ACTUARIAL PRESENT VALUE MANFAAT ASURANSI JIWA SEUMUR HIDUP BERDASARKAN TABEL MORTALITA HUKUM MAKEHAM DAN HUKUM GOMPERTZ DENGAN SUKU BUNGA CIR

(Skripsi)

Oleh

Auleria Vinny Viola Saraswati

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

ABSTRAK

ACTUARIAL PRESENT VALUE MANFAAT ASURANSI JIWA SEUMUR HIDUP BERDASARKAN TABEL MORTALITA HUKUM MAKEHAM DAN HUKUM GOMPERTZ DENGAN SUKU BUNGA CIR

Oleh:
Auleria Vinny Viola Saraswati

Asuransi jiwa adalah usaha kerja sama atau koperasi dari sejumlah orang yang sepakat memikul kesulitan keuangan bila terjadi musibah terhadap salah seorang anggotanya. Ada beberapa macam asuransi jiwa yang ada di Indonesia diantaranya yaitu asuransi jiwa seumur hidup. Pada asuransi jiwa seumur hidup terdapat fungsi-fungsi aktuaria yang dapat dihitung dengan menggunakan pendekatan hukum mortalita dan tabel mortalita. Hukum Mortalita Gompertz dan Makeham adalah salah satu hukum mortalita yang sering digunakan dan memiliki kemiripan dengan distribusi pola kematian penduduk di suatu daerah. Hukum mortalita tersebut akan digunakan sebagai perbandingan untuk memberikan gambaran terhadap laju kematian pada tabel Mortalita. Pada penelitian ini akan dilakukan perhitungan *actuarial present value* manfaat asuransi jiwa seumur hidup dengan tingkat suku bunga konstan dan tingkat suku bunga mengikuti model CIR. Data yang digunakan adalah data tabel mortalita Indonesia 3 untuk pria tahun 2011. Data tabel mortalita tersebiut akan di dekatkan dengan menggunakan hukum Makeham dan hukum Gompertz. Setelah itu akan di lihat tingkat *error* dari hukum Makeham dan hukum Gompertz terhadap tabel mortalita. Tingkat *error* yang kecil yang dikatakan lebih baik untuk memberikan gambaran laju kematian pada tabel mortalita.

Kata kunci : *Asuransi, hukum mortalita, tebel mortalita, makeham, gompertz*

ABSTRACT

ACTUARIAL PRESENT VALUE THE BENEFITS OF LIFETIMEINSURANCE BASED ON MORTALITE TABLE OF MAKEHAM LAW AND GOMPERTZ LAW WITH CIR INTEREST

By:

Auleria Vinny Viola Saraswati

Life insurance is a cooperative or cooperative effort of a number of people who agree to endure financial difficulties in the event of a disaster to one of its members. There are several kinds of life insurance in Indonesia including lifetime insurance. On lifetime insurance there are actuarial functions that can be calculated using mortality law and mortality table approaches. The laws of Mortalita Gompertz and Makeham are one of the most commonly used mortality laws that bear similarities to the distribution of population mortality patterns in a region. The mortality law will be used as a comparison to illustrate the mortality rate in the Mortalita table. In this research will be calculated present value actuarial benefit of lifetime insurance with constant interest rate and interest rate will follow CIR model. The data used are Indonesia Mortality 3 table for men in 2011. The mortality table will be closed by using Makeham law and Gompertz law. After that will be seen the error rate of Makeham law and Gompertz law against mortality tables. A small error rate is said to be better to give an illustrates of mortality rate in the mortality table.

Keywords*: Insurance, mortality law, mortality clair, makeham, gompertz*

ACTUARIAL PRESENT VALUE MANFAAT ASURANSI JIWA SEUMUR HIDUP BERDASARKAN TABEL MORTALITA HUKUM MAKEHAM DAN HUKUM GOMPERTZ DENGAN SUKU BUNGA CIR

Oleh

AULERIA VINNY VIOLA SARASWATI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR pLAMPUNG
2017

Judul Skripsi : ***ACTUARIAL PRESENT VALUE* MANFAAT ASURANSI JIWA SEUMUR HIDUP BERDASARKAN TABEL MORTALITA HUKUM MAKEHAM DAN HUKUM GOMPERTZ DENGAN SUKU BUNGA CIR**

Nama Mahasiswa : *Auleria Vinny Viola saraswati*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1317031011

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Drs. Rudi Ruswandi, M.Si
NIP. 19560208 198902 1 001

Subian Saidi, S.Si., M.Si.
NIP. 19800821 200812 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Tiryono Ruby, Ph.D.
NIP. 19620704 198803 1 002

LAMPUNG UNIVERSITAS LAMPUNG UNIVERSITAS

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Drs. Rudi Ruswandi, M.Si** ....

   Sekretaris : **Subian Saidi S.Si., M.Si.** ....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Drs. Nusyirwan, M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 00 1

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **31 Maret 2017**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertandatangan di bawah ini :

Nama	: **Auleria Vinny Viola Saraswati**
Nomor Pokok Mahawiswa	: **1317031011**
Judul	: ***Actuarial Present Value* Manfaat Asuransi Jiwa Seumur Hidup Berdasarkan Tabel Mortalita Hukum Makeham Dan Hukum Gompertz Dengan Suku Bunga Cir**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, Mei 2017

Auleria Vinny Viola Saraswati
NPM. 1317031011

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Auleria Vinny Viola Saraswati, dilahirkan di Tangerang pada tanggal 01 Agustus 1995 sebagai anak ketiga dari tiga bersaudara pasangan Bapak Jones Bendrik Tumanggor dan Ibu Veronika Wiwik Setiawati.

Penulis menyelesaikan pendidikan sekolah dasar di SDN 01 Tatakarya pada tahun 2007, sekolah menengah pertama di SMPN 01 Abung Surakarta pada tahun 2010, dan sekolah menengah atas di SMAN 01 Tumijajar pada tahun 2013.

Pada tahun 2013 penulis terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN). Selama menjadi mahasiswa, penulis bergabung dalam Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) sebagai anggota Bidang Kaderisasi periode 2014-2015 hingga periode 2015-2016.

Pada Januari 2016 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata di Desa Kekatung, Kecamatan Dente Teladas, Kabupaten Tulang Bawang. Selanjutnya pada Juli 2016 penulis melaksanakan Kerja Prakter di BKKBN Provinsi Lampung guna mengaplikasikan ilmu yang diperoleh dalam perkuliahan.

KATA INSPIRASI

"Sebuah bagian yang tak terhindarkan dari kehidupan yang disebut 'jujur pada diri sendiri' "
(Auleria Vinny Viola Saraswati)

"Hidup ini bagai skripsi, banyak bab dan revisi yang harus dilewati, tetapi akan selalu berakhir indah bagi mereka yang pantang menyerah"
(@shitlicious)

"Orang lain bisa, kenapa saya tidak ?"
(Auleria Vinny Viola Saraswati)

Dengan mengucapkan puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan karunia-Nya

Kupersembahkan sebuah karya sederhana ini untuk:

Ayahanda Jones Bendrik Tumanggor & Ibunda Veronika Wiwik Setiawati

Terimakasih Ayah, Ibu untuk semua limpahan kasih sayang, pengorbanan, doa, dan dukungan selama ini. Karena atas doa kalianlah Tuhan memudahkan setiap langkah-langkah yang aku tapaki.

Mungkin karya ini tak sebanding dengan pengorbanan yang telah kalian lakukan. Tapi percayalah ini sebuah titik awal perjuangan baktiku untuk kalian, karena kalian adalah motivasi terbesar dalam hidupku.

Kakek, Nenek, Mas Abram, Mbak Conda,dan sahabat-sahabatku yang senantiasa berdoa untuk keberhasilanku.

Serta,

Almamater tercinta yang turut dalam pembentukan pribadi menjadi lebih dewasa dalam berpikir, berucap, dan bertindak.

SANWACANA

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan berkah dan rahmatNya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"*Actuarial Present Value* Manfaat Asuransi Jiwa Seumur Hidup Berdasarkan Tabel Mortalita Hukum Makeham Dan Hukum Gompertz Dengan Suku Bunga Cir"** ini.

Penulis menyadari bahwa tanpa bimbingan, bantuan, dan doa dari berbagai pihak skripsi ini tidak akan dapat diselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis menyampaikan terimakasih kepada:

1. Bapak Drs. Rudi Ruswandi, M.Si. selaku pembimbing utama atas kesediaan waktu, tenaga, pemikiran, dan pengarahan dalam proses penyusunan skripsi.
2. Bapak Subian Saidi S.Si., M.Si. selaku pembimbing kedua atas kesediaan waktu, tenaga, pemikiran,dan pengarahan yang telah diberikan.
3. Bapak Drs. Nusyirwan, M.Si. selaku pembahas atas kesediaan waktu dan pemikiran dalam memberikan evaluasi, arahan, dan saran yang membangun dalam proses penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D. selaku pembimbing akademik yang telah memberi arahan,nasihat, dan meluangkan waktunya kepada penulis selama proses perkuliahan.
5. Bapak Tiryono Ruby, Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika atas izin dan bantuan selama masa pendidikan.

6. Bapak Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D. selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen Jurusan Matematika atas bimbingan, nasihat, dan ilmu yang diberikan selama masa studi.
8. Ibu, Ayah, mas Abram, dan mbak Conda yang telah memberikan doa, dorongan, semangat, dan kasih sayang yang tulus kepada penulis.
9. Yunus Bambang Setiawan yang selalu mendengarkan keluh kesah, menyemangati dan selalu menemani.
10. Tina Maulida teman yang selalu membantu dalam mengerjakan skripsi.
11. Eky, Heni, karindha, Sinta, suci, zefni, Suri, atas kebersamaan, keceriaan,dan dukungannya selama ini, semoga akan terus berlanjut sampai kapanpun.
12. Aiman, Cinkia, Ratna, Retno, dan Sintia, teman-teman satu bimbingan atas bantuan, dan dukungannya dalam menyelesaikan skripsi ini, kita pasti bisa!
13. Anggri, Lisa, Ratna,Winda dan Ayu, bidadari-bidadari cantik kosan wisma Idola yang selalu ada, tempat untuk curhat dan ngegalau, semangat teman!
14. Teman-teman seperjuangan Matematika angkatan 2013 atas keakraban dan kebersamaan selama ini.

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam skripsi ini. Oleh karena itu, kritik dan saran dari pembaca akan sangat bermanfaat bagi penulis. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membaca.

Bandar Lampung, Mei 2017

Penulis,

Auleria Vinny Viola Saraswati

DAFTAR ISI

Halaman

III. METODOLOGI PENELITIAN

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

V. KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

Tabel **Halaman**

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Asuransi jiwa adalah usaha kerja sama atau koperasi dari sejumlah orang yang sepakat memikul kesulitan keuangan bila terjadi musibah terhadap salah seorang anggotanya (R.K Sembiring, 1986). Perusahaan asuransi jiwa menyediakan sebuah produk berupa Polis. Polis yaitu suatu kontrak perjanjian tertulis yang menyediakan produk untuk menanggung risiko keuangan ketika pihak tertanggung (nasabah) meninggal dunia kepada ahli waris dari pihak tertanggung. Pihak tertanggung akan membayar premi kepada perusahaan asuransi pada setiap periode waktu yang telah ditandatangani di dalam kontrak. Ada beberapa macam asuransi jiwa yang ada di Indonesia diantaranya yaitu asuransi jiwa seumur hidup. Asuransi seumur hidup adalah suatu asuransi yang menjamin bahwa ahli waris nasabah akan menerima sejumlah uang kapan sajapun nasabah meninggal sedangkan besar premi tidak berubah (tetap).

Pada asuransi jiwa seumur hidup terdapat fungsi-fungsi aktuaria yang dapat dihitung dengan menggunakan pendekatan hukum mortalita dan tabel mortalita. Menurut (Bowers dkk, 1997), pendekatan dengan hukum mortalita digunakan karena hasil dari pendekatan tersebut berbentuk kontinu. Dari pendekatan beberapa hukum mortalita tersebut dapat dikaji fenomena-fenomena yang terjadi pada suatu populasi. Terdapat beberapa hukum mortalita yang dikenal seperti De Moivre, Gompertz, Makeham, dan Weibull. Hukum Mortalita Gompertz dan Makeham adalah salah satu hukum mortalita yang sering digunakan dan memiliki kemiripan dengan distribusi pola kematian penduduk di suatu daerah. Hukum mortalita tersebut akan digunakan sebagai perbandingan untuk memberikan gambaran terhadap laju kematian pada tabel Mortalita.

Salah satu fungsi-fungsi aktuaria pada asuransi jiwa seumur hidup adalah *Actuarial present value* (premi tunggal). Menurut Futami (1993), *Actuarial present value* (premi tunggal) adalah pembayaran premi pada perusahaan asuransi yang dilakukan pada waktu kontrak asuransi disetujui dan selanjutnya tidak ada pembayaran lagi. Dalam perhitungan *Actuarial present value* (premi tunggal) digunakan tingkat suku bunga konstan dan stokastik. Penentuan *Actuarial present value* (premi tunggal) pada referensi-referensi yang ada banyak menggunakan tingkat suku bunga konstan (Sanjaya dkk, 2011). Kondisi ini kurang realistik mengingat asuransi jiwa merupakan jangka panjang yang sudah seharusnya memperhatikan fluktuasi tingkat bunga yang akan datang. Dengan kata lain, tingkat bunga itu tidak konstan dari waktu ke waktu, maka upaya untuk memasukkan unsur stokastik dengan tingkat suku bunga stokastik, khususnya model tingkat bunga derivatif diharapkan dapat memberikan pendekatan teori yang lebih akurat dalam menggambarkan perilaku tingkat bunga. Oleh karena itu dalam penelitian ini akan digunakan tingkat suku bunga Stokastik yaitu tingkat suku bunga yang mengikuti model CIR.

Tingkat suku bunga yang mengikuti model CIR *(Cox Ingersoll-Ross)* adalah model tingkat suku bunga stokastik yang memiliki sifat *mean reversion* yang merupakan kecenderungan tingkat bunga untuk kembali menuju rata-rata jangka panjang dari tingkat bunga. Setelah pendekatan model dilakukan dan data dipergunakan, akan di bahas tingkat *error* dari masing-masing nilai tunai manfaat. Oleh karena itu penulis akan melakukan penelitian dengan judul, "*Actuarial Present Value* Manfaat Asuransi Jiwa Seumur Hidup Berdasarkan Tabel Mortalita Hukum Makeham Dan Hukum Gompertz Dengan Suku Bunga CIR", dengan produk asuransi yang digunakan adalah asuransi jiwa seumur hidup.

1.2 Tujuan

Adapun Tujuan dalam penelitian ini adalah :

1. Menentukan APV *(Actuarial Present Value)* dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup yang dibayarkan diakhir tahun kematian dengan tingkat suku bunga konstan dan tingkat suku bunga mengikuti model CIR.
2. Menentukan APV *(Actuarial Present Value)* dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup berdasarkan hukum mortalita Makeham yang dibayarkan sesaat setelah kematian dengan tingkat suku bunga konstan dan tingkat suku bunga mengikuti model CIR.
3. Menentukan APV *(Actuarial Present Value)* dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup berdasarkan hukum motalita Gompertz yang dibayarkan sesaat

setelah kematian dengan tingkat suku bunga konstan dan tingkat suku bunga mengikuti model CIR.

4. Menentukan tingkat *error* APV *(Actuarial Present Value)* dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup.
5. Membandingkan APV *(Actuarial Present Value)* dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup berdasarkan hukum Makeham dan hukum Gompertz.

1.3 Manfaat

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Dapat mengaplikasikan materi yang sudah didapatkan di bangku perkuliahan
2. Dapat mengetahui nilai APV *(Actuarial present Value)* santunan asuransi jiwa seumur hidup berdasarkan hukum mortalita Makeham dan Gompertz dengan suku bunga CIR.

II. LANDASAN TEORI

2.1 Fungsi Kelangsungan Hidup (*Survival Function*)

Misalkan (x) adalah seseorang yang berusia x tahun pada saat polis asuransi ditandatangani dan sedangkan jarak waktu antara (x) sampai meninggal dunia (X) akan disebut sisa umur bagi (x), sehingga terdapat peubah acak $T(x)$, yaitu $T(x) = X - x$ untuk $x \geq 0$. $T(x)$ menyatakan sisa umur bagi.(x).

Fungsi distribusi dari $T(x)$ dinyatakan dengan $F(t)$ dan disefinisikan (Bowers,dkk., 1997) dengan :

$$F(t) = P(T(x) \leq t), \qquad t \geq 0$$

$F(t)$ menyatakan peluang seseorang yang berusia x tahun akan meninggal sebelum berusia $x + t$ tahun.

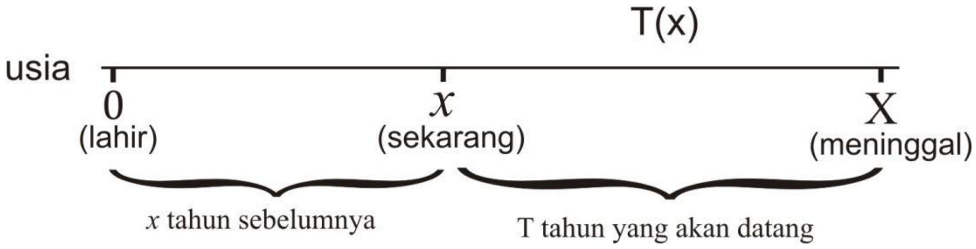
Secara umum fungsi kelangsungan hidup dapat dinyatakan dengan :

$$s(x+t) = 1 - F_{T(x)}(t) = P(T(x) > t) \qquad t > 0 \qquad (2.1.1)$$

$s(x+t)$ adalah peluang orang berusia x tahun akan hidup mencapai usia $x + t$ tahun.

2.2 Peluang Waktu Sisa Hidup

Dalam fungsi kelangsungan hidup untuk kasus kontinu, simbol $T(x)$ menyatakan sisa umur bagi seseorang berusia x atau $T(x) = X - x$, dengan fungsi distribusinya dinyatakan sebagai berikut :



Gambar 2.1 Peluang waktu sisa hidup

Dengan notasi peluangnya

$$ {}_tq_x = P(T(x) \leq t) $$

$$ {}_tp_x = 1 - {}_tq_x = P(T(x) > t) \qquad (2.2.1) $$

Maka fungsi distribusi T(x) nya dalah:

$$
\begin{aligned}
F_{T(x)}(x) &= P(T(x) \leq t | X > x) \\
&= P(X - x \leq t | X > x) \\
&= P(x \leq X \leq x + t | X > x) \\
&= \frac{F_x(x+t) - F_x(x)}{1 - F_x(x)} \\
&= \frac{\big(1 - s(x+t)\big) - \big(1 - s(x)\big)}{s(x)} \\
&= \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{s(x)}{s(x)} - \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

$$= 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

$$= \ {}_tq_x \qquad (2.2.2)$$

Maka,

$$P(T(x) > t) = 1 - P(T(x) \leq t)$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right)$$

$$= \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

$$= \ {}_tp_x \qquad (2.2.3)$$

Jika u=1, maka peluang meninggal yang ditangguhkan dapat dinyatakan dengan ${}_{t|}q_x$, sehingga :

$${}_{t|}q_x = \ {}_tP_x \ . \ q_{x+t} \qquad (2.2.4)$$

Dalam kasus diskrit, peluang meninggal sering disebut *Curtate Future Life Time*, dengan simbol $K(x)$. Secara teori, definisi dari peubah acak $K(x)$ adalah $K(x) = [T(x)]$, dengan simbol $[T(x)]$ yang menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan dari $T(x)$. Adapun secara informal $K(x)$ menyatakan berapa kali lagi ulang tahun yang dapat dirayakan oleh (x) sebelum ia meninggal dunia atau peubah acak diskrit yang menyatakan lamanya hidup (x). $K(x)$ adalah variabel acak diskrit dengan fungsi distribusi yang dinyatakan dengan:

$$P(K(x) = k) = P(K = k)$$

$$= P([T(x)] = k)$$

$$= P\left(k < T_{(x)} < k + 1\right)$$

$$= P\left(T_{(x)} < k + 1\right) - P\left(T_{(x)} < k\right)$$

$$= {}_{k+1}q_x - {}_kq_x$$

$$= \left(1 - {}_{k+1}p_x\right) - \left(1 - {}_kp_x\right)$$

$$= \left({}_kp_x - {}_{k+1}p_x\right)$$

$$= \left({}_kp_x . q_{x+k}\right)$$

$$= {}_{k|}q_x \qquad (2.2.5)$$

2.3 Laju Tingkat Kematian

Laju kematian seseorang yang baru lahir dan akan meninggal antara usia x dan $x + \Delta x$ dengan syarat pada usia x dapat dinyatakan dengan :

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x \,|X > x) = \frac{F_x(x + \Delta x\,) - F_x(x)}{1 - F_x(x)}$$

Karena $F_x(x + \Delta x\,) - F_x(x)$ dapat dinyatakan sebagai fungsi limit, maka :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_x(x + \Delta x\,) - F_x(x)}{1 - F_x(x)} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} F_x(x + \Delta x\,) - F_x(x) . \frac{\Delta x}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 - F_x(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F_x(x + \Delta x\,) - F_x(x)}{\Delta x} . \Delta x}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 - F_x(x)}$$

$$= \frac{F'(x)\Delta x}{1 - F(x)}$$

$$\cong \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

Untuk setiap usia x, laju tingkat kematian dari seseorang yang berusia x tahun dapat dinyatakan dengan :

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \qquad (2.3.1)$$

Atau

$$\mu(x+t) = \frac{f(x+t)}{1-F(x+t)} \qquad (2.3.2)$$

Dengan $\mu(x+t)$ adalah probabilitas (peluang) sisa umur hidup seseorang yang berusia x tahun antara $t + \Delta t$ tahun dengan syarat ia masih hidup pada usia x sampai $x + t$ tahun.

Karea $s(x)$ = 1- $F(x)$ atau $F(x)$= 1- $s(x)$, maka :

$$F'(x) = f(x) = -s'(x)$$

Sehingga diperoleh nilai laju kematian pada usia x adalah :

$$\mu(x) = \frac{-s'(x)}{s(x)} = \frac{-1}{s(x)} \cdot \frac{d\big(s(x)\big)}{d(x)}$$

$$= \frac{-d \ln s(x)}{ds(x)} \cdot \frac{d\big(s(x)\big)}{d(x)}$$

$$= \frac{-d \ln s(x)}{d(x)}$$

$$\mu(x)dx = -d \ln s(x)$$

Dengan mengganti x menjadi y, maka diperoleh :

$$\mu(y)dy = -d \ln s(y)$$

Dan dengan menggunakan intergral tertentu pada batas x sampai $x+t$ maka diperoleh :

$$\int_x^{x+t} \mu(y)dy = -\int_x^{x+t} d \ln s(y)$$

$$= -\ln s(y) \,|_x^{x+t}$$

$$= -\{\ln s(x+t) - \ln s(x)\}$$

$$= -\ln\left(\frac{s(x+t)}{s(x)}\right)$$

$$= -ln\ {}_tp_x$$

$${}_tp_x = e^{-\int_x^{x+t}\mu(y)dy} \qquad (2.3.3)$$

Jika nilai laju kematiannya konstan ($\mu(y) = \mu$) untuk semua $y \geq 0$, artinya besar nilai dari laju tingkat kematian adalah sama untuk semua usia nasabah yang hidup, maka diperoleh :

$$s(x) = {}_xp_0 = e^{-\int_0^x \mu(y)dy} = e^{-\mu x} \qquad (2.3.4)$$

Diketahi sebelumnya bahwa ${}_tq_x$ adalah fungsi distribusi dari $T(x)$, sehingga fungsi densitas dari $T(x)$adalah:

$$f(t) = \frac{d}{dt}\ {}_tq_x$$

$$= \frac{d}{dt}(1 - {}_tq_x)$$

$$= \frac{d}{dt}(1 - \frac{s(x+t)}{s(x)})$$

$$= \frac{d}{dt}(-\frac{s(x+t)}{s(x)})$$

$$= -\frac{s(x+t)}{s(x)}$$

$$= \frac{s(x+t)}{s(x)} \cdot -\frac{s'(x+t)}{s(x)}$$

$$= {}_tp_x\ \mu(x+t) \qquad (2.3.5)$$

2.4 *Interest* (Bunga)

Bunga merupakan pembayaran yang dilakukan oleh peminjam sebagai balasan jasa atas pemakaian uang yang dipinjam. Jenis bunga yang digunakan adalah bunga majemuk. Bunga majemuk adalah perhitungan bunga dimana besar pokok jangka investasi selanjutnya dalah besar pokok sebelumnya di tambah dengan besar bunga yang diperoleh (Futami, 1993). Besar bunga majemuk dapat dihutung dengan menggunakan rumus :

$$I = P_0 \,.\, i^n$$

Dengan :

I = *Interest value* (nilai bunga)

P_0 = Pokok investasi

i = *rate of interest annually* (tingkat suku bunga)

n = *time* (jangka waktu investasi)

Serelah n tahun nilai total investasi menjadi :

$$P_n = P_0(1 + i)^n$$

Dalam bunga majemuk didefinisikan suatu fungsi v sebagai berikut :

$$v = \frac{1}{(1 + i)}$$

dapat juga dituliskan sebagai berikut :

$$P_0 = \frac{P_n}{(1+i)^n} = v^n P_n$$

Jika n=1 dan P_1 = 1, maka $P_0 = v$, v adalah nilai sekarang (*present value*) dari pembayaran sebesar 1 satuan yang dilakukan 1 tahun kemudian.

Didefinisikan fungsi tingkat diskon d sebagai berikut :

$$d = 1 - v \tag{2.4.1}$$

Karena v adalah nilai sekarang (*present value*) untuk pembayaran sebesar 1 satuan yang akan dibayarkan 1 tahun kemudian, apabila pembayarannya dilakukan 1 tahun lebih cepat, maka besarnya bunga yang hilang adalah

$$d = 1 - v \quad \text{(Futami, 1993).}$$

Tingkat suku bunga selalu dinyatakan pertahun atau per *annum* (p.a). Tingkat bunga tahunan yang dinyatakan itu apakah diakhiri dengan p.a atau tidak, disebut tingkat bunga nominal (Frensidy, 2010). Simbol untuk tingkat bunga nominal adalah $i^{(k)}$. Untuk suku bunga nominal dan suku bunga diskonto nominal dengan k kali pembayaran dalam satu tahun dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$1 + i \approx \left(1 + \frac{i^k}{k}\right)^k \tag{2.4.2}$$

$$i^{(k)} \approx k\left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1\right]$$

Dengan k adalah banyaknya pembayaran yang dilakukan dalam 1 tahun.

2.5 Laju Tingkatt Suku Bunga (*Force of Interest*)

Didefinisikan bahwa δ dari function $A(t)$ adalah

$$\delta = \frac{d}{dt}\ln A(t) = \frac{A'(t)}{A(t)} \qquad (2.5.1)$$

Dimana :

$$\frac{d}{dt}\ln A(t) = \frac{d}{dt}\ln(A(0)\,a(t)) = \frac{d}{dt}\ln A(0) + \frac{d}{dt}\ln a(t) = \frac{d}{dt}\ln a(t)$$

Sehingga di dapat bahwa

$$\delta = \frac{d}{dt}\ln A(t) = \frac{d}{dt}\ln a(t) \qquad (2.5.2)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.5.1) dan dengan menggunakan turunan limit didapat bahwa :

$$\delta = \frac{A'(t)}{A(t)} = \lim_{h\to 0}\frac{A(t+h) - A(t)}{A(t)h}$$

Tingkat tahunan nominal yang diterima dalam $1/m$ tahun berikutnya ditambah m kali setahun pada waktu t. Dimisalkan bahwa $h = 1/m$, sehingga :

$$\delta = \frac{A'(t)}{A(t)} = \lim_{m\to\infty}\frac{a\left(t+\frac{1}{m}\right) - a(t)}{a(t)\,\frac{1}{m}}$$

Dengan memisalkan $a(t) = (1+i)^t$dan dengan menggunakan persamaan (2.4.2) didapat bahwa

$$\lim_{m\to\infty} i^{(k)} = \delta$$

Untuk m $\to \infty$, dengan kata lain pembungaannya dapat dilakukan setiap saat, diperoleh nilai δ dengan menggunakan persamaan (2.5.2)

$$\delta = \frac{d}{dt} \ln a(t)$$

$$\delta = \frac{d}{dt} \ln(1+i)^t$$

$$\delta = \frac{d}{dt} \mathrm{t} \ln(1+i)$$

$$\delta = \ln(1+i) \tag{2.5.3}$$

$$e^{-\delta t} = (1+i)^{-t} = v^t \tag{2.5.4}$$

Dan δ disebut dengan laju tingkat suku bunga (*force of Interest*).

2.6 Formula Ito

Misalkan X_t merupakan proses stokhastik yang didefinisikan sebagai

$$dX(t) = \mu_t dt + \sigma_t dW(t) \tag{2.6.1}$$

Dimana $W(t)$ adalah proses Wiener, maka $f(X(t), t)$ juga merupakan proses stokastik yang mempunyai bentuk persamaan diferensial sebagai berikut :

$$df(X(t), t) = \frac{\partial f}{\partial X} dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} dt + \frac{\partial f}{\partial t} dt \tag{2.6.2}$$

Dan persamaan dapat ditulis sebagai bentuk integral berikut ini :

$$f\big(T, X(T)\big) - f(X(0), 0) = \int_0^T \frac{\partial f}{\partial X} dX(t) + \int_0^T \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{\partial f}{\partial t}\right) dt \qquad (2.6.3)$$

(Cox dkk, 1985).

2.7 Model Suku Bunga CIR

Model tingkat suku bunga CIR merupakan model equilibrium yang diperkenalkan pada tahun 1985. Model CIR menjamin tingkat suku bunga bernilai positif dan memiliki sifat mean reversion atau mempunyai kecenderungan kembali menuju rata-rata. Bentuk dari model CIR adalah :

$$dr(t) = k\big(\theta - r(t)\big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dz \qquad (2.7.1)$$

dengan

$r(t)$: tingkat suku bunga pada waktu t

k : kecepatan $r(t)$ kembali menuju θ

θ : rata-rata jangka panjang tingkat suku bunga

σ : volatility dari tingkat suku bunga

dz : proses Wiener

(Cox dkk, 1985).

Dengan menggunakan formula Ito (2.6.1) dapatkan penyelesaian model CIR sebagai berikut :

$$r(t) = e^{-kt}r(0) + \theta(1 - e^{-kt}) + \int_0^t \sigma e^{-k(t-u)}\sqrt{r(u)}dW(u)$$

Didalam tingkat suku bunga yang mengikuti model CIR terdapat persamaan

$$E\left(e^{\int_t^T r(s)ds}\middle|F_t\right) = P(t.T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)} \qquad (2.7.2)$$

Persamaan tersebut adalah persamaan *zero coupon bond* (harga obligasi) yang mengikuti model tingkat suku bunga CIR. Persamaan *zero coupo bond* menurut Cox, dkk. (1985) adalah suatu kontrak hutang yang dibuat saat t dengan masa jatuh tempo T yang menjamin pembeli bond menerima pembayaran bunga dan pkok hutang pada saat T tanpa ada pembayaran secara periodik. *Zero coupo bond* atau harga obligasi adalah harga yang didiskon dari pembayaran yang akan diterima pemegang obligasi selama masa kepemilikannya. Misalkan $P_T(r,T)(t \leq T$ menyatakan harga pada waktu t dari *zero coupon bond* dengan waktu jatuh tempo T dengan asumsi bahwa $P_T(r,T) = 1$ untuk semua r, dengan :

$$A(t,T) = \left[\frac{2\gamma\, e^{(k+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma+k)(e^{(T-t)}-1)+2\gamma}\right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}}$$

$$B(t,T) = \frac{2\left(e^{(T-t)}-1\right)}{(\gamma+k)(e^{(T-t)}-1)+2\gamma}$$

dengan $\gamma = \sqrt{k^2+2\sigma^2}$

Sehingga

$$E\left(e^{\int_t^T r(s)ds}\middle|F_t\right) = P(t.T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

$$= \underbrace{\left[\frac{2\gamma\, e^{(k+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma+k)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}}}_{A(t,T)} \; exp\left(\underbrace{\frac{2\left(e^{(T-t)}-1\right)}{(\gamma+k)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}}_{B(t,T)}.r(t)\right)$$

Jika $\gamma = d$ dan $T - t = \tau$, dengan memisalkan $P_2(t)$ sebagai ekspetasi nilai tunai dari pembayaran sebesar 1 unit pada saat t untuk tingakt suku bunga yang mengikuti model CIR,didapat

$$E\left(e^{\int_t^T r(s)ds} \middle| F_t\right) = P_2(t) = \left(\frac{2d\, e^{\left(\frac{k+d}{2}\tau\right)}}{e^{(\tau d)}(k+d)+d-k}\right)^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}} exp\left(-\frac{2r(0)\left(e^{(\tau d)}-1\right)}{e^{(\tau d)}(k+d)+d-k}\right) \quad (2.7.3)$$

Dengan $d = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$ dan $r(t), k, \theta, \sigma$ merupakan konstanta positif (Hull, 2003).

2.8 Tabel Mortalitas

Tabel mortalitas adalah cara ringkas untuk menunjukan probabilitas dari anggota pada suatu populasi yang hidup atau mati pada usia tertentu. Tabel mortalitas (*life tables*) digunakan untuk memeriksa perubahan kematian dari populasi jaminan sosial dari waktu ke waktu (Bell dan Miller, 2005).

Pada tabel mortalitas terdapat variabel l_x dan d_x. l_x manyatakan jumlah orang yang diharapkan masih hidup sampai usia x tahun dari sekelompok orang yang jumlahnya l_0 ketika baru lahir. Dalam hal ini, l_0 yang menyatakan banyaknya bayi yang baru lahir diasumsikan mempunyai fungsi survival sama dengan s(x). Misalkan $l_0 = 100.000$, lalu diberikan indeks $j = 1, 2, 3{,}3 \ldots\ldots l_0$ (orang ke-1, ke-2, ...,ke-l_0) dan $\mathcal{L}(x)$ menyatakan banyaknya bayi yang hidup sampai dengan usia x, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{j=1}^{l_0} l_j \quad (2.8.1)$$

Dimana I_j adalah indikator untuk bayi yang bertahan hidup dari j, dan dapat pula dinyatakan dengan :

$$I_j = \begin{cases} 1, & jika\ j\ hidup\ sampai\ dengan\ x \\ 0, & selainnya \end{cases}$$

Karena I_j adalah random variabel, dan berdasarkan asumsi bahwa l_0 mempunyai fungsi suvival yang sama dengan s(x), maka diperoleh nilai peluangnya sebagai berikut :

$$P(I_j = 1) = s(x) \tag{2.8.2}$$

$$P(I_j = 0) = 1 - s(x) \tag{2.8.3}$$

Dari persamaan (2.8.2) dan (2.8.3) diperoleh nilai harapan dari I_j sebagai berikut:

$$E[I_j] = 1. s(x) + 0. (1 - s(x)) = s(x)$$

Sehingga nilai ekspetasi dari $\mathcal{L}(x)$ dapat dinyatakan dengan:

$$E[\mathcal{L}(x)] = E\left[\sum_{j=1}^{l_0} I_j\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{l_0} E[I_j]$$

$$= s(x) + s(x) + \cdots + s(x)$$

$$l_x = l_0 . s(x) \tag{2.8.4}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (2.3.4) didapat

$$l_x = l_0 \cdot {}_0p_x$$

$$l_x = l_0 \,.\exp(\int_0^x \mu_t \, dt) \qquad (2.8.5)$$

Selanjutnya variabel d_x menyatakan banyaknya orang yang berusia x tahun akan meninggal sebelum mencapai usia $x + 1$ tahun.

Misalkan ${}_nD_x$ menyatakan banyaknya bayi yang meninggal antara usia x tahun sampai dengan usia $x + n$ tahun, maka berlaku persamaan berikut :

$$P(x < X < x + n) = s(x) - s(x + n)$$

Selanjutnya indikator yang berlaku adalah sebagai berikut :

$$I_j = \begin{cases} 1, & jika\ j\ meninggal\ antara\ usia\ x\ sampai\ dengan\ x + n\ tahun \\ 0, & selainnya \end{cases}$$

Karena I_j adalah random variabel, maka akan diperoleh nilai peluang sebagai berikut :

$$P\left(I_j = 1\right) = s(x) - s(x + n) \qquad (2.8.6)$$

$$P\left(I_j = 0\right) = 1 - \{s(x) - s(x + n)\} \qquad (2.8.7)$$

Dari persamaan (2.8.6) dan (2.8.7), diperoleh nilai harapan dari I_j sebagai berikut:

$$E\left[I_j\right] = 1\,.\,s(x) - s(x + n) + 0\,.\,(1 - \{s(x) - s(x + n)\}) = s(x) - s(x + n)$$

Sehingga nilai ekspetasi dari ${}_nD_x$ dapat dinyatakan dengan :

$$E[\,{}_{n}D_x] = E\left[\sum_{j=1}^{l_0} I_j\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{l_0} E[I_j]$$

$${}_{n}d_x = l_0\,.\{s(x) - s(x+n)\}$$

$${}_{n}d_x = l_0 . s(x) - l_0 . s(x+n)$$

$${}_{n}d_x = l_x - l_{x+n} \qquad (2.8.8)$$

dimana ${}_{n}d_x$ menyatakan banyaknya orang yang berusia x tahun meninggal sebelum mencapai usia $x + n$ tahun.

Berdasarkan persamaan (2.8.4) dan (2.8.8) diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$l_x = l_0\,.s(x) \rightarrow s(x) = \frac{l_x}{l_0}$$

$${}_{x}p_0 = \frac{l_x}{l_0} \qquad (2.8.9)$$

dan

$${}_{x}q_0 = 1 - {}_{x}p_0 = 1 - \frac{l_x}{l_0} = \frac{l_0 - l_x}{l_0} = \frac{d_x}{l_0} \qquad (2.8.10)$$

Sehingga peluang (x) akan meninggal sebelum mencapai $x + t$ tahun dapat dinyatakan dengan :

$$ {}_tq_x = 1 - {}_tp_x $$

$$ {}_tq_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} $$

$$ {}_tq_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} $$

$$ {}_tq_x = 1 - {}_td_x.\frac{1}{l_x} \qquad (2.8.11) $$

dan sebuah peluang meninggal yang ditangguhkan atau kondisi yang menyatakan bahwa x akan berlangsung hidup sampai t tahun meninggal dalam u tahun, didefinisikan sebagai berikut :

$$ {}_{t|u}q_x = 1 - {}_{t|u}p_x $$

Jika $u = 1$, maka berdasarkan (2.2.4) diperoleh :

$$ {}_{t|}q_x = {}_tp_x \; q_{x+t} $$

$$ {}_{t|}q_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \, . \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_{x+t}} $$

$$ {}_{t|}q_x = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} \qquad (2.8.12) $$

2.9 Hukum Mortalita

Terdapat tiga pembenaran utama untuk mendalilkan bentuk analitik mortalitas atau fungsi survival. Yang pertama adalah filosofis. Banyak fenomena yang dipelajari di fisika dapat dinyatakan dengan rumus sederhana. Beberapa penulis menyarankan bahwa kelangsungan hidup manusia dapat diatur dengan menggunakan hukum persamaan sederhana. Pembenaran yang kedua, yaitu sesuatu yang praktis. Lebih mudah untuk menyatakan fungsi dengan beberapa parameter daripada harus menyatakan tabel mortalitas dengan kemungkinan 100 parameter atau peluang mortalitasnya. Pembenaran yang ketiga, untuk fungsi analitik sederhana survival adalah lebih mudah untuk mengestimasi beberapa parameter dari suatu fungsi data mortalitas (Bowers,dkk., 1997). Artinya pendekatan dengan hukum mortlaita digunakan karena hukum mortalita memiliki formula sederhana yang dapat menjelaskan fenomena yang terjadi secara efisien, praktis, dan cenderung lebih mudah untuk mengestimasi beberapa fungsi dari data mortalita.

Terdapat beberapa hukum mortalita yang terkenal yaitu hukum mortalita De Moiver (1724), Gompertz (1825), Makeham (1860), dam weibull (1939). Dari beberapa hukum mortalita tersebut, yang akan digunakan yaitu hukum mortalita Makeham dan hukum mortalita Gompertz.

2.10 Distribusi Gompertz

Distribusi Gompertz sangat sering digunakan untuk mendeskripsikan suatu distribusi kematian. Pada tingkat terendah kematian pada bayi dan anak-anak, penggambaran percepatan mortalita Gompertz meluas sampai rentang seumur hidup pada suatu populasi tanpa mengamati perlambatan pola kematian. Maka, percepatan mortalita dari distribusi Gompertz yaitu

$$\mu_x = Bc^x \tag{2.10.1}$$

Dengan B > 0, c > 1, x ≥ 0 (Jordan, 1991).

Fungsi survival distribusi Gompertz dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$s(x) = exp\left(-\int_0^x \mu(x)\,dx\right)$$

$$= exp\left(-\int_0^x Bc^x\,dx\right)$$

$$= exp\left(-B\left(\frac{1}{\ln c}c^x\right)\right)\Big|_0^x$$

$$= exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)$$

Dari fungsi survivalnya, dapat ditentukan fungsi distribusi kumulatif (*cumulative distribution function*) dari distribusi Gompertz yaitu :

$$F(x) = 1 - s(x) = \left(1 - exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

Densitas (*Probability density function*) dari distribusi Gompertz sebagai berikut :

$$f(x) = F'^{(x)} = \frac{d}{dx}\left(1 - exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\left(-exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

$$= \left(-\frac{B}{\ln c}(\ln c \, . \, c^x)\right)\left(-exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

$$= (Bc^x)\left(exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

Fungsi peluang ${}_tp_x$ dari hukum mortalita Gompertz sebagai berikut :

$${}_tp_x = exp\left(-\int_x^{x+t} \mu(x)\, dx\right)$$

$$= exp\left(-\int_x^{x+t} Bc^x dx\right)$$

$$= exp\left(-B.\frac{1}{\ln c}.c^x\right)\Big|_{x}^{x+t}$$

$$= exp\left(-\frac{B}{\ln c}(c^{x+t} - c^x)\right)$$

$${}_tp_x = exp\left(-\frac{Bc^x}{\ln c}(c^t - 1)\right) \qquad (2.10.2)$$

2.11 Hukum Mortalita Gompertz

Benjamin Gompertz (1825), menjalani penelitian seraya menghitung nilai anuitas hidup, menyadari bahwa jika nilai percepatan mortalita bernilai konstan, maka tanpa memperhatikan usia nilai anuitas hidup akan sama walaupun pada usia 20 atau pada usia 65. Namun, pada kenyataannya tidak ada kasus seperti itu. Harga anuitas akan jauh lebih mahal untuk seseorang yang berusia 65 daripada seseorang yang berusia 20. Gompertz (1825) menduga kematian mungkin terjadi karena dua penyebab umum; satu, peluang tanpa kecenderungan sebelumnya untuk meninggal atau rusak; penyebab yang lain, yaitu memburuknya kondisi/keadaan, atau peningkatan ketidakmampuan untuk menahan kerusakan (Kunimura, 1997).

Di dalam penelitian Bejamin Gompertz (1825) mengenai daya tahan kekuatan pria dalam kerentanan kematiannya, Gompertz menyatakan kebalikan/ perlawanan dari kerentanan pria untuk kematiannya dengan $\frac{1}{\mu_x}$. Lalu, Gompertz mendefinisikan percepatan mortalitas adalah sebagai berikut

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu_x}\right) = -h\frac{1}{\mu_x}$$

Dalam hal ini berarti kekuatan untuk menghindarkan dari kematian *(Escaping Power from Death)* dan ini bertolak secara proposional dari kekuatan itu sendiri. Sehingga didapat

$$\ln\left(\frac{1}{\mu_x}\right) = -hx - \ln B \quad \text{(Futami, 1993:54).}$$

Dimana $-\ln B$ adalah konstanta dan misalkan $\mathrm{h} = \ln(c)$, maka fungsi penyerdehanaan menurut Gompertz adalah sebagai berikut

$$\ln\left(\frac{1}{\mu_x}\right) = -\ln(c)x - \ln B$$

$$\frac{1}{\mu_x} = e^{-(\ln(c)x + \ln B)}.e^{-\ln B}$$

$$\mu_x = e^{\ln(c)x + \ln B}$$

$$\mu_x = \left(e^{\ln(c)}\right)^x e^{\ln B}$$

Dengan $e^{\ln(c)} = c$ sehingga

$$\mu_x = Bc^x$$

Dimana B>0, c>1, x>0.

Dimana dapat didefinisikan, parameter B dikaitkan dengan peluang atau kemungkinan, dan parameter c adalah peningkatan ketidakmampuan menahan kerusakan. Dari uraian tersebut, dapat dilihat bahwa distribusi Gompertz memiliki ciri khas yaitu memiliki pola tingkat kegagalan (*failure rate*) yang meningkat. Jika c =1, tingkat kematian akan menjadi konstan, dan untuk c < 0 maka distribusi Gompertz akan memiliki pola laju tingkat kematian yang menurun. Hal ini sesuai dengan filosofinya yang menyatakan bahwa seiring berjalannya waktu, maka tingkat ketidakampuan menahan kerusakan akan meningkat. Sama halnya, dengan memberikan B dengan nilai yang positif akan menjamin bahwa pada setiap waktunya pasti akan terdapat kemungkinan peluang kematan yang positif (Kunimura, 1997).

2.12 Distribusi Makeham

Distribusi Makeham memberikan aproksimasi yang lebih baik untuk suatu disribusi data mortalita. Distribusi Makeham merupakan suatu fungsi perluasan dari distribusi Gompertz. Perbedaan antara keduanya yaitu fungsi distribusi Makeham menggunakan parameter tambahan dai fungsi distribusi Gompertz. Berikut adalah percepatan mortalita distribusi Makeham.

$$\mu_x = A + Bc^x \tag{2.12.1}$$

Dengan B > 0, A ≥ -B, c > 1, x ≥ 0, maka fungsi survival model mortalita Makeham adalah :

$$s(x) = exp\left(-\int_0^x \mu(x)\, dx\right)$$

$$= exp\left(-\int_0^x A + Bc^x\, dx\right)$$

$$= exp\left(-Ax - B\left(\frac{1}{\ln c}c^x\right)\right)\Big|_0^x$$

$$= exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)$$

Dari survivalnya dapat ditentukan fungsi distribusi kumulatif (*Cumulative distribution function*) dari distribusi Makeham yaitu :

$$F(x) = 1 - s(x) = \left(1 - exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

Densitas (*Probability density function*) dari distribusi Makeham sebagai berikut :

$$f(x) = F'^{(x)} = \frac{d}{dx}\left(1 - exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\left(-exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

$$= \left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(\ln c \,.\, c^x)\right)\left(-exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

$$= (A + Bc^x)\left(exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)\right)$$

Fungsi peluang $\,_tp_x$ dari hukum mortalita Makeham sebagai berikut :

$$\,_tp_x = exp\left(-\int_x^{x+t} \mu(x)\, dx\right)$$

$$= exp\left(-\int_x^{x+t} A + Bc^x dx\right)$$

$$= exp\left(-Ax - B.\frac{1}{\ln c}.c^x\right)\Big|_{x}^{x+t}$$

$$= exp\left(-At - \frac{B}{\ln c}(c^{x+t} - c^x)\right)$$

$$\,_tp_x = exp\left(-At - \frac{Bc^x}{\ln c}(c^t - 1)\right) \qquad (2.12.2)$$

2.13 Hukum Mortalita Makeham

Hukum Mortalita Makeham merupakan modifikasi dari hukum mortalita Gompertz. Dalam pernyataan sebelumnya mengenai penyabab umum terjadinya kematian, Gompertz hanya menggunakan penyebab kedua dalam menentukan hukum mortalitanya. Hal tersebut membuat Makeham (1860) menggabungkan dua penyebab tersebut. Dengan pengaruh dari penyebab pertama yaitu kesempatan akan menjadi tambahan konstanta pada percepatan mortalita Gompertz (Jordan, 1991).

$$\mu_x = A + Bc^x$$

Dengan B > 0, A ≥ -B, c > 1, x ≥ 0

Konstanta A dapat mewakili faktor terjadinya kecelakaan, dan Bc^x dapat mewakili faktor usia. Oleh karena itu, masing-masing hukum melibatkan sejumlah parameter yang tidak ditentukan, karenanya masing- masing dapat berupa bilangan tak terbatas dari fungsi survival yang berbeda. Hukum mortalita ini hanya membentuk fungsi matematika yang diasumsikan dan tidak menghasilkan pengukuran numerik mortalitas sampai terpilihnya nilai yang sesuai untuk parameter tersebut. Hali ini akan ditemukan bahwa nilai dari masing-masing parameter terletak dalam kisaran batas waktu ketika fungsi survivalnya mengikuti pola mortalitas pada umumnya. Misalnya untuk hukum mortalita Makeham, kisaran batas parameternya berada di

$$0{,}0001 < A < 0{,}003$$

$$10^{-6} < B < 10^{-3}$$

$$1{,}08 < C < 1{,}12$$ (Jordan, 1991).

Pada kasus tertentu, jika nilai $A = 0$ pada hukum mortalita Makeham, maka dapat menjadi hukum mortalita Gompertz. Dan jika nilai $c = 1$ pada hukum mortalita Gompertz dan Makeham, maka dapat menghasilkan distribusi eksponensial (laju tingkat kematian konstan).

2.14 Asuransi Jiwa

Asuransi jiwa adalah usaha kerja sama atau koperasi dari sejumlah orang yang sepakat memikul kesulitan keuangan bila terjadi musibah terhadap salah seorang anggotanya (R.K Sembiring, 1986).

2.14.1 Jenis-jenis Asuransi Jiwa

Pada asuransi dengan perhitungan kontinu, pembayaran benefit kepada ahli waris nasabah dilakukan sesaat setelah nasabah meninggal dunia. Jumlah dan waktu pembayaran benefit pada asuransi jiwa tergantung pada panjang interval dari dikeluarkannya polis sampai nasabah meninggal dunia. Berdasarkan uraian tersebut, asuransi jiwa terdiri dari fungsi benefit atau santunan (b_t) dan v_t. Fungsi v_t adalah nilai sekarang dari pembayaran b_t dan t adalah panjang interval pada saat polis dikeluarkan sampai dengan (x) meninggal dunia.

Adapun jenis-jenis asuransi jiwa yang umum digunakan adalah sebagai berikut:

1. Asuransi jiwa seumur hidup
2. Asuransi jiwa berjangka
3. Asuransi jiwa endownment murni
4. Asuransi jiwa dwiguna

2.14.2 Asuransi Seumur Hidup *(Whole Life Insurance)*

Asuransi seumur hidup adalah suatu asuransi yang menjamin bahwa ahli waris nasabah akan menerima sejumlah uang kapan sajapun nasabah meninggal sedangkan besar premi tidak berubah (tetap).

1. **Manfaat Dibayarkan Di Akhir Tahun Kematian (Diskrit)**

Jumlah pembayaran manfaat sudah pasti namun waktu pembayaran adalah acak dan mengikuti aturan

$$b_{k+1} = 1 \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$v_{k+1} = v^{k+1} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$Z_{k+1} = v^{k+1} \qquad k \geq 0$$

Pada asuransi jiwa seumur hidup diskrit, kita ketahui bahwa

$$b_{k+1} = 1, \qquad k = 0,1,2,3,\ldots$$

$$v_{k+1} = v^{k+1}, \qquad k = 0,1,2,3,\ldots$$

$$Z = v^{k+1}, \qquad k = 0,1,2,3,\ldots$$

Sehingga rumus APV pada asuransi jiwa seumur hidup diskrit :

$$A_x = E[Z] = \sum_{k=0}^{\sim} v^{k+1}\, P(K = k)$$

Dengan K(x) adalah variabel acak diskrit dengan fungsi distribusi yang dinyatakan pada persamaan (2.2.5) maka didapat:

$$A_x = E[Z] = \sum_{k=0}^{\sim} v^{k+1}\ {}_kp_x . q_{x+k} \qquad (2.14.2.1)$$

Untuk APV dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup

$$A_x = E[Z_{k+1}] = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} \; {}_kp_x . q_{x+k} \qquad (2.14.2.2)$$

Untuk APV dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup dengan tingkat suku bunga mengikuti model CIR dengan faktor diskon $P_2(t)$ pada persamaan (2.7.3)

$$A_x = E[Z_{k+1}] = \sum_{k=0}^{\omega-x} P_2(t) \; {}_kp_x . q_{x+k} \qquad (2.14.2.3)$$

2. Manfaat Dibayarkan Sesaat Terjadi Kematian (Kontinu)

Asuransi seumur hidup ini membayarkan manfaat kepada ahli waris kapanpun di masa depan pada saat nasabah meninggal, dan pembayaran santunan yang dilakukan sesaat setelah nasabah meninggal adalah :

Peubah Acak nilai tunai manfaat :

$$Z_T = b_T \, v_T, \qquad T \geq 0$$

Untuk benefit sebesar satu satuan,

$$Z_T = 1. v_T, \qquad T \geq 0$$
$$Z_T = v_T, \qquad T \geq 0$$

Pada asuransi jiwa seumur hidup Kontinu, kita ketahui bahwa

$$b_T = 1, \qquad T \geq 0$$
$$v_T = v^t, \qquad T \geq 0$$
$$Z_T = v^t, \qquad T \geq 0$$

Sehingga rumus APV pada asuransi jiwa seumur hidup Kontinu :

$$\bar{A}_x = E[Z_T] = \int_0^{\sim} v^t\, f(t)\, dt$$

Ingat Kembali bahwa pada persamaan (2.5.2) bahwa $v = e^{-\delta}$, sehingga

$$\bar{A}_x = E[Z_T] = \int_0^{\sim} v^t\, f(t)\, dt$$

$$\bar{A}_x = E[Z_T] = \int_0^{\sim} e^{-\delta t}\, f(t)\, dt$$

Dan pada persamaan (2.3.5) diketahui bahwa $f(x) = \mu(x+t).\ {}_tp_x$ dan pada persamaan (2.3.3) diketahui bahwa ${}_tp_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu(y)dy}$,oleh karena itu didapat rumus APV nya :

$$\bar{A}_x = E[Z_T] = \int_0^{\sim} e^{-\delta t}\, f(t)\, dt$$

$$\bar{A}_x = E[Z_T] = \int_0^{\sim} e^{-\delta t}\, \mu(x+t).\ {}_tp_x\, dt$$

$$\bar{A}_x = E[Z_T] = \int_0^{\sim} e^{-\delta t} . e^{-\int_x^{x+t} \mu(y)dy} . \mu(x+t)\, dt \qquad (2.14.2.4)$$

(Bowers,dkk., 1997)

Untuk rumus APV manfaat Asuransi jiwa seumur hidup kontinu adalah:

$$\bar{A}_x = E[Z_T] = \int_0^{\omega-x} e^{-\delta t} . e^{-\int_x^{x+t} \mu(y)dy} . \mu(x+t)\, dt \qquad (2.14.2.5)$$

Untuk rumus APV manfaat Asuransi jiwa seumur hidup kontinu berdasarkan hukum mortalita Makeham adalah:

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} e^{-\delta t}\, e^{\left(-At-\frac{Bc^x}{lnc}(C^t-1)\right)}.\ (A + BC^{x+t})\, dt \qquad (2.14.2.6)$$

Untuk rumus APV manfaat Asuransi jiwa seumur hidup kontinu berdasarkam hukum mortalita Gompertz adalah:

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} e^{-\delta t}\, e^{\left(-\frac{Bc^x}{lnc}(C^t-1)\right)}.\ (BC^{x+t})\, dt \qquad (2.14.2.7)$$

Untuk rumus APV manfaat Asuransi jiwa seumur hidup kontinu berdasarkan hukum mortalita Makeham dengan tingkat suku bunga mengikuti mofdel CIR adalah:

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} P_2(t)\, e^{\left(-At-\frac{Bc^x}{lnc}(C^t-1)\right)}.\ (A + BC^{x+t})\, dt \qquad (2.14.2.8)$$

Untuk rumus APV manfaat Asuransi jiwa seumur hidup kontinu berdasarkan hukum mortalita Gompertz dengan tingkat suku bunga mengikuti mofdel CIR adalah:

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} P_2(t)\, e^{\left(-\frac{Bc^x}{lnc}(C^t-1)\right)}.\ (BC^{x+t})\, dt \qquad (2.14.2.9)$$

2.15 Metode Kuadrat Terkecil Nonlinear

Hukum mortalita merupakan bentuk pendekatan terhadap percepatan mortalita sari suatu tabel mortalita. Dalam menentukan nilai premi yang didekati berdasarkan hukum mortalita Makeham dan hukum mortalita Gompertz terdapat modifikasi perhitungan pada percepatan mortalita *force of mortality* $\mu(x+t)$yang melibatkan sejumlah parameter-parameter tertentu. Terdapat beberapa cara dalam menetukan nilai parameter pada hukum mortalita, yakni dengan metode kuadrat terkecil, metode *maximum likelihood estimation* , *trial* dan *error*, dsb. Pada penelitian ini akan digunakan metode kuadrat terkecil non linear (*nonlinear least squares*). Pengestimasian nilai parameter dilakukan dengan menggunakan bantuan perangkat lunak software R.

Model nonlinier merupakan bentuk hubungan antara peubah respon dnegan peubah penjelas yang tidak linear dalam parameter. Secara umum model nonlinear ditulis sebagai berikut :

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i \qquad\qquad i = 1,2,\dots,n$$

dengan

y_i = peubah respon ke-i

$f(x_i)$ = fungsi nonlinear

x_i = peubah penjelas respon ke-i

ε_i = galat ke-i

misalkan model nonlinear yang dipostulat dengan bentuk

$$y_i = f\left(x_1, x_2, \dots, x_p\right) + \varepsilon_i$$

Misalkan $X = \left(x_1, x_2, \dots, x_p\right)$ dan $\theta = \left(\theta_1, \theta, \dots, \theta_p\right)$ maka

$$Y = f(X, \theta) + \varepsilon_i \tag{2.15.2}$$

Maka jumlah kuadrat galat untuk model nonlinear di atas didefinisikan sebagai berikut :

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(X,\theta)\right)^2 \tag{2.15.2}$$

Nilai dugaan kuadrat terkecil bagi θ akan dilambangkan dengan $\hat{\theta}$. Nilai dugaan ini adalah nilai θ yang meminimumkan niali S. Untuk mendapatkan nilai dugaan kuadrat terkecil $\hat{\theta}$ yaitu dengan mendiferensialkan S terhadap θ kemudian disamadenganksn nol (Mustari, 2013).

Diketahui fungsi nonlinear percepatan mortalita Makeham yaitu :

$$\mu_{xt} = A + Bc^{x+t}$$

Misalkan $\mu_{xt} = Y$ dan t=1 maka jumlah kuadrat galat untuk persamaan nonlinear percepatan mortalita Makeham yaitu

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - A_1 - B_1{c_1}^{(x_i+1)}\right)^2 \tag{2.15.3}$$

dengan

Y_i= Peubah respon yang menyatakan percepatan mortalita tabel pada tahun ke-i

A_1= parameter 1 pada fungsi nonlinear percepatan mortalita Makeham

B_1= parameter 2 pada fungsi nonlinear percepatan mortalita Makeham

c_1= parameter 3 pada fungsi nonlinear percepatan mortalita Makeham

x_i= usia(tahun) ke-i

ε_i= galat ke-i

Maka berlaku

$$\frac{dS}{dA_1} = 0 \quad , \frac{dS}{dB_1} = 0 \quad , \frac{dS}{dc_1} = 0$$

Selanjutnya diketahui fungsi nonlinear percepatan mortalita Gompertz yaitu :

$$\mu_{xt} = Bc^{x+t}$$

Misalkan $\mu_{xt} = Y$ dan t=1 maka jumlah kuadrat galat untuk persamaan nonlinear percepatan mortalita Gompertz yaitu

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - B_2 {c_2}^{(x_i+1)} \right)^2 \qquad (2.15.4)$$

dengan

Y_i= Peubah respon yang menyatakan percepatan mortalita tabel pada tahun ke-i

B_2= parameter 1 pada fungsi nonlinear percepatan mortalita Gompertz

c_2= parameter 2 pada fungsi nonlinear percepatan mortalita Gompertz

x_i= usia(tahun) ke-i

ε_i= galat ke-i

Maka berlaku

$$\frac{dS}{dB_2} = 0 \quad , \frac{dS}{dc_2} = 0$$

2.16 Ordinary Least Square (OLS) pada Model CIR

Pada persamaan (2.7.1) dengn menggunakan formula ito (2.6.1) didapat penyelesaian model CIR yaitu :

$$r(t+1) = e^{-k\Delta t} r(t) + \theta(1 - e^{-k\Delta t}) + \in (t+1)$$

Dengan menggunakan metode OLS, persamaan (2.7.1) diubah menjadi bentuk :

$$r_{t+1} - r_t = k(\theta - r_t)\Delta t + \sigma\sqrt{r_t}\varepsilon_t$$

Dengan $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, untuk menggunakan OLS, persamaan ditransformasi ke bentuk :

$$\frac{r_{t+1} - r_t}{\sqrt{r_t}} = \frac{k\theta\Delta t}{\sqrt{r_t}} + k\sqrt{r_t}\,\Delta t + \sigma\varepsilon_t$$

Dengan meminimalkan jumlah kuadrat dari bagian eror $\sum_{t=1}^{n-1}(\sigma\varepsilon_t)^2$ terhadap k dan θ didapat :

$$\hat{k} = \frac{n^2 - 2n + 1 + \sum_{t=1}^{n-1} r_{t+1} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{r_t} - \sum_{t=1}^{n-1} r_t \sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{r_t} - (n-1) \sum_{t=1}^{n-1} \frac{r_{t+1}}{r_t}}{\left(n^2 - 2n + 1 - \sum_{t=1}^{n-1} r_t \sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{r_t}\right)\Delta t} \qquad (2.16.1)$$

$$\hat{\theta} = \frac{(n-1) \sum_{t=1}^{n-1} r_{t+1} - \sum_{t=1}^{n-1} \frac{r_{t+1}}{r_t} \sum_{t=1}^{n-1} r_t}{n^2 - 2n + 1 + \sum_{t=1}^{n-1} r_{t+1} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{r_t} - \sum_{t=1}^{n-1} r_t \sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{r_t} - (n-1) \sum_{t=1}^{n-1} \frac{r_{t+1}}{r_t}} \qquad (2.16.2)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{t=1}^{n-1} \left(\frac{(r_{t+1} - r_t)}{\sqrt{r_t}} - \frac{\hat{\theta}}{\sqrt{r_t}} + \hat{k}\sqrt{r_t} \right)^2} \qquad (2.16.3)$$

Berdasarkan penelitian sebelumnya yaitu penelitian Farah Kristiani (2013) didapat parameter k yaitu 1,1 2,0 3,0 , parameter θ yaitu 0,055 0,070 0,080 dan parameter σ yaitu 0,01 0,20 0,35.

2.17 Tingkat *Error*

Pada pendekatan hukum mortalita terhadap tabel mortalita tentu akan ada perbedaan pada nilai-nilainya. Demikian pula dengan nilai APV manfaat asuransi jiwa seumur hidup. Oleh karena itu akan dihitung ketidaksesuaian pana nilai APV manfaat asuransi jiwa seumur hidup untuk berbagai parameter dan usia pihak tertanggung dengan menggunakan *relative error* yaitu :

$$Error = \frac{|A_{x\ hukum\ mortalita} - A_{x\ tabel}|}{A_{x\ tabel}} \times 100\% \qquad (2.17.1)$$

Untuk relative error pada hukum mortalita Makeham yaitu :

$$Error = \frac{|A_{x\ Makeham} - A_{x\ tabel}|}{A_{x\ tabel}} \times 100\% \qquad (2.17.2)$$

Untuk relative error pada hukum mortalita Gompertz yaitu :

$$Error = \frac{|A_{x\ Gompertz} - A_{x\ tabel}|}{A_{x\ tabel}} \times 100\% \qquad (2.17.3)$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2016/2017.

3.2 Data Penelitian

Penelitian ini menggunakan data Tabel Mortalita Indonesia 3 tahun 2011 untuk Pria.

Tabel 3.1 Tabel mortalita Indonesia 3 tahun 2011 untuk pria

x	l_x	d_x	q_x	p_x
0	100000	802	0,00802	0,99198
1	99198	78,36642	0,00079	0,99921
2	99119,63	62,44537	0,00063	0,99937
3	99057,19	50,51917	0,00051	0,99949
4	99006,67	42,57287	0,00043	0,99957
5	98964,1	37,60636	0,00038	0,99962
6	98926,49	33,63501	0,00034	0,99966
7	98892,85	30,65678	0,00031	0,99969
8	98862,2	28,67004	0,00029	0,99971
9	98833,53	27,67339	0,00028	0,99972
10	98805,85	26,67758	0,00027	0,99973
...	...	...	...	...
111	0,01683	0,01683	1	0

3.3 Metodologi Penelitian

Proses perhitungan dilakukan dengan menggnakan *software* R i386 3.3.1 dengan asumsi- asumsi yang digunakan yaitu tingkat suku bunga (i) sebesar 8% maka dengan rumus $\ln(1+i) = \delta$, force of interest rate (δ) didapat sebesar 0,0769610411, benefit sebesar 1 satuan, usia saat penandatanganan kontrak $x = 25, x = 35$ dan $x = 45$, $r(0) = 6\%$, dan nilai ω untuk tabel mortalita Indonesia 3 untuk pria 111. Adapun langkah – langkah yang dilakukan sebagai berikut :

1. Menghitung APV *(Actuarial Present Value)* dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup yang dibayarkan diakhir tahun kematian dengan tingkat suku bunga konstan menggunakan rumus pada persamaan (2.14.2.2) yaitu :

$$A_x = E[Z_{k+1}] = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} \; {}_k p_x . q_{x+k}$$

2. Menghitung APV *(Actuarial Present Value)* dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup berdasarkan hukum Makeham yang dibayarkan sesaat setelah kematian dengan tingkat suku bunga konstan, dengan terlebih dahulu menetukan nilai parameter dari *force of mortality* pada hukum mortalita Makeham menggunakan rumus pada persamaan (2.15.3) yaitu :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - A_1 - B_1 {c_1}^{(x_i+1)}\right)^2$$

   Setelah itu menghitung APV dengan mengunakan rumus pada persamaan (2.14.2.6) yaitu :

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} e^{-\delta t} \, e^{\left(-At - \frac{Bc^x}{lnc}(C^t - 1)\right)} . \; (A + BC^{x+t}) \, dt$$

3. Menghitung APV *(Actuarial Present Value)* dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup bardasarkan hukum Gompertz yang dibayarkan sesaat setelah kematian dengan tingkat suku bunga konstan, dengan terlebih dahulu menetukan nilai parameter dari *force of mortality* pada hukum mortalita Gompertz menggunakan rumus pada persamaan (2.15.4) yaitu :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - B_1 {c_1}^{(x_i+1)}\right)^2$$

Setelah itu menghitung APV dengan mengunakan rumus pada persamaan (2.14.2.7) yaitu :

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} e^{-\delta t}\, e^{\left(-\frac{Bc^x}{lnc}(C^t-1)\right)}.\ (BC^{x+t})\, dt$$

4. Menghitung APV *(Actuarial Present Value)* dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup yang dibayarkan diakhir tahun kematian dengan tingkat suku bunga mengikuti model CIR, dengan terlebih dahulu menentukan nilai parameter k, θ, σ dengan menggunakan OLS didapat rumus pendugaan parameter pada persamaan (2.16.1), (2.16.2), dan (2.16.3) yaitu :

$$\hat{k} = \frac{n^2 - 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} r_{t+1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{r_t} - \sum_{i=1}^{n-1} r_t \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{r_t} - (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{r_{t+1}}{r_t}}{\left(n^2 - 2n + 1 - \sum_{i=1}^{n-1} r_t \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{r_t}\right) \Delta t}$$

$$\hat{\theta} = \frac{(n-1) \sum_{i=1}^{n-1} r_{t+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{r_{t+1}}{r_t} \sum_{i=1}^{n-1} r_t}{n^2 - 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} r_{t+1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{r_t} - \sum_{i=1}^{n-1} r_t \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{r_t} - (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{r_{t+1}}{r_t}}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{(r_{t+1} - r_t)}{\sqrt{r_t}} - \frac{\hat{\theta}}{\sqrt{r_t}} + \hat{k}\sqrt{r_t}\right)^2}$$

Setelah itu menghitung APV dengan mengunakan rumus pada persamaan (2.14.2.3) yaitu :

$$A_x = E[Z_{k+1}] = \sum_{k=0}^{\omega-x} P_2(t)\ {}_kp_x . q_{x+k}$$

5. Menghitung APV *(Actuarial Present Value)* dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup berdasarkan hukum Makeham yang dibayarkan sesaat setelah kematian dengan tingkat suku bunga mengikuti model CIR menggunakan rumus pada persamaan (2.14.2.8) yaitu :

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} e^{-\delta t}\, e^{\left(-At-\frac{Bc^x}{lnc}(C^t-1)\right)} .\ (A + BC^{x+t})\, dt$$

6. Menghitung APV *(Actuarial Present Value)* dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup berdasarkan hukum Gompertz yang dibayarkan sesaat setelah kematian dengan tingkat suku bunga mengikuti model CIR menggunakan rumus pada persamaan (2.14.2.9) yaitu :

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} e^{-\delta t}\, e^{\left(-\frac{Bc^x}{lnc}(C^t-1)\right)} .\ (BC^{x+t})\, dt$$

7. Menghitung tingkat *error* APV dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup menggunakan rumus pada persamaan (2.17.2) dan (2.17.3) yaitu :

$$Error = \frac{|A_{x\ Makeham} - A_{x\ tabel}|}{A_{x\ tabel}} \times 100\%$$

$$Error = \frac{|A_{x\ Gompertz} - A_{x\ tabel}|}{A_{x\ tabel}} \times 100\%$$

8. Membandingkan APV *(Actuarial Present Value)* dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup berdasarkan hukum mortalita Makeham dan hukum mortalita Gompertz dengan melihat nilai error.

V. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan pada penelitian ini, maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. APV *(Actuarial Present Value)* dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup yang dibayarkan diakhir tahun kematian dengan tingkat suku bunga konstan yaitu $x = 25$ adalah $0{,}037518$, $x = 35$ adalah $0{,}069952$, dan $x = 45$ adalah $0{,}132369$. Nilai APV *(Actuarial Present Value)* dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup yang dibayarkan diakhir tahun kematian dengan tingkat suku bunga mengikuti model CIR yaitu $x = 25$ terdapat pada tabel (4.3), $x = 35$ terdapat pada tabel (4.4), dan $x = 45$ terdapat pada tabel (4.5).
2. APV *(Actuarial Present Value)* dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup berdasarkan hukum mortalita Makeham yang dibayarkan sesaat setelah kematian dengan tingkat suku bunga konstan yaitu $x = 25$ adalah $0{,}11510$, $x = 35$ adalah $0{,}19789$, dan $x = 45$ adalah $0{,}32651$. Nilai APV *(Actuarial Present Value)* dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup berdasarkan hukum mortalita Makeham yang dibayarkan sesaat setelah kematian dengan tingkat suku bunga mengikuti model CIR yaitu $x = 25$ terdapat pada tabel (4.6), $x = 35$ terdapat pada tabel (4.7), dan $x = 45$ terdapat pada tabel (4.8).

3. APV *(Actuarial Present Value)* dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup berdasarkan hukum mortalita Gompertz yang dibayarkan sesaat setelah kematian dengan tingkat suku bunga konstan yaitu $x = 25$ adalah $0{,}05532$, $x = 35$ adalah $0{,}06576$, dan $x = 45$ adalah $0{,}07780$. Nilai APV *(Actuarial Present Value)* dari manfaat asuransi jiwa seumur hidup berdasarkan hukum mortalita Makeham yang dibayarkan sesaat setelah kematian dengan tingkat suku bunga mengikuti model CIR yaitu $x = 25$ terdapat pada tabel (4.9), $x = 35$ terdapat pada tabel (4.10), dan $x = 45$ terdapat pada tabel (4.11).
4. Tingkat *error* APV *(Actuarial Present Value)* untuk manfaat asuransi jiwa seumur hidup berdasarkan hukum mortalita Makeham dan Berdasarkan hukum mortalita Gompertz dengan tingkat suku bunga konstan dan tingkat suku bunga CIR dengan $x = 25$ terdapat pada tabel (4.15), $x = 35$ terdapat pada tabel (4.16), dan $x = 45$ terdapat pada tabel (4.17).
5. APV *(Actuarial Present Value)* untuk manfaat asuransi jiwa seumur hidup berdasarkan tabel mortalita Indonesia 3 tahun 2011 untuk pria lebih baik dihitung dengan menggunakan pendekatan hukum mortalita Gompertz.

DAFTAR PUSAKA

Bowers, N. L., *et al*. 1997. *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries, United States of America.

Bell, F. C. & Miller, M. L. 2005. Life Tables. http://www.ssa.gov/oact/NOTES/as120/LifeTables_Body.html. 29 Maret 2015.

Cox J.C., Ingersoll J.E., and Ross S.A. 1985. “A Theory of The Term Structure of Interest Rates”. Econometrica Vol. 53, Issue 2, pp. 385 - 408.

Frensidy, B. 2010. *Matematika Keuangan*. Salemba Empat, Jakarta.

Futamii,T. 1993. *Matematika Asuransi Jiwa Bagian I*. Oriental Life Insurance Cultural Development Centre, Inc. Tokyo. Japan.

Huang,V. dan Kristiani, F. 2013. Mat Stat. *Analisis Kesesuaian Hukum Mortalita Gompertz dan Makeham Terhadap Tabel Mortalita Amerika Serikat dan Indonesia*. **13**;63-69.

Hull JC. 2003. *Options, Futures and OtherDerivatives*. Ed ke-5. New Jersey: Pearson Education, Inc.

Jordan, Jr. C.W. 1991. *Life Contingencies*. The Society of Actuaries, Chicago

Kunimura, D. 1997. Actuarial Research Clearing House 1998. *The Gompertz Distribution-Estimation of Parameters*. **2** ;65-66

Mustari, N. S. 2013. Model Nonlinear. Skripsi. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Bandar Lampung.

Sanjaya, K. D., Permana, F.J., dan Kristiani, F. 2011. Perhitungan nilai Aktuaria dengan Asumsi Tingkat Suku Bunga Berubah Secara Stokastik. *Mat Stat*, 11(2): 149-152.

Sembiring, R.K.1986. *Asuransi I Modul 1-9*. Karunika Jakarta, Jakarta.