique to estimate parameters of subpopulation that the sample size is small. In satistical inference, there are two kinds of parameter estimation, namely the point estimation and interval estimation. This research focused on contructing confidence interval estimation based on area model with direct method and Cox mehod and EBLUP as point estimator. Each method is simulated under two conditions Fay Herriot model with auxiliary variables. Evaluation of each method based on the smallest average lenght (AL) and coverage probability (CP) approach 95%. The result of simulation showed that EBLUP esimator is biased but the bias is small and confidence interval with Cox method produced smallest average lenght then direct method with coverage probability (CP) will approach 95% for A=1 on Cox method and A≤1 for direct method.

Key Words: Small Area, Confidence Interval, Direct Method, Cox Method, EBLUP.

PENDUGAAN SELANG KEPERCAYAAN

PADA PENDUGAAN AREA KECIL

Oleh

DESTI RESTIANA

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Skripsi : **PENDUGAAN SELANG KEPERCAYAAN PADA PENDUGAAN AREA KECIL**

Nama Mahasiswa : Desti Restiana

Nomor Pokok Mahasiswa : 1217031019

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Widiarti, M.Si.
NIP 19800502 200501 2 003

Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.
NIP 19570101 198403 1 020

2. Ketua Jurusan Matematika

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Widiarti, M.Si.** ....
Sekretaris	: **Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.** ....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Ir. Warsono, Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **27 Desember 2016**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Desti Restiana**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1217031019**
Judul	: **Pendugaan Selang Kepercayaan pada Pendugaan Area Kecil**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, Januari 2017

Penulis,

METERAI TEMPEL 84C8BAEF137744177 6000 ENAM RIBU RUPIAH

Desti Restiana
1217031019

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 25 Desember 1992 di Desa Sukoharjo 3, Kecamatan Sukoharjo, Kabupaten Pringsewu, sebagai anak pertama dari tiga bersaudara pasangan Bapak Sajad dan Ibu Marliah.

Penulis telah menyelesaikan jenjang pendidikan mulai dari Pendidikan Taman Kanak-Kanak di TK Dharma Wanita lulus pada tahun 1999, Sekolah Dasar (SD) Negeri 3 Sukoharjo 3 diselesaikan pada tahun 2005, Sekolah Menengah Pertama (SMP) Negeri 1 Sukoharjo diselesaikan pada tahun 2008, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) Negeri 1 Pringsewu diselesaikan pada tahun 2011.

Tahun 2012 penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN. Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif diberbagai organisasi kemahasiswaan tingkat jurusan dan fakultas diantaranya pernah menjabat sebagai Anggota Gematika 2012-2013, Anggota Muda ROIS FMIPA tahun 2012-2013, Anggota Biro Dana dan Usaha HIMATIKA periode 2013-2014, Anggota Departemen Hubungan Luar Pengabdian Masyarakat (HLPM) BEM FMIPA unila periode 2013-2014, dan Sekertaris Biro Dana dan Usaha HIMATIKA periode 2014-2015.

Pada tahun 2015 penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di Kantor Badan

Perencanaan Pembangunan Daerah (BAPPEDA) Provinsi Lampung. Sebagai bentuk pengabdian mahasiswa, penulis telah melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Wonokerto, Kecamatan Tulang Bawang Tengah, Kabupaten Tulang Bawang Barat, Provinsi Lampung.

MOTTO

"Karena Sesungguhnya bersama setiap kesulitan ada kemudahan"
(Al-Insyirah:5)

"Bukan apa yang telah kuterima dari orang lain tetapi apa yang telah kuberi kepada mereka, karena memberi sesuatu yang bermanfaat bagi orang lain adalah satu kebanggaan dalam hidup"
(Anonim)

"Hiduplah seperti kamu akan mati esok dan berbahagialah seperti kamu akan hidup selamanya"

(B.J. Habibie)

PERSEMBAHAN

Dengan penuh rasa syukur kehadirat Allah SWT, kupersembahkan karya kecil ini untuk :

Orang Tua tercinta yang selalu sabar membimbing, mendoakan, memberi semangat serta menjadi motivasi terbesar selama ini

Adik-adikku tercinta (Reni dan Vera) yang selalu memberi keceriaan dalam hari-hariku

Dosen Pembimbing dan Penguji yang sangat berjasa dalam mengarahkan, membimbing, menasihati, dan memberi motivasi kepada penulis

sahabat-sahabat tercinta yang selalu ada. Terima kasih atas kebersamaan, keceriaan, semangat, serta motivasi yang diberikan.

Almamater kebanggaan Universitas Lampung

SANWACANA

Syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena atas berkat rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Skripsi yang berjudul "Pendugaan Selang Kepercayaan pada Pendugaan Area Kecil" disusun sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) di Universitas Lampung. Dalam kesempatan ini rasa terima kasih yang setulus-tulusnya penulis ucapkan kepada:

1. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing I yang selalu mengarahkan, membimbing dan memotivasi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Mustofa Usman, Ph.D. selaku dosen pembimbing II, terima kasih untuk bimbingan dan masukannya selama penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Ir. Warsono, Ph.D. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan nasehatnya dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Ibu Wamiliana, Ph.D. selaku Pembimbing Akademik atas bimbingan dan pembelajarannya selama ini.
5. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., P.h.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D. selaku Dekan FMIPA Universitas

Lampung.

7. Seluruh Dosen dan staf Jurusan Matematika yang telah memberikan Ilmu dan bantuan yang berguna bagi penulis.
8. Orang tua tercinta yang senantiasa mendoakan, menyayangi, memberi semangat dan nasehat, serta adik Reni dan Vera yang selalu menghibur saat suka duka.
9. Sahabat – sahabat seperjuangan Ernia, Yanti, Imah, Riyama, Dwi, Hana, Elva, Ica, Maya, Agnes, Anggi, Ratih, Selvi, Ompu, Oci, Audi, Erni, Angger, Anwar, Candra, Danar, Geri, Jorgi, Pras, Rendi, Topik, terimakasih atas kebersamaan, doa, dan ilmunya.
10. Keluarga KKN Desa Wonokerto Kec. Tulang Bawang Tengah Mput, Eki, Manda, Tari, Ulul.
11. Teman – Teman angkatan 2012 yang tidak dapat disebutkan satu persatu dan Keluarga besar HIMATIKA 2014-2015.
12. Seluruh pihak yang telah membantu yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, atas dukungan dan doanya selama penyelesaian skripsi ini.

Bandar Lampung, Januari 2017
Penulis

Desti Restiana

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR .... **xi**
DAFTAR TABEL .... **xii**

I. PENDAHULUAN
1.1. Latar Belakang dan Masalah 1
1.2. Tujuan Penelitian 3
1.3. Manfaat Penelitian 3

II. TINJAUAN PUSTAKA
2.1 Pendugaan Area Kecil 4
2.1.1 Model Berbasis Area 4
2.1.2 Model Berbasis Unit 6
2.2 Model Fay Herriot 6
2.3 Penduga EBLUP 7
2.4 Pendugaan Parameter 8
2.5 Metode Pendugaan Selang pada Area Kecil 9
2.5.1 Metode Langsung (*Direct Method*) 10
2.5.2 Penduga Selang dengan Metode Cox 10
2.6 Metode *Maximum Likelihood* 11
2.7 Penduga Ragam REML 12

III. METODOLOGI PENELITIAN
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 15
3.2 Data Penelitian 15
3.3 Metode Penelitian 15

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN
4.1 Distribusi Marginal Bagi y 17
4.2 Pendugaan Parameter dengan Metode EBLUP 19
4.3 Pendugaan Parameter β 21
4.4 Pendugaan Selang dengan Metode Cox pada Model Fay Herriot 22

4.5 Selang Kepercayaan pada Data Simulasi 25

V. KESIMPULAN
5.1 Kesimpulan.. 36

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

4.1 Penduga Bagi β = 0.25 26
4.2 Penduga Bagi β = 0.5 26
4.3 Penduga Bagi β = 0.75 26
4.4 Penduga Bagi β = 1 27
4.5 Penduga Bagi β = 1.25 27
4.6 Selang Kepercayaan untuk Jumlah Area = 10 30
4.7 *Coverage Probability* (CP) untuk Jumlah Area = 10........................... 31
4.8 Selang Kepercayaan untuk Jumlah Area = 30 32
4.9 *Coverage Probability* (CP) untuk Jumlah Area = 30........................... 33
4.10 Selang Kepercayaan untuk Jumlah Area = 50 34
4.11 *Coverage Probability* (CP) untuk Jumlah Area = 50........................... 35

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

1. Hasil Simulasi Penduga Bagi β 25
2. Hasil Simulasi Penduga EBLUP dan Bias Bagi $\hat{\theta}^{EBLUP}$ 28
3. Selang Kepercayaan dari Data Simulasi yang Menyebar Normal dengan $D_i = 1$ 29

1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Survei Sosial Ekonomi Nasional (Susenas) yang dilakukan oleh BPS biasanya didesain untuk skala nasional. Artinya, survei ini dirancang untuk inferensia bagi daerah (domain) yang luas. Persoalan yang muncul adalah ketika dari survey ini ingin diperoleh informasi untuk area yang lebih kecil, misalnya informasi pada level kabupaten, kecamatan atau bahkan desa. Dalam survei ini area yang dimaksud mungkin saja direpresentasikan oleh objek survey yang jumlahnya sangat kecil sehingga analisis yang hanya didasarkan oleh objek – objek tersebut menjadi kurang akurat. Untuk mengatasinya diperlukan metode pendugaan yang menggabungkan antara informasi di dalam area yang dimaksud dengan informasi di luar area.

Pendugaan area kecil (*small area estimation*) merupakan suatu teknik statistika untuk menduga parameter subpopulasi yang ukuran sampelnya kecil. Teknik ini memanfaatkan data dari domain besar untuk menduga parameter pada domain yang lebih kecil. Pendugaan sederhana pada area kecil yang didasarkan pada penerapan model desain penarikan sampel (*design-based*) disebut sebagai pendugaan langsung (*direct estimation*). Dalam konteks survei, penduga dikatakan langsung (*direct estimation*) apabila pendugaan terhadap parameter populasi di suatu area hanya didasarkan pada data sampel yang diperoleh dari area tersebut. Karakteristik dari penduga yang diperoleh merupakan penduga tak bias tetapi memiliki ragam yang besar karena diperoleh dari ukuran sampel yang kecil.

Pendugaan tak langsung (*indirect estimation*) merupakan salah satu upaya untuk menekan ragam yang besar pada area kecil yaitu dengan memanfaatkan informasi dari area sekitarnya. Berdasarkan ketersediaan datanya, model small area terbagi menjadi model area level (model Fay Herriot) dan model unit level. Dalam penelitian ini, model yang akan digunakan adalah model Fay-Herriot. Model ini memperhatikan pengaruh acak area yang digunakan untuk menghubungkan rataan area kecil dengan vektor peubah penyerta dan pengaruh sampling *error* yang diasumsikan diketahui $e_i \sim N(0, D_i)$.

Metode pendugaan yang dapat digunakan dalam model Fay Harriot yaitu E*mpirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP), *Empirical Bayes* (EB), dan *Hierarchical Bayes* (HB). Metode EBLUP merupakan metode penduga area kecil yang cocok digunakan pada data kontinu. Penduga EBLUP menghasilkan penduga yang berbias namun memiliki ragam yang kecil. keragaman dalam model Fay-Herriot dibagi menjadi dua, yaitu keragaman di dalam area yang diasumsikan diketahui dan keragaman pengaruh acak *small area* yang tidak diketahui dan diduga dari distribusi marginal y (Li, 2007). Terdapat beberapa metode dalam menduga nilai ragam pengaruh acak, diantaranya adalah metode *maximum likelihood estimation* (MLE) *dan restricted maximum likelihood* (REML). Jiang (1996) memperlihatkan bahwa ketika jumlah area kecil terbatas, metode MLE kurang baik digunakan, dan sebaliknya pendugaan ragam pengaruh acak pada model linear campuran dengan menggunakan REML akan menghasilkan penduga yang konsisten.

Di dalam statistika inferensia, terdapat dua jenis pendugaan parameter, yaitu pendugaan titik dan pendugaan selang. Penduga titik merupakan sebuah nilai yang diperoleh dari sampel dan digunakan sebagai penduga dari parameter yang nilainya tidak diketahui. Pada pendugaan selang, kesimpulan tentang suatu nilai tengah populasi terletak diantara suatu selang. Dalam pendugaan area kecil terdapat beberapa metode pendugaan selang, diantaranya adalah metode langsung dan metode Cox. Pada penelitian ini dipusatkan penyusunan pendugaan selang pada model berbasis area dengan menggunakan metode langsung dan metode Cox serta metode EBLUP sebagai penduga titiknya .

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah memperoleh penduga selang kepercayaan pada pendugaan area kecil dengan metode langsung dan metode Cox.

1.3 Manfaat penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah untuk menambah pengetahuan peneliti dan pembaca tentang metode penduga selang kepercayaan pada *small area estimation.*

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pendugaan Area Kecil

Pendugaan Area Kecil (*Small Area Estimation*) merupakan metode yang digunakan untuk menduga parameter yang berasal dari area atau sub populasi dengan ukuran sampel yang kecil. Istilah area kecil biasanya menandakan suatu area geografis kecil, seperti suatu daerah kecamatan, maupun kelurahan atau desa. Suatu area disebut kecil apabila sampel yang diambil tidak mencukupi untuk melakukan pendugaan langsung dengan hasil dugaan yang akurat (Rao, 2003). Menurut Rao (2003), model penduga area kecil dikelompokkan menjadi dua jenis model dasar yaitu model level area (*basic area level model*) dan model level unit (*basic unit level model*).

2.1.1 Model berbasis area

Model berbasis area level merupakan model yang didasarkan pada ketersediaan variabel penyerta yang hanya ada untuk level area tertentu, misalkan $\mathbf{X_i} = (x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{pi})^T$ dengan parameter yang akan diduga adalah θ_i yang diasumsikan mempunyai hubungan dengan $\boldsymbol{X}_i$. Variabel penyerta tersebut digunakan untuk membangun model, yaitu:

$\theta_i = x_i^T\beta + v_i$, i= 1,..., m (2.1)

dimana m adalah banyaknya area dengan $\beta = (\beta_1,....., \beta_p)^T$ merupakan vektor *p*x1 koefisien regresi untuk variabel penyerta x_i dan *v* adalah pengaruh acak area kecil yang diasumsikan berdistribusi normal $v_i \sim N(0, A)$.

Estimator θ_i dapat diketahui dengan mengasumsikan bahwa model penduga langsung telah tersedia yaitu:

$$\hat{\theta} = \theta_i + e_i \ , \quad i = 1, ..., m \tag{2.2}$$

dengan $e_i \sim N(0, D_i)$ dan D_i diketahui.

Jika model (2.1) dan (2.2) digabungkan maka akan menghasilkan model gabungan (*mixed model*) :

$$\hat{\theta} = x_i^T\beta + v_i + e_i \ , \quad i = 1, ..., m \tag{2.3}$$

Model gabungan (*mixed model*) di atas dikenal sebagai model Fay-Heriot, dimana keragaman variabel respon di dalam area kecil diasumsikan dapat diterangkan oleh hubungan variabel respon dengan informasi tambahan (variabel penyerta) yang disebut sebagai model pengaruh tetap (*fixed effect models*). Selain itu terdapat komponen keragaman spesifik area kecil yang tidak dapat diterangkan oleh informasi tambahan (variabel penyerta), kemudian disebut sebagai komponen pengaruh acak area kecil (*random effect*). Gabungan dari dua asumsi tersebut membentuk model pengaruh campuran atau model linier campuran (Kurnia, 2009).

2.1.2 Model berbasis unit

Pada model pendugaan area kecil berbasis unit diasumsikan bahwa data variabel penyerta unit $x_{ij}^{T}=(x_{ij1},x_{ij2},....,x_{ijp})^{T}$ tersedia untuk setiap elemen ke-*j* pada area ke-*i*. Selanjutnya variabel respon y_{ij} diasumsikan berkaitan dengan x_{ij} sehingga bentuk persamaan model pendugaan area kecil berbasis unit adalah:

$Y_{ij} = x_{ij}^{T}\beta + e_{ij} + v_i$ j=1, 2, ..., m, i = 1, 2 ,...., n

Dimana v_i merupakan pengaruh acak area, β merupakan koefisien dan diasumsikan $E(e_{ij}) = 0$ dan $Var(e_{ij}) = \sigma_u^2$ (Rao, 2003).

2.2 Model Fay-Herriot

Model Fay-Herriot adalah model yang banyak digunakan dalam pendugaan area kecil dan merupakan model campuran linear. Fay and Harriot (1979) menggunakan model dua level :

Level 1 : $y_i | \theta_i \sim N(\theta_i , D_i)$

Level 2 : $\theta_i \sim N(x_i^T \beta , A)$

Model ini digunakan untuk menduga pendapatan perkapita untuk area kecil di Amerika Serikat dengan populasi kurang dari 1000. Model dua level ini dapat ditulis sebagai model linear campuran sebagai berikut :

$y_i = \theta_i + e_i = x_i^T \beta + v_i + e_i$ i=1,2,3,...,m (2.4)

dimana $v_i \sim N(0, A)$ dan $e_i \sim N(0, D_i)$.

Parameter β dan A umumnya tidak diketahui dan diduga dari sebaran marginal y. Ragam sampel D_i biasanya diasumsikan diketahui (Li, 2007).

2.3 Penduga EBLUP

Model dasar pendugaan kecil oleh Fay-Herriot (1979) menjadi dasar dalam pengembangan pendugaan area kecil berbasis model. Jika $\theta_i = x_i^T\beta + v_i$ adalah parameter yang menjadi perhatian dan y_i adalah nilai pendugaan langsung berdasarkan rancangan survei, maka $y_i = \theta_i + e_i$ dimana e_i adalah *sampling error* dan v_i adalah pengaruh acak area kecil. Model tersebut dapat ditulis menjadi

$$y_i = x_i^T\beta + v_i + e_i$$

dengan v_i dan e_i saling bebas serta $v_i \sim N(0, A)$ dan $e_i \sim N(0, D_i)$ untuk i = 1, .., m. Diasumsikan bahwa $\underline{\beta}$ dan A (keragaman antar area kecil) tidak diketahui, tetapi D_i (keragaman karena *sampling error*) untuk i = 1, 2, ..., m diketahui.

Penduga terbaik (*best predictor*) bagi $\theta_i = \underline{x}_i^T\underline{\beta} + v_i$ jika $\underline{\beta}$ dan A diketahui adalah

$$\hat{\theta}_i^{BP} = x_i^T\beta + (1 - B_i)(y_i - x_i^T\beta)$$

Dengan $B_i = D_i/(A + D_i)$ untuk i=1, 2, ..., m.

Jika A diketahui, $\underline{\beta}$ dapat diduga dengan metode *maximum likelihood esimation* yaitu $\beta_i = (X^TV^{-1}X)^{-1}X^TV^{-1}Y$ dan dengan mensubtitusi β oleh $\hat{\beta}_i$ pada $\hat{\theta}_i^{BP}$, maka diperoleh

$$\hat{\theta}_i^{BLUP} = x_i^T\hat{\beta}_i + (1 - B_i)(y_i - x_i^T\hat{\beta}_i)$$

$$\hat{\theta}_i^{BLUP} = (1 - B_i)\, y_i + B_i x_i^T\hat{\beta}_i$$

Dalam praktik, baik β atau A biasanya tidak diketahui sehingga untuk kasus pendugaan θ_i dengan *best linear unbiased predictor* (BLUP), A terlebih dahulu harus diduga. Untuk menduga A dapat digunakan metode kemungkinan maksimum (MLE), metode kemungkinan maksimum terkendala (*restricted maximum likelihood*, REML), metode *adjusted for density maximization* atau metode momen. Dengan mensubtitusi β oleh $\hat{\beta}$ dan A oleh $\hat{A}$ terhadap penduga BLUP, maka diperoleh penduga

$$\hat{\theta}_i^{EBLUP} = x_i^T\hat{\beta}_i + (1-\hat{B}_i)(y_i - x_i^T\hat{\beta}_i)$$

$$\hat{\theta}_i^{EBLUP} = (1-\hat{B}_i)\, y_i + \hat{B}_i x_i^T\hat{\beta}_i \tag{2.5}$$

yang kemudian dikenal sebagai *empirical best linear unbiased predictor* (EBLUP) (Rao, 2003).

2.4 Pendugaan Parameter

Definisi 2.4.1 Misal $X_1, X_2, ..., X_n$ sampel acak X berdistribusi bebas stokastik identik dengan fungsi kepekatan peluang f(x,θ) $\theta \in \Omega$. Suatu statistik $T(X_1, X_2, ..., X_n) = \hat{\theta}$ yang digunakan untuk menduga θ disebut sebagai penduga titik bagi θ.

Definisi 2.4.2 Misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ sampel acak X dengan fungsi kepekatan peluang f(x,θ), $\theta \in \Omega$ dan α merupakan suatu bilangan yang ditetapkan sebelumnya antara 0 dan 1. Misalkan $L = l(X_1, X_2, ..., X_n)$ dan $U = u(X_1, X_2, ..., X_n)$ adalah dua statistik yang memenuhi $L \leq U$, maka selang (L,U) adalah $(1-\alpha)$100% selang kepercayaan untuk θ jika $1-\alpha = P_\theta[\theta \in (L,U)]$ (Hogg and Craig, 1995).

Penduga yang baik adalah yang memenuhi sifat tertentu, diantaranya adalah sifat tak bias. Adapun definisi takbias suatu penduga adalah sebagai berikut :

Definisi 2.4.3 (Takbias) Seandainya Y_1, Y_2, Y_3 merupakan sampel acak dari fungsi kepekatan peluang kontinu $f_y(y;\theta)$, dimana θ merupakan parameter yang tidak diketahui. Penduga $\hat{\theta} = [h(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)]$ dikatakan takbias bagi θ, jika $E(\hat{\theta}) = \theta$.

(Larsen dan Marx, 2012).

Dalam pendugaan selang untuk menentukan selang dugaan yang baik, terdapat dua hal yang dapat dipertimbangkan yaitu :

1. Peluangnya kecil bahwa selang akan memuat nilai yang salah atau selang memiliki peluang tercakup (*coverage probabability*) yang besar. *Coverage probability* dari dugaan selang dilambangkan dengan

   $P_\theta[\theta \in (L, U)] = P_\theta[L \le \theta \le U]$

   Ini berarti bahwa peluang selang [L,U] memuat nilai θ yang benar.
2. Lebar selang yang paling pendek.

2.5 Metode Pendugaan Selang pada Pendugaan Area Kecil

Pendugaan selang dari rataan area kecil $\theta_i = x_i^T \beta + v_i$ dapat diduga dengan menggunakan beberapa metode yaitu metode langsung, metode sintetik, metode cox, metode *bootstrap* parametrik dengan penduga REML dan metode *bootstrap* parametrik dengan penduga *adjusted for density maximization* (ADM) atau metode momen. Dalam penelitian ini hanya akan digunakan dua metode pendugaan selang yaitu metode langsung dan metode cox. Selang kepercayaan (1-α)100% pada area kecil mengikuti Normal-teory EB interval :

$$I(\alpha) : [\hat{\theta}^{EB} \pm z_{\alpha/2}\, s(\hat{\theta}^{EB})] \qquad (2.6)$$

$z_{\alpha/2}$ merupakan *upper* $\alpha/2$ *point* dari N(0,1), $s(\hat{\theta}^{EB})$ = penduga *standar error*. Morris (1983) menggunakan ragam dari posterior sebagai penduga *standar error*.

2.5.1 Metode Langsung (*Direct Method*)

Metode ini didasarkan hanya pada data (level 1) dan tidak menggunakan informasi model prior (level 2). Selang I_i disebut $(1-\alpha)100\%$ selang untuk θ_i jika $P(\theta_i \in I_i) = 1-\alpha$. Dengan mengganti $\hat{\theta}^{EB}$ dengan y_i pada persamaan (2.6) diperoleh selang kepercayaan dengan metode langsung adalah :

$$y_i \pm z\alpha_{/2}\sqrt{D_i} \qquad (2.7)$$

Dengan I_i merupakan interval pada taraf nyata α dan D_i adalah ragam sampel (Lahiri dan Yoshimori, 2014).

2.5.2 Metode Cox

Metode Cox merupakan teknik pendugaan selang yang mengkombinasikan kedua level dari model Fay-Herriot. Selang kepercayaan dengan metode Cox dirumuskan sebagai berikut :

$$\hat{\theta}_i^{EBLUP} \pm z\alpha_{/2}\, s(\hat{\theta}^{EB})$$

Dimana $s(\hat{\theta}^{EB})$ diduga dari ragam posterior dengan nilai $\sigma_i^2 = \frac{AD_i}{A+D_i}$

$B_i = \frac{D_i}{A+D_i}$ sehingga

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{AD_i}{A+D_i}} = \sqrt{D_i\left(\frac{A}{A+D_i}\right)} = \sqrt{D_i\left(1-\frac{D_i}{A+D_i}\right)} = \sqrt{D_i(1-B_i)}$$

$$\hat{\theta}_i^{EBLUP} = (1-\hat{B}_i)y_i + \hat{B}_i x_i^T \hat{\beta}_i$$

Dengan demikian diperoleh selang kepercayaan Cox yaitu

$$(1-\hat{B}_i)y_i + \hat{B}_i x_i^T \hat{\beta} \pm z\alpha_{/2}\sqrt{D_i(1-\hat{B}_i)} \qquad (2.8)$$

(Lahiri dan Yoshimori, 2014).

2.6 Metode Kemungkinan Maksimum (*Maximum Likelihood Estimation Method)*

Metode kemungkinan maksimum adalah metode untuk menduga satu sebaran dengan memilih dugaan-dugaan yang nilai-nilai parameternya diduga dengan memaksimalkan fungsi kemungkinannya.

Misalkan terdapat $x_1, x_2, ..., x_n$ dari suatu populasi yang memiliki fungsi probabilitas $f(x,\theta); \theta \in \Omega$, dimana θ merupakan suau parameter yang tidak dikeahui dan Ω merupakan ruang parameter. Karena $x_1, x_2, ..., x_n$ adalah sampel acak maka fkp bersama dari $x_1, x_2, ..., x_n$ adalah

$f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = f(x_1; \theta), f(x_2; \theta), ..., f(x_n; \theta)$

Berdasarkan Hogg and Craig (1995), fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai fkp bersama. Misalkan *likelihood* dinotasikan sebagai $L(\theta; x_1, x_2, ..., x_n) = L(\theta)$ sehingga

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) \\ &= f(x_1; \theta), f(x_2; \theta), ..., f(x_n; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) \end{aligned}$$

Dalam metode *maximum likelihood estimation* (MLE), penduga dari θ, diperoleh dengan memaksimumkan fungsi ln $L(\theta)$. Jadi, penduga dari θdapa diperoleh dengan mencari solusi dari persamaan berikut :

$$\frac{\partial Ln\ L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

2.7 Penduga Ragam dengan Metode *Restricted Maximum Likelihood* (REML)

Dalam praktik, komponen ragam antar area biasanya tidak diketahui. Untuk menduga komponen ragam antar area biasanya digunakan Metode *Maximum Likelihood* (MLE) dan *Restricted Maximum Likelihood* (REML). Ketika jumlah area kecil terbatas, MLE kurang baik. Berdasarkan Huilin Li (2007), pendugaan komponen ragam antar area dengan menggunakan REML akan menghasilkan penduga yang konsisten.

Penduga ragam dengan menggunakan REML adalah sebagai berikut :

$$\hat{A}^{REML} = \max(0, s^2 - 1) \text{ dengan } s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(y_i - \bar{y})^2}{m-1} \qquad (2.9)$$

(Li, 2007).

Ide REML adalah mempartisi *likelihood* menjadi dua komponen. Komponen pertama adalah *likelihood* dengan satu atau lebih statistik yang melibatkan semua parameter tetap seperti μ. Komponen kedua adalah kemungkinan sisa (*restricted likelihood*) dan hanya melibatkan parameter ragam pengaruh acak. Bagian yang mengandung efek acak dimaksimalkan, sehingga diperoleh penduga REML secara umum.

Fungsi *likelihood* untuk populasi berdistribusi normal dengan parameter (μ, σ^2) adalah:

$$L(y_i; \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(y_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{\sum_{i=1}^{n} -\frac{(y_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (2.10)$$

Dengan $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}[(y_i-\bar{y})+(\bar{y}-\mu)]^2$

$$= \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 + n(\bar{y}-\mu)^2 \qquad (2.11)$$

Dengan mensubtitusikan (2.11) ke persamaan (2.10) maka diperoleh fungsi *likelihood* :

$$L(y_i;\mu,\sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{2\sigma^2}+\frac{n(\bar{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \qquad (2.12)$$

Misalkan diambil sampel acak $y_1, y_2, \ldots, y_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}})$.

Fungsi *likelihood* untuk distribusi sampling $\bar{y}$ adalah

$$L(\bar{y};\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{n}}}\, e^{-\frac{(\bar{y}-\mu)^2}{2\sigma^2/n}} = \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{n(\bar{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Dengan demikian persamaan (2.12) memuat fungsi *likelihood* untuk $\bar{y}$.

Selanjutnya, fungsi *loglikelihood* pada persamaan (2.12) yaitu :

$$Ln\ L(\bar{y};\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{2\sigma^2} + \frac{n(\bar{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{2\sigma^2} - \frac{n(\bar{y}-\mu)^2}{2\sigma^2} \qquad (2.13)$$

Dengan memisalkan $n = 1 + (n-1)$, maka persamaan (2.13) dapat diurai menjadi dua komponen :

Komponen pertama untuk $\bar{y} = -\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{n(\bar{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}$

Komponen kedua penduga ragam REML =

$$-\frac{n-1}{2}\ln(2\pi) - \frac{n-1}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{2\sigma^2} \qquad (2.14)$$

Dengan memaksimumkan persamaan (2.14) terhadap σ^2, maka akan diperoleh pendugaan ragam REML :

$$\frac{\partial L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2} = -\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(\frac{n-1}{2}\ln(2\pi)\right) - \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(\frac{n-1}{2}\ln(\sigma^2)\right) - \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= 0 - \frac{(n-1)}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{2\sigma^4} \tag{2.15}$$

Kemudian persamaan (2.15) disamadengankan nol sehingga diperoleh :

$$\frac{\partial L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2} = 0$$

$$-\frac{(n-1)}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{2\hat{\sigma}^2} = 0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{2\hat{\sigma}^2} = \frac{(n-1)}{2\hat{\sigma}^2}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{(n-1)} = \hat{\sigma}^2$$

Dengan demikian, diperoleh penduga ragam dengan metode REML adalah

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{(n-1)}$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun akademik 2015/2016 bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data yang dibangkitkan melalui simulasi dari model Fay-Herriot dengan ragam sampel tiap area diasumsikan sama yaitu $D_i = 1$. Jumlah area ditetapkan sebanyak m=10, 30, dan 50 serta ragam antar area A=0,5, 1 dan 1,5. X_i adalah peubah penyerta bagi Y_i dimana dibangkitkan secara acak dan diasumsikan berdistribusi normal dengan rata-rata 10 dan ragam 1.

3.3 Metode Penelitian

Metode pendugaan selang dalam penelitian ini ada dua yaitu metode langsung dan metode Cox. Pembangkitan data dalam simulasi didasarkan pada model Fay Herriot berdasarkan persamaan (2.4).

Kebaikan model pada data simulasi dikaji melalui nilai peluang tercakup (*coverage probabiliy*, CP) dan panjang selang (*average lenght*, AL) yang didefinisikan sebagai :

$$CP_i = \frac{\sum_{i=1}^{m} [\theta_i \in I_i]}{n}$$

$$AL_i = \sum_{i=1}^{m} \text{ panjang } I_i/n$$

Dengan I_i adalah selang ke-i

i = 1,2,3, ..., m.

n = banyaknya ulangan

Langkah - langkah pendugaan selang pada data simulasi dengan ulangan sebanyak 1000 adalah:

1. Membangkitkan peubah acak X_j ~ N(10,1)

   Untuk j = 1,2, ..., 5
2. Menetapkan nilai β = 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.5
3. Membangkitkan $\theta_i \sim N(x_i^T \beta, A)$
4. Membangkitkan $y_i \sim N(\theta_i, 1)$
5. Menghitung nilai $\widehat{\beta_i} = (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} Y$
6. Menghitung nilai $\hat{A}^{REML}$ dengan rumus pada persamaan (2.9)
7. Menghitung nilai penduga $\widehat{\theta_i}^{EBLUP}$ dengan rumus pada persamaan (2.5)
8. Menghitung dugaan selang untuk A=0,5 A=1, dan A=1,5 pada masing – masing area m=10, 30, dan 50 dengan metode langsung dan metode Cox.
9. Membandingkan nilai *coverage probability* (CP) dan *average lenght* (AL) dari masing – masing selang.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan dan simulasi diperoleh kesimpulan bahwa metode Cox menghasilkan rata-rata panjang (*average lenght*) yang lebih pendek dibandingkan dengan metode langsung dengan nilai peluang tercakup (*coverage probability*) mendekati 95% untuk $A=1$ pada metode Cox dan $A\leq 1$ pada metode langsung.

DAFTAR PUSTAKA

Fay, R.E. and Herriot, R.A.1979. Estimates of Income for Small Places: An Aplication of James-Sein Procedure To Census Data. *Journal of American Staisical Association* :269-277.

Hogg, R.V. dan Craig, A. T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics*. Seventh Edition. Pearson Education, Inc., United States of America.

Jiang, J. 1996. REML estimation: Asymtotic Behavior and Related Topics. *Annals of Satistics*, **24** ,255-286.

Kurnia, A. 2009. Prediksi Terbaik Empirik Untuk Model Transformasi Logaritma Di dalam Pendugaan Area Kecil Dengan Penerapan Pada Data Susenas. (Disertasi). Sekolah Pascasarjana. Institut Pertanian Bogor, Bogor.

Lahiri, P. Dan Yoshimori, M. 2014. A Second-Order Efficient Bayes Convidence Interval. *Annals of Statistic,* **42,** No.4, 1233-1261

Larsen, Richard.J., dan Marx, M.L. 2012. *An Introduction to Mathematical Statistics and Its Appications*. Fifth Edition. Pearson Education Inc., United States of America.

Li, H. 2007. An Aplication of Parametric Bootstrap Method in Small Area Estimation Problem. ASA *Section on Survey Research Methods,* 3326-3329.

Morris, C.N. 1983. Parametric Emperical Bayes Confidence Interval. *In Scientific Inference, Data Analysis, and Robustness,* 25-50. Academic Press, Orlando, FL.

Rahman, L.O.A. 2008. Aproksimasi *Bootstrap* Parametrik Pada Pendugaan Selang Prediksi Statistik Area Kecil. (Tesis). Sekolah Pascasarjana. Institut Pertanian Bogor, Bogor.

Rao, J.N.K. 2003. *Small Area Estimation.* John Wille & Sons, Canada.