REPRESENTASI OPERATOR LINIER PADA RUANG BARISAN l_3

(Skripsi)

Oleh

RISA OKTARINA

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2017

ABSTRACT

REPRESENTATION OF LINEAR OPERATOR IN FINITE SEQUENCE SPACE l_3

by

Risa Oktarina

The mapping of vector space especially on norm space is called operator. There are many cases in linear operator from sequence space into sequence space can be represented by an infinite matrices. For example, a matrices $A : l_3 \to l_3$ where $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ and $l_3 = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^3)^{\frac{1}{3}} < \infty \right\}$ is a sequence real numbers. Furthermore, it can be constructed an operator A from sequence space l_3 to sequence space l_3 by using a standard basis (e_k) and it can be proven that the collection all the operators become Banach space.

Key Words : Operator, finite sequence space

ABSTRAK

REPRESENTASI OPERATOR LINIER PADA RUANG BARISAN l_3

Oleh

RISA OKTARINA

Suatu pemetaan pada ruang vektor khususnya ruang bernorma disebut operator. Banyak kasus pada operator linear dari ruang barisan ke ruang barisan dapat diwakilí oleh suatu matriks tak hingga. Sebagai contoh, suatu matriks $A : l_3 \to l_3$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ dan $l_3 = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^3)^{\frac{1}{3}} < \infty \right\}$ merupakan barisan bilangan real. Selanjutnya, dikonstruksikan operator A dari ruang barisan l_3 ke ruang barisan l_3 dengan basis standar (e_k) dan ditunjukkan bahwa koleksi semua operator membentuk ruang Banach.

Kata Kunci : *Operator, Ruang Barisan Terbatas.*

REPRESENTASI OPERATOR LINIER PADA RUANG BARISAN l_3

Oleh

RISA OKTARINA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Skripsi	:	**REPRESENTASI OPERATOR LINIER PADA RUANG BARISAN l_3**
Nama Mahasiswa	:	*Risa Oktarina*
No. Pokok Mahasiswa	:	1317031073
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.	**Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**
NIP 19720227 199802 1 001	NIP 19700831 199903 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Subian Saidi, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **01 Februari 2017**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: **Risa Oktarina**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1317031073**
Judul	: **REPRESENTASI OPERATOR LINIER PADA RUANG BARISAN l_3**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, Februari 2017

Penulis,

METERAI TEMPEL
TGL. 20
AAC5AEF132624632
6000
ENAM RIBU RUPIAH

RISA OKTARINA
NPM.1317031073

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Risa Oktarina, anak keenam dari tujuh bersaudara yang dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 11 Oktober 1994 oleh pasangan Bapak Amir dan Ibu Siti Aisyah (Almh).

Penulis menempuh pendidikan di Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SD Negeri 1 Kupang Kota Bandar Lampung pada tahun 2000 - 2006, kemudian bersekolah di SMP Negeri 3 Lampung pada tahun 2006 - 2009, dan bersekolah di SMA Negeri 8 Bandar Lampung pada tahun 2010 - 2013.

Pada tahun 2013 penulis terdaftar sebagai mahasiswi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui Jalur SBMPTN.

Pada tahun 2016 penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di Kejaksaan Negeri Bandar Lampung dan pada tahun yang sama penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Kemuning Kecamatan Pulau Panggung, Kabupaten Tanggamus, Provinsi Lampung.

PERSEMBAHAN

kupersembahkan karya kecil dan sederhana ini untuk :

Mpah dan Emak tercinta yang selalu mendoakan, memberi semangat, dan telah menjadi motivasi terbesar selama ini.

Kakak dan Adik tercinta yang selalu berbagi canda, tawa serta menjadi penyemangat penulis agar bisa menjadi seseorang yang bisa dibanggakan.

Dosen Pembimbing dan Penguji yang sangat berjasa dan selalu memberikan motivasi kepada penulis.

Sahabat-sahabat tersayang. Terimakasih atas kebersamaan, keceriaan, canda dan tawa serta doa dan semangat yang telah diberikan.

Almamater Universitas Lampung

KATA INSPIRASI

"Kemungkinan Terbesar Adalah Memperbesar Kemungkinan Pada Ruang Ketidakmungkinan"

"Kesuksesanmu Tak Bisa Dibandingkan Dengan Orang Lain, Melainkan Dibandingkan Dengan Dirimu Sebelumnya.

"Sukses tidak diukur menggunakan kekayaan, sukses adalah sebuah pencapaian yang kita inginkan"

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah swt. karena atas rahmat dan ridho-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang “Representasi Operator Pada Ruang Barisan Terbatas l_3 ”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dengan ketulusan hati penulis ingin mengucapkan terimakasih banyak kepada :

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si.,M.Sc. selaku Dosen Pembimbing I, terimakasih untuk bimbingan dan kesediaan waktunya selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Agus Sutrisno, S.Si, M.Si. selaku Dosen Pembimbing II, terimakasih untuk bantuan dan masukannya selama penyusunan skripsi.
3. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji, terimakasih atas kesediannya untuk menguji, memberikan saran dan kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si.,M.Sc. selaku Pembimbing Akademik, terima kasih atas bimbingan dan pembelajarannya dalam menjalani perkuliahan.
5. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.,selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.

7. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Mpah, Kakak, Adik tercinta yang tak pernah berhenti memberi semangat, doa, dorongan, nasehat dan kasih sayang serta pengorbanan yang tak tergantikan hingga penulis selalu kuat menjalani setiap rintangan yang ada di depan.
9. Untuk Emak yang memberikan doa dari surga serta menjadi acuan semangat penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
10. Untuk Rio yang telah sabar menemani, dan memberi semangat kepada penulis hingga dapat diselesaikannya skripsi ini.
11. Untuk Abang Enda dan Soesilo 43 Crew yang telah memberikan semangat dan doa kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
12. Alveera Team yang telah memberikan semangat, doa dan waktu kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
13. Sahabat-sahabat seperjuangan tersayang Tina, Heni, Luluk, Selma, Oliv, Matematika 2013 yang banyak membantu dan sabar menghadapi penulis.
14. Almamater tercinta Universitas Lampung.
15. Seluruh pihak yang telah membantu yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Bandar Lampung, Februari 2017
Penulis

Risa Oktarina

DAFTAR ISI

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah.. 1
1.2. Tujuan Penelitian.. 2
1.3. Manfaat Penelitian 2

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Operator... 3
2.2. Ruang Matriks 11
2.3. Ruang Vektor.. 13
2.4. Norm... 14
2.5. Ruang Bernorma 18
2.6. Ruang Banach 19
2.7. Barisan 19
2.8 Barisan Chaucy 25
2.9 Basis.. 25

III. METODE PENELITIAN

3.1. Waktu dan Tempat Penelitian... 27
3.2. Metode Penelitian.. 27

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 4.1.4... 30
Teorema 4.1.5... 30
Teorema 4.1.6... 35
Contoh 4.1.7... 36

V . KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

I. PENDAHULUAN

1.1 LatarBelakangMasalah

Salah satu kajian tentang operator, dalamhal ini operator linear, merupakan suatu operator yang bekerja pada ruang barisan.Banyak kasus pada operator linear dari ruang barisan ke ruang barisan dapat diwakili oleh suatu matriks tak hingga.Matriks tak hingga yaitu suatu matriks berukuran tak hingga kali tak hingga.

Sebagai contoh, suatu matriks $A : l_3 \to l_3$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ dan

$l_3 = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^3)^{\frac{1}{3}} < \infty \right\}$ merupakan barisan bilangan real.

Jika $x = (x_i) \in l_3$ maka

$$A(x) = Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} x_j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Sehingga timbul permasalahan, syarat apa yang harus dipenuhi supaya $A(x) \in l_3$. Oleh karena itu, penelitian akan difokuskan pada permasalahan tersebut.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini diantaranya :

1. Mengkaji ruang barisan terbatas l_3.
2. Mempelajari sifat-sifat operator linear yang bekerja pada ruang barisan terbatas l_3.
3. Mencari representasi operator linear pada ruang barisan terbatas l_3.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian tentang representasi operator linear pada ruang barisan l_3 ini, diantaranya :

1. Memahami sifat dari operator linear.
2. Memahami masalah operator linear pada ruang barisan terbatas l_3.
3. Mengetahui aplikasi dari operator linear pada ruang barisan terbatas l_3.
4. Dapat memberi ide bagi penulis lain yang ingin meneliti lebih lanjut tentang operator.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Operator

Definisi 2.1.1

Operator adalah suatu pemetaan pada ruang vektor khususnya ruang bernorma. (Kreyszig, 1989)

Definisi 2.1.2

Diberikan ruang Bernorm X dan Y atas *field* yang sama. (Kreyszig, 1989)

a. Pemetaan dari X dan Y disebut operator.
b. Operator A : X → Y dikatakan linear jika untuk setiap $x, y \in X$ dan setiap skalar α berlaku A(αx) = αAx dan A(x + y) = Ax + Ay.

Definisi 2.1.3

Diberikan $(X, \|.\|)$ dan $(Y, \|.\|)$ masing-masing ruang bernorm.(Kreyszig, 1989)

a. Operaror A : X → Y dikatakan terbatas jika ada bilangan $M \in \mathbb{R}$ dengan M ≥ 0 sehingga untuk setiap x ∈ X berlaku $\|Ax\| \geq M\|x\|$.

a. Operator A dikatakan kontinu di $x \in X$ jika diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $y \in X$ dengan $\|x - y\| \leq \delta$ berlaku $\|Ax - Ay\| \leq \varepsilon$.
b. Jika A kontinu di setiap $x \in X$, A disebut kontinu pada X.

Teorema 2.1.4

Jika X dan Y masing-masing ruang Bernorm atas *field* yang sama maka $l_c(X, Y)$ merupakan ruang *linear*. (Ruckle, 1991)

Bukti :

Diambil sebarang $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$ dan sebarang α, β, a, b untuk setiap $x, y \in X$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
(\alpha A + \beta B)(ax + by) &= \alpha A(ax + by) + \beta B(ax + by) \\
&= \alpha Aax + \alpha Aby + \beta Bax + \beta Bby \\
&= \alpha aAx\ \alpha bAy + \beta aBx + \beta bBy \\
&= \alpha aAx + a\beta Bx + b\alpha Ay + b\beta By \\
&= a(\alpha A + \beta B)x + b(\alpha A + \beta B)y
\end{aligned}
$$

Jadi, $(\alpha A + \beta B)$ merupakan operator linear.

Karena A dan B terbatas maka ada bilangan real $M_1, M_2 \geq 0$ sehingga,

$$
\begin{aligned}
\|(\alpha A + \beta B)x\| &= \|\alpha Ax + \beta Bx\| \\
&\leq \|\alpha Ax\| + \|\beta Bx\|
\end{aligned}
$$

$= |\alpha|\|Ax\| + |\beta|\|Bx\|$

$\leq |\alpha|M_1\|x\| + |\beta|M_2\|x\|$

$= (|\alpha|M_1 + |\beta|M_2)\|x\|$

Dengan demikian, $\alpha A + \beta B$ terbatas (kontinu).

Jadi $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$

Telah dibuktikan bahwa untuk setiap $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$ dan sebarang skalar α, β berlaku $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$. Jadi $\mathcal{L}_c(X, Y)$ linear.

Teorema 2.1.5

Jika Y ruang Banach maka $\mathcal{L}_c((X, Y), \|.\|)$ ruang Banach.(Maddox, 1970)

Bukti :

Diambil sebarang barisan Cauchy $\{A_i\} \subset \mathcal{L}_c((X, Y), \|.\|)$.

Jadi untuk setiap bilangan ε_0 terdapat $n_0 \in N$ sehingga jika $m, n \in N$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku $\|A_m - A_n\| < \varepsilon_0$.

Misal, untuk setiap $x \in X$ dan $m, n \geq n_0$ diperoleh

$\|A_m x - A_n x\| = \|(A_m - A_n)x\|$

$\leq \|A_m - A_n\|\|x\| < \varepsilon_0\|x\|$

Jelas untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (dapat dipilh bilangan $\varepsilon_0 > 0$ sehingga $\varepsilon_0 \| x \| < \varepsilon$ ada $n_0 \in N$ sehingga untuk setiap $m, n \in N$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku $\|A_m x - A_n x\| < \varepsilon_0\|x\| < \varepsilon$.

Dengan demikian diperoleh barisan Cauchy $\{A_i x\} \subset Y$ dan Y lengkap, dengan kata lain $\{A_i x\}$ konvergen ke $y_x \in Y$.

Jadi, $\lim_{n\to\infty} A_n x = y_x$ dan x menentukan suatu operator A sehingga $A_x = y_x$.

Proses di atas dapat diulang untuk $z \in X$ tetap, dengan $z \neq x$. Jadi diperoleh $\lim_{n\to\infty} A_n z = y_z$ dan z menentukan suatu operator A sehingga $A_z = y_z$.

Untuk setiap skalar a dan b, diperoleh $ax + bz \in X$,

$\lim_{n\to\infty} A_n(ax + bz) = y_{ax+bz}$ dan $ax + bz$ menentukan suatu operator A sehingga $A_n(ax + bz) = y_{ax+bz}$.

Jadi$A(ax + bz) = lim_{n\to\infty} A_n(ax + bz)$

$$= \lim_{n\to\infty}(aA_n x + bA_n z)$$

$$= \lim_{n\to\infty} aA_n x + \lim_{n\to\infty} bA_n z$$

$$= a\lim_{n\to\infty} A_n x + b\lim_{n\to\infty} A_n z$$

$$= ay_x + by_z$$

$$= aAx + bAz$$

Jadi operator A bersifat linear.

Untuk $n \to \infty$ diperoleh

$\|(A_m - A_n)x\| = \|A_m x - Ax\|$

$$= \|(A_m x - Ax)\|$$

$$= \|(A_m - A)x\| < \varepsilon_0 \|x\|$$

Jadi operator $(A_m - A)$ dengan $m \geq n_0$ bersifat linear terbatas.

Karena A_m dan $A_m - A$ masing-masing terbatas, serta $A = A_m - (A_m - A)$ maka A terbatas (kontinu).

Jadi $A \in \mathcal{L}_c((X, Y), \|.\|)$ dengan kata lain $\mathcal{L}_c((X, Y), \|.\|)$ ruang Banach.

Definisi 2.1.6

Diberikan ruang Bernorm X dengan *field* $\mathbb{R}$. (Kreyszig, 1989)

a. Pemetaan $f: X \to \mathbb{R}$ disebut fungsi.
b. Himpunan semua fungsi *linear* kontinu pada X disebut ruang dual X, biasanya ditulis $X^* \in l_c(X, Y)$.

Teorema 2.1.7

Misal X dan Y ruang BK (Banach lengkap). Jika A matriks tak hingga yang memetakan X ke Y maka A kontinu. (Ruckle, 1991)

Bukti :

Misal A = (a_{ij})

X = $(x_j) \in X$

y = $(y_i) \in Y$ dapat dinyatakan

$$y_i = \sum_{j=i}^{\infty} a_{ij} x_j$$

Mendefinisikan suatu fungsi linear kontinu pada X. Jelas bahwa untuk setiap :

$$f_m(x) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$$

Misal $s = (s_j)$, $t = (t_j)$ dan $\alpha \in R$

$$f_m(s) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j \; f_m(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} t_j$$

$$(i) f_m(s) + f_m(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} t_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} s_j + a_{ij} t_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (s_j + t_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (s + t)_j$$

$$= f_m(s + t)$$

$$(ii)(f_m)(ax) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (a_{xj})$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a\left(a_{ij} x_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$$

$$= a(f_m(x))$$

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti f_m merupakan fungsi linear pada X.

Selanjutnya akan ditunjukkan f_m kontinu pada X.

Hal ini sama saja membuktikan f_m terbatas pada X.

Diketahui X ruang BK maka terdapat M > 0 sehingga $|P(x)| = |x_k| \leq M$

Oleh karena itu :

$$|f_m(x)| = \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}||x_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| M$$

Berdasarkan pembuktian di atas, f_m mendefinisikan fungsi linear kontinu pada *x*

$$f_m(x) = \lim_{n \to \infty} f_m(x)$$

Maka *f* juga kontinu pada *x*.

Karena *y* ruang BK diperoleh

$$y_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j^{(n)}$$

Atau

$$Ax^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_2 & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} x_j^{(n)} \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} x_j^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$y_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j^{(n)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} f\left(x^{(n)}\right)$$

$$= f(x)$$

$$A(x)_i \,, \square_i$$

Jika $y = Ax$ maka bukti lengkap

Definisi 2.1.8

a. Matriks takhingga $A = (a_{ij})$ adalah matriks dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$ dan elemen pada baris dan kolom sebanyak takhingga. (Berberian, 1996)

b. Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ masing-masing matriks takhingga dan α skalar maka $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right), \alpha A = \left(\alpha a_{ij}\right)$, dan $AB = (\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj})$ dengan $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj} \in R$, (Cooke, 1955)

Definisi 2.1.9

Diketahui suatu operator $T \in B(H_1, H_2)$ maka $T^* \in B(H_1, H_2)$ disebut operator adjoint operator T jika untuk setiap $x \in H_1$ dan $y \in H_2$ berlaku $(Tx, y) = (x, T^* y)$.(Fuhrmann, 1987)

2.2 Ruang Matriks

Ruang matriks merupakan ruang abstrak, yaitu ruang yang dibangun oleh aksioma-aksioma tertentu. Ruang matriks merupakan hal yang fundamental dalam analisis fungsional, sebab memegang peranan yang sama dengan jarak pada *real line R*.

Definisi 2.2.1

Misal X adalah himpunan tak kosong, suatu matrikss di X adalah suatu fungsi $d: X \times X \to [0, \infty)$, sehingga untuk setiap pasangan $(x, y) \in X \times X$ berlaku :

i. $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$

ii. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

iii. $d(x,y) = d(y,x)$ untuk setiap $x, y \in X$ (sifat simetri)

iv. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$ (ketidaksamaan segitiga)

Selanjutnya pasangan (*X*, *d*) dengan *d* adalah matriks pada *X* disebut ruang matriks. Setiap anggota *X* disebut titik dan nilai *d(x,y)* disebut jarak(*distance)* dari titik *x* ke titik *y* atau jarak antara titik *x* dan titik *y*. (Kreyszig, 1989)

Definisi 2.2.2

Suatu barisan (x_n) dalam ruang matriks (*X*, *d*) dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N = N(\epsilon)$ sehingga $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ untuk setiap $m, n > N$. Ruang X dikatakan *X* dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. (Kreyszig, 1989)

Definisi 2.2.3

Suatu ruang matriks (*X*, *d*) dikatakan lengkap jika dan hanya jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. Dengan kata lain jika $d(x_m, x_n) \to 0(m, n \to \infty)$ maka terdapat $x \in X$ seningga $d(x_m, x) \to 0(m \to \infty)$. (Maddox, 1970)

Definisi 2.2.4

Misal (*X*,*d*) adalah suatu ruang matriks. Suatu barisan $(x_n) \in X$ dikatakan konvergen jika terdapat suatu titik $x \in X$ sehingga $d(x_n, x) \to 0$ untuk $n \to \infty$ (yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0, d(x_n, x) < \varepsilon$). Titik *x* adalah unik sebab jika $d(x_n, x) \to 0$ maka $0 \leq d(x,y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0$ menunjukkan bahwa *x* = *y*. Dapat dikatakan x_n konvergen ke limit *x* (dalam X) sehingga dapat ditulis $x = \lim_{n \to \infty} x_n$. (Beberian, 1996)

Lemma 2.2.5

Jika X = (X,d) adalah ruang matriks, maka :

i. Suatu barisan konvergen di X adalah terbatas dan limitnya adalah unik.

ii. Jika $x_n \to x$ dan $y_n \to y$ di X, maka $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$. (Kreyszig, 1989)

Teorema 2.2.6

Setiap barisan Cauchy adalah terbatas. (Parzynsky dan Zipse, 1987)

Bukti :

Jika $\{a_n\}$ barisan Cauchy maka untuk $\varepsilon = 1$ ada bilangan asli N sehingga $|a_m - a_n| < 1$ dimana $n, m > N$. Perhatikan bahwa untuk $n_0 > N$ maka $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ untuk setiap $n > N$. Jika $M = maks(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|, 1 + |a|)$ jelas $|a_n| \leq M$ untuk setiap bilangan asli N sehingga barisan $\{a_n\}$ terbatas.

2.3 Ruang Vektor

Definisi 2.3.1

Ruang vektor adalah suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi dengan fungsi penjumlahan $(+): X \times X \to X$ dan fungsi perkalian skalar $(\cdot): F \times X \to X$ sehingga untuk setiap skalar λ, μ dengan elemen x, y, z □ X berlaku :

i. $x + y = y + x$

ii. $(x + y) + z = x + (y + z)$

iii. ada $\theta \in X$ sehingga $x + \theta = x$

iv. ada $-x \in x$ sehingga $x + (-x) = \theta$

v. $1 \cdot x = x$

vi. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda x$

vii. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

viii. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$. (Maddox, 1970)

2.4 Norm

Definisi 2.4.1

Norm merupakan sebuah konsep yang dimaksudkan untuk memperluas pengertian *magnitude* atau "besar" sebuah besaran skalar dan vektor dalam fisika. Besaran skalar ¶ dinyatakan "panjang" atau "besar"-nya oleh nilai absolutnya, yaitu $|¶|$, yang didefinisikan sebagai $|¶| \equiv \sqrt{¶^2}$. Nilai absolut ini memiliki sifat-dasar sebagai berikut:

1. Jika ¶ $\neq 0$ maka $|¶| \neq 0$;
2. $|\sim ¶| = |\sim|\ |¶|$;
3. $|¶ + ¦| \leq |¶| + |¦|$.

Sifat pertama mengisyaratkan bahwa nilai absolut adalah definit positif, sedang sifat kedua mengungkapkan sifat homogen, dan sifat terakhir menyatakan ketidak-samaan segitiga.

2.4.2 Norm Vektor

Norm adalah suatu fungsi yang memberikan ukuran panjang pada semua vektor dalam sebuah vektor space. Sebagai contoh dua dimensi Euclidean norm; Elemen pada vektor space ini biasanya digambarkan dengan sebuah anak panah pada bidang kartesian dua dimensi yang dimulai pada origin (0,0). Panjang pada anak panah ini menunjukkan Euclidean norm. Oleh karena itu, Euclidean norm disebut sebagai 'magnitude' atau besaran dari vektor.

Untuk vektor $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, x$ X dengan X adalah vector space dan $X \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{C}$ maka norm dari vektor space X adalah $\|X\|$.

Norm didefinisikan sebagai berikut , misal $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, x$ X maka p-norm adalah

1-norm $\quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i| \ ; p = 1$

p-norm $\quad \|x\|_p = (\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \ ; i < p < \infty$

∞-norm $\quad \|x\|_\infty = max_{1 \le i \le m} |x_i| \ ; p = \infty$

Misal p=2, maka $\|x\|_2$ adalah norm yang sudah kita kenal yaitu Euclidean norm. Norm ini mengukur besaran suatu vektor atau panjang vektor.

2.4.3 Norm Matriks

Ruang matriks M_n adalah suatu ruang vektor berdimensi n^2. Dengan demikian sifat-sifat norm vektor di ruang berdimensi hingga tetap berlaku. Perbedaannya, untuk sebarang A dan B di M_n kita dapat mengalikan keduanya yang menghasilkan matriks baru AB di M_n juga.

Suatu fungsi $\|\bullet\|: M_n \rightarrow R$ disebut norm matriks jika untuk sebarang A,B M_n , maka berlaku lima aksioma berikut:

i. $\|A\| \geq 0$ untuk setiap $A \in M_n$

ii. $\|A\| = 0$, jika dan hanya jika $A = 0$, (0 vektor nol)

iii. $\|\alpha A\| = |\alpha|$ $\|A\|$ untuk setiap skalar α dan $A \in M_n$.

iv. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ untuk setiap $A, B \in M_n$

v. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ (Sub-Multiplikatif)

Pada definisi di atas keempat sifat pertama tidak lain merupakan sifat-sifat norm vektor. Adapun sifat terakhir ditambahkan untuk menghubungkan “ukuran” matriks - matriks A,B dan hasil perkalian keduanya yaitu matriks AB. Inilah yang membedakan norm matriks dengan norm vektor.

Sebagai akibatnya, karena tidak semua norm memenuhi sifat kelima ini, maka harus dikembangkan konsep norm atas matriks yang lebih alami dengan memilih sebagai definisi (disini *sup* adalah singkatan dari kata *supremum*):

$$\|A\| \equiv sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \text{ untuk } \underline{x} \neq 0.$$

Dalam definisi ini norm sebuah matriks dinyatakan sebagai nilai maximum yang dapat dicapai oleh $\|Ax\|$, dihitung relatif terhadap $\|\underline{x}\|$. Norm matriks ini disebut sebagai "norm matriks yang dikembangkan dari konsep norm sebuah vektor". Selanjutnya, karena untuk sembarang $\underline{x} \neq 0$ dapat didefinisikan vektor lain $\underline{u} \equiv \underline{x}$ /

$\|\underline{x}\|$ sedemikian sehingga $\|\underline{u}\| = 1$, maka definisi norm matriks itu setara (ekuivalen) dengan definisi berikut:

$$\|A\| \equiv \max \{\| A\underline{u} \|; \text{ untuk } \|\underline{u}\| = 1\} = \| A\underline{y} \|, \|\underline{v}\| = 1.$$

Disini $\| A\underline{u} \|$ merupakan fungsi kontinu dari $\underline{u}$ dan nilai maximumnya dicapai untuk $\underline{u} = \underline{y}$, dengan $\|\underline{v}\| = 1$. Selain setara dan memenuhi 4 syarat dasar, kedua definisi ini juga mengandung sifat

$$\| A\underline{x} \| \leq \|A\|\|\underline{x}\|.$$

Sebagai akibatnya, sifat kelima diatas dapat ditunjukkan dengan mengambil sebuah vektor $\underline{y}$ dengan $\|\underline{v}\| = 1$ sedemikian sehingga $\|(AB)\| = \| (AB)\underline{y} \| \leq \|A\|\| B\underline{y} \|$. Itu berarti $\|AB\| \leq \|A\|\|\underline{B}\|$, dan kedua definisi itu memang memenuhi semua syarat-dasar yang diperlukan untuk norm matriks.

Sebagai konsekuensi dari uraian diatas dikenal 3 buah definisi norm matriks, melengkapi 3 definisi norm untuk vektor, yaitu:

1. norm-1 : $\|A\|_1 \equiv \max_j \{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \; ; j = 1,2, \dots, n\}$
2. norm-2 : $\|A\|_2 \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{\;2}}$;
3. norm-∞ : $\|A\|_1 \equiv \max_i \{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \; ; i = 1,2, \dots, n\}$

Perhatikanlah bahwa norm-1 sering juga disebut "maximum absolute column-sum" = nilai maximum dari jumlah nilai absolut tiap kolom, sedang norm-∞ patut disebut "maximum absolute row-sum" = nilai maximum dari jumlah nilai absolut tiap baris, dan norm-2 sering disebut sebagai "norm Frobenius".

2.5 Ruang Bernorma

Definisi 2.5.1

Diberikan ruang linear *X*. Fungsi $x \in X \rightarrow \|x\| \in R$ yang mempunyai sifat-sifat :

i. $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$

ii. $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)

iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ untuk setiap skalar α dan $x \in X$.

iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

disebut norma (*norm*) pada *X* dan bilangan non negatif $\|x\|$ disebut norma vektor *x*. Ruang linear *X* yang dilengkapi dengan suatu norma $\|\cdot\|$ disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $X, \|\cdot\|$ atau *X* saja asalkan nrmanya telah diketahui. (Darmawijaya, 1970)

Lemma 2.5.2

Dalam ruang linier bernorm *X* berlaku $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ untuk setiap $x, y \in X$. (Maddox, 1970)

Bukti :

untuk setiap $x, y \in X$ diperoleh :

$$\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \leq \|x - y\| + \|y\| - \|y\| = \|x - y\|.$$

2.6 Ruang Banach

Definisi 2.6.1

Ruang Banach (*Banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang matriks yang lengkap) jika dalam suatu ruang bernorm X berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di X adalah konvergen. (Darmawijaya, 2007)

2.7 Barisan

Definisi 2.7.1

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan bulat positif. Misal terdapat bilangan bulat positif 1, 2, 3,...,n,... yang bersesuaian dengan bilangan real x_n tertentu, maka x_1, x_2,...,x_n,... dikatakan barisan. (Mizrahi dan Sulivan, 1982)

Definisi 2.7.2

Bilangan-bilangan $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ disebut barisan bilangan tak hingga c_n disebut suku umum dari barisan. Bilangan n, (n = 1, 2, 3,...) adalah nomor urut atau indeks yang menunjukkan letak bilangan tersebut dalam barisan. (Yahya, Suryadi, Agus, 1990)

Definisi 2.7.3

Misal L adalah suatu bilangan real dan $\{x_n\}$ suatu barisan, $\{x_n\}$ konvergen ke L jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan asli N, sehingga $|x_n - L| < \varepsilon$ untuk setiap $n > N$

Suatu bilangan L dikatakan limit dari suatu barisan takhingga $x_1, x_2, \ldots$ jika ada bilangan real positif ε sehingga dapat ditemukan bilangan asli N yang tergantung pada ε sehingga $|x_n - L| < \varepsilon$ untuk setiap $n > N$, daan suatu barisan dikatakan konvergen jika ia mempunyai nilai limit. (Mizrahi dan Sulivan, 1982)

Teorema 2.7.4

Setiap barisan bilangan real yang konvergen selalu terbatas. (Martono, 1984)

Bukti :

Misalkan barisan bilangan real $\{a_n\}$ konvergen ke a, akan ditunjukkan terdapat suatu bilangan real $M > 0$ sehinga $|a_n| \leq M$ untuk setiap $n \in N$. Karena $\{a_n\}$ konvergen ke a, maka terapat suatu $n_0 \in N$ sehingga $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < 1$. Akibatnya $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ untuk setiap $n > n_0$.

Ambillah $M = maks(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |a| + 1)$, maka setiap $n \in M$ berlaku $|a_n| \leq M$, yang berarti bahwa barisan bilangan real $\{a_n\}$ terbatas.

Definisi 2.7.5

Suatu barisan $x = (x_n)$ dikatakan terbatas jika dan hanya jika terdapat suatu bilangan $M \geq 0$ sehingga $|x_n| \leq M \; \forall n \in N$. Himpunan dari semua barisan terbatas dilambangkan dengan l_∞ . (Maddox, 1970)

Definisi 2.7.6

Suatu barisan $\{x_n\}$ dikatakan mempunyai limit L bila untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dapat dicari suatu nomor indeks n_0 sedemikian sehingga untuk $n \geq n_0$ berlaku

$L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$ (atau $|x_n - L| < \varepsilon$) artinya jika *L* adalah limit dari $\{x_n\}$ maka x_n mendekati *L* jika *n* mendekati takhingga. (Yahya, Suryadi, Agus, 1990)

Definisi 2.7.7

Suatu barisan yang mempunyai limit dinamakan barisan konvergen dan barisan yang tak konvergen dinamakan barisan divergen. (Martono, 1984)

Definisi 2.7.8

Diberikan ω yaitu koleksi semua barisan bilangan *real*. (Soeparna, 2007)

jadi :

$$\omega = \{\bar{x} = \{x_k\}: x_k \in \mathbb{R}\}$$

a. Untuk setiap bilangan *real p* dengan $1 \le p < \infty$ didefinisikan

$$l^p = \left\{ x \in \{x_j\} \square\ \omega: \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}$$

dan norm pada l^p yaitu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

b. Untuk $p = \infty$ didefinisikan

$$l_\infty = \left\{ \bar{x} = \{x_k\} \square\ \omega: \sup_{k \ge 1} |x_k| < \infty \right\}$$

dan norm pada l_∞ yaitu

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \ge 1} |x_k|.$$

Definisi 2.7.9

Misal $p, q \in (1, \infty)$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q konjugat p), untuk $x \in l^p$ dan $y \in l^p$

$$\left(x_j y_j\right)_{j \in N} \in l^\infty \text{ dan } \sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j y_j\right| \leq \|x\|^p \|y\|^q$$

Teorema 2.7.10

$l^p (1 \leq p \leq \infty)$ merupakan ruang bernorma terhadap norm $\|.\|_p$.

(Darmawijaya, 2007)

Bukti :

a) Akan dibuktikan bahwa l^∞ merupakan ruang bernorm terhadap $\|.\|_\infty$. Untuk setiap skalar α dan $\tilde{x} = \{x_k\}, \{y_k\} \in l^\infty$ diperoleh

i) $\|\tilde{x}\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x_k| \geq 0$ karena $|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$\|\tilde{x}\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x_k| = 0 \Leftrightarrow |x_k| = 0$ untuk setiap $k \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$

ii) $\|\alpha\tilde{x}\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |\alpha x_k| . \sup_{k \geq 1} |x_k| = \alpha \|x\|_\infty$.

karena $\sup_{k \geq 1} |x_k| < \infty$ maka $\|\alpha\tilde{x}\|_\infty = \alpha \|x\|_\infty < \infty$ atau $\alpha\tilde{x} \in l^\infty$

iii) $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_\infty \leq \|\tilde{x}\|_\infty + \|\tilde{y}\|_\infty$ dan $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_\infty \leq \infty$ yaitu $\tilde{x} + \tilde{y} \in l^\infty$

berdasarkan i), ii) dan iii) terbukti bahwa l^∞ merupakan ruang linear dan $\|.\|_\infty$ norm pada l^∞. Dengan kata lain $(l^\infty, \|.\|_\infty)$ ruang bernorma.

b) Untuk $1 \leq p < \infty$ diambil sebarang $\tilde{x} = \{x_k\}, \tilde{y} = \{y_k\}$ □ l^p dan skalar α.

Diperoleh :

iv) $\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \geq 0$ karena $|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |x_k| \geq 0$ untuk setiap $k \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$

v) $\|\alpha\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\|x\|_p$

jelas bahwa $\|\alpha x\|_\infty < \infty$

vi) $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$

Berdasarkan iv), v) dan vi) terbukti bahwa l^p merupakan ruang linear dan $\|.\|_p$ norm pada l^p. Dengan kata lain $(l^p, \|.\|_p)$ ruang bernorm.

Teorema 2.7.11

Jika bilangan *real* *p* dengan $1 \leq p \leq \infty$, maka $(l^p, \|.\|_p)$ merupakan ruang banach. (Darmawijaya, 2007)

Bukti :

Telah dibuktikan bahwa $(l^p, \|.\|_p)$ merupakan ruang bernorm

Jadi tinggal membuktikan bahwa ruang bernorm itu lengkap.

Dibuktikan dahulu untuk $1 \leq p \leq \infty$ diambil sebarang barisan Cauchy $\{\tilde{x}^{(n)}\}$ □ l^p dengan

a) $\tilde{x}^{(n)} = \{\tilde{x}^{(n)}\} = \left(\tilde{x}_1{}^{(n)}, \tilde{x}_2{}^{(n)}, \tilde{x}_3{}^{(n)}, \dots\right)$

Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ berlaku

b) $\left\|x^{(n)} - x^{(n)}\right\|_p < \frac{\varepsilon}{4}$ atau $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right|^p < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p$.

Hal ini berakibat untuk setiap dua bilangan asli $m, n > 0$ diperoleh $\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$ untuk setiap *k*. Dengan kata lain diperoleh barisan Cauchy $x_k^{(n)}$ untuk setiap k. Jadi terdapat bilangan x_k sehingga $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ atau $\lim_{n\to\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = 0$. Berdasarkan b) diperoleh untuk $n \geq n_0$ berlaku $\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Selanjutnya dibentuk barisan $\tilde{x} = \{x_k\}$. Menurut ketidaksamaan minkowski.

c) $\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Yang berarti $\tilde{x} = \{x_k\}$ □ l^p. Berdasarkan pertidaksamaan a) diperoleh untuk $n \geq n_0$ berlaku

d) $\left\|\tilde{x} - \tilde{x}^{(n)}\right\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4}$

Maka barisan $\{\tilde{x}^{(n)}\}$ konvergen ke $\tilde{x}$. Berdasarkan hasil c) dan d), terbukti bahwa barisan Cauchy $\{\tilde{x}^{(n)}\} \subset l^p$ konvergen ke $\tilde{x} = \{x_k\}$ □ l^p atau terbukti bahwa $\left(l^p, \|.\|_p\right)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ merupakan ruang banach.

Definisi 2.7.12

Misalkan X merupakan ruang barisan, X dikatakan ruang BK (banach lengkap) jika X merupakan ruang banach dan pemetaan koordinatnya $P_n(x) = x_n, x = (x_k) \in X$ kontinu. (Ruckle, 1991)

Contoh ruang BK (banach lengkap) adalah ruang barisan l^p, $1 \leq p \leq \infty$.

2.8 Barisan Cauchy

Barisan Cauchy adalah suatu barisan semakin lama jarak antara suku-sukunya semakin kecil. Secara formal didefinisikan sebgai berikut :

Definisi2.8.1

Suatu Barisan $X = (X_n)$ didalam bilangan real dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $k\varepsilon$ sedemikan hingga untuk setiap bilangan asli$n,m > k\varepsilon$ berlaku $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Jadi suatu barisan dikatakan barisan Cauchy jika setelah suku ke-$k\varepsilon$ maka jarak suku yang satu dengan yang lainnya akan selalu kurang dari ε . Bagaimana menentukan $k\varepsilon$ Itu tergantung dari nilai ε yang kita pilih.

2.9 Basis

Definisi 2.9.1

Ruang vektor V dikatakan terbangkitkan secara hingga (*finitely generated*) jika ada vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sehingga $V = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. Dalam keadaan seperti itu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ disebut pembangkit (*generator*) ruang vektor *V*. (Darmawijaya, 2007)

Menurut definisi di atas, ruang vektor V terbangkitkan secara hingga jika dan hanya jika ada vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sehingga untuk setiap vektor $x \in V$ ada skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

Secara umum, jika $B \subset V$ dan V terbangkitkan oleh B, jadi $|B| = V$ atau B pembangkit V, maka untuk setiap $x \in V$ terdapat vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ dan skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_n x_n$$

Definisi 2.9.2

Diberikan ruang vektor V. Himpunan $B \subset V$ dikatakan bebas linearjika setiap himpunan bagian hingga di dalam B bebas linear. (Darmawijaya, 2007)

Definisi 2.9.3

Diberikan ruang vektor V atas lapangan $\mathcal{F}$. Himpunan $B \subset V$ disebut basis (*base*) V jika B bebas linear dan $|V| = B$. (Darmawijaya, 2007)

Contoh :

Himpunan $\{\check{e}_1, \check{e}_2, \dots, \check{e}_n\}$, dengan $\tilde{e}_k$ vektor di dalam R^n yang komponen ke-k sama dengan 1 dan semua komponen lainnya sama dengan 0, merupakan basis ruang vektor R^n

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2016/2017 di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini antara lain :

1. Mengkonstruksikan operator A dari ruang barisan l_3 ke ruang barisan l_3 dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan$e_k = \left(0,0,\ldots,1_{(k)},\ldots\right)$.
2. Mengkonstruksikan norma operator A
3. Menyelidiki apakah koleksi semua operator A membentuk ruang Banach
4. Merepresentasikan operator A sebagai matriks tak hingga yang dikerjakan pada barisan l_3 ke ruang barisan l_3 dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = \left(0,0,\ldots,1_{(k)},\ldots\right)$.

V. KESIMPULAN

Operator Linier dan kontinu $A: l_3 \to l_3$ merupakan operator-SM jika dan hanya jika terdapat suatu matriks $A = (a_{ij})$ yang memenuhi :

1. $Ax = \{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j\} \in l_3$ untuk setiap $x = (x_i) \in l_3$
2. $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^3 < \infty$
3. $\sum_{i=1}^{\infty} \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right| < \infty$

Koleksi semua operator SM $A: l_3 \to l_3$ yang dinotasikan dengan SM (l_3, l_3) membentuk ruang Banach .

DAFTAR PUSTAKA

Berberian, S. K. 1996.*Fundamentals of Real Analysis*.Springer, Texas.

Darmawijaya, S. 2007. *PengantarAnalisisAbstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Fuhrmannn, P. A. 1981. *Linear Syatem and Operator in Hilbert Space*.McGraw Hill and Sons, New York.

Kreyszig, E. 1989.*Introductory Function Analysis with Application*.Willey Classic Library, New York.

Maddox,I.J. 1970. *Element of Functional Analysis*.CambridgeUnivercity Press, London.

Martono, K. 1984. *KalkulusdanIlmuUkurAnalitik 2*.Angkasa, Bandung.

Mizrahi, A. dan Sullivan, M. 1982.*Calculus and Analytic Geometry*.Wadsworth Publishing Company Belmont, California.

Parzynski and Zipse. 1987. *Introduction to Mathematical Analysis*. McGraw Hill International Edition, Singapore.

Ruckle, W. H. 1991. *Modern Analysis*. PWS-KENT Publishing Company, Boston.

Soesianto,F. 2002. www.te.ugm.ac.id/~fsoes/bab2.doc. Diakses pada hari Senin, 13 Februari 2017

Yahya, Y., Suryadi, D. H. S. danAgus, S. 1990. *Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi*. Ghalia Indonesia, Jakarta.