II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam proses penelitian untuk menganalisis aproksimasi fungsi dengan metode minimum norm pada ruang hilbert C[a,b] (Studi kasus: fungsi irasional), penulis menggunakan definisi, teorema dan konsep dasar sebagai berikut:

2.1. Aproksimasi Fungsi

Suatu fungsi tidak memerlukan penyelesaian tetapi fungsi tersebut hanya dapat dievaluasi apabila nilai variabelnya diberikan. Misalnya suatu fungsi variabel ini dinyatakan oleh x(t) = $\sqrt{t^2 - 1}$ dengan 1 $\leq$ t $\leq$ 8. Suatu fungsi juga dapat direpresentasikan dalam deret pangkat tak hingga. Suatu fungsi yang diekspansi dalam deret pangkat tak hingga $\sum_{i=0}^{\sim} c_i z^i$ tidak dapat diselesaikan dengan perhitungan biasa untuk mendapatkan nilai eksaknya. Oleh karena itu, untuk mencari nilainya dapat dilakukan dengan penggunaan suatu pendekatan. Perhitungan dengan suatu aproksimasi menghasilkan nilai pendekatan (Munir, 2006).

Ada dua jenis penggunaan aproksimasi pada suatu fungsi, yaitu:

1. Menggantikan fungsi-fungsi yang rumit dengan fungsi yang lebih sederhana sehingga banyak operasi umum, seperti fungsi irasional dan fungsi integral, atau bahkan mengevaluasi fungsi tersebut dapat dilakukan dengan mudah.
2. Untuk memperoleh kembali suatu fungsi dari informasi sebagian mengenai fungsi itu, misalnya dari suatu tabel nilai (Santoso, 2003).

2.2. Kesalahan Aproksimasi Fungsi

Dalam perhitungan dengan aproksimasi mungkin akan terjadi suatu kesalahan terhadap nilai eksaknya. Menurut Triatmodjo (2002), terdapat tiga jenis kesalahan yang mungkin terjadi dalam perhitungan dengan aproksimasi yaitu kesalahan bawaan, kesalahan pembulatan (*round-off error*), dan kesalahan pemotongan (*truncation error*).

Definisi 2.2.1. Kesalahan Bawaan

Kesalahan bawaan adalah kesalahan dari nilai data yang terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data, salah membaca skala atau kesalahan karena kurangnya pengertian mengenai hukum-hukum fisik dari data yang diukur (Triatmodjo, 2002).

Munir (2006) menyebut kesalahan bawaan dengan istilah kesalahan eksperimental yaitu kesalahan yang timbul dari data yang diberikan misalnya karena kesalahan pengukuran, ketidaktelitian alat ukur, dan sebagainya.

Definisi 2.2.2. Kesalahan Pembulatan (*round-off error*).

Kesalahan pembulatan adalah kesalahan yang terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan (Triatmodjo, 2002). Kesalahan pembulatan misalnya 3,1415926 dapat dibulatkan menjadi 3,14.

Definisi 2.2.3. Kesalahan Pemotongan (*truncation error*).

Kesalahan pemotongan adalah kesalahan yang terjadi karena hanya diperhitungkannya beberapa suku pertama dari suatu deret tak hingga (Triatmodjo, 2002). Selain definisi di atas, kesalahan pemotongan (*truncation error*) juga didefinisikan sebagai kesalahan yang timbul dari penggunaan suatu aproksimasi pengganti prosedur matematika yang eksak (Chapra, 2002). Kesalahan pemotongan terjadi misalnya pada penggunaan aproksimasi dengan deret Taylor. Kesalahan (*error*) yang muncul dalam penggunaan aproksimasi diharapkan bernilai sangat kecil sehingga nilai yang diperoleh mendekati atau hampir sama dengan nilai eksaknya. Oleh karena itu, dalam menghampiri suatu fungsi deret pangkat tak hingga nilai kesalahannya akan bernilai semakin kecil jika suku-suku deret yang digunakan untuk menghampiri fungsi tersebut semakin banyak.

2.3. Teorema Proyeksi

Teorema proyeksi merupakan prinsip dasar dalam penyelesaian masalah optimisasi. Sebelum ke Teorema proyeksi, terlebih dahulu akan diperkenalkan konsep ortogonalitas.

Definisi 2.3.1 (Luenberger, 1969)

Dalam suatu ruang pre-Hilbert X, vektor x,y $\in$ X dikatakan ortogonal jika <x, y>= 0, dinotasikan dengan x $\perp$ y. Suatu vektor x dikatakan ortogonal dengan himpunan S, dinotasikan x $\perp$ S jika x $\perp$ s untuk setiap s $\in$ S.

Lemma berikut menunjukkan bahwa Teorema Phytagorean dalam geometri bidang merupakan akibat dari konsep ortogonalitas.

Lemma 2.3.1

Misalkan *X* suatu ruang Hilbert dan *x*, *y* $\in$ *X*. Jika *x* $\perp$ *y*, maka $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Bukti :

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + 0 + 0 + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad \blacksquare$$

Selanjutnya akan dibahas suatu masalah optimisasi yang berhubungan dengan Teorema proyeksi. Misalkan *X* suatu ruang Pre-Hilbert, diberikan suatu vektor $x \in X$ dan *M* ruang bagian dari *X*, maka akan ditentukan vektor $m \in M$ yang terdekat ke *x*, yaitu vektor yang meminimalkan $\|x-m\|$.

Jika *x* berada di *M* maka penyelesaiannya trivial, yaitu vektor *x* sendiri. Secara umum ada empat pernyataan penting dalam penyelesaian masalah tersebut yaitu :

1. Adakah vektor $m \in M$ yang meminimalkan $\|x-m\|$?
2. Apakah penyelesaiannya tunggal ?
3. Kondisi apa yang harus dipenuhi agar ada penyelesaian optimal ?

4. Bagaimana menentukan penyelesaian optimal ?

Pernyataan nomor 1, 2 dan 3 akan dijawab dengan Teorema proyeksi. Ada dua versi Teorema proyeksi, satu versi pada ruang Pre-Hilbert dan satu versi yang lain pada ruang Hilbert dengan hipotesis dan kesimpulan yang lebih kuat.

Teorema 2.3.2 (*Teorema Proyeksi di Ruang pre-Hilbert*)

Misalkan X suatu ruang Pre-Hilbert, M suatu ruang bagian dari X dan x sebarang vektor di X. Jika ada vektor $m_0 \in M$, sedemikian sehingga $\|x-m_o\| \le \|x-m\|, \forall m \in M$, maka m_0 tunggal. Syarat perlu dan cukup $m_0 \in M$, suatu vektor minimal tunggal di M adalah vektor selisih $x - m_0$ ortogonal terhadap M.

Bukti :

Akan di tunjukkan jika m_0 adalah vektor minimal, maka $x - m_0$ ortogonal terhadap M. Andaikan kondisi sebaliknya, terdapat $m \in M$ yang tidak ortogonal terhadap x – m_0. Tanpa mengurangi keumuman bukti, dimisalkan $\|m\| = 1$ dan $<x - m_0 , m> = \partial \neq 0$. Didefinisikan vektor $m_1 \in M$, sebagai $m_1 = m_0 + \partial m$ maka

$$
\begin{aligned}
\|x-m_1\|^2 &= \|x-m_0-\partial m\|^2 \\
&= < x-m_0-\partial m, x-m_0-\partial m > \\
&= < x-m_0, x-m_0 > + < x-m_0, -\partial m > + < -\partial m, x-m_0 > + < -\partial m, -\partial m > \\
&= \|x-m_0\|^2 - < x-m_0, \partial m > - < \partial m, x-m_0 > + |\partial|^2 \|m\|^2 \\
&= \|x-m_0\|^2 - < \overline{\partial m, x-m_0} > - < \partial m, x-m_0 > + |\partial|^2 \\
&= \|x-m_0\|^2 - \bar{\partial} < x-m_0, m > - \partial < m, x-m_0 > + |\partial|^2 \\
&= \|x-m_0\|^2 - 2|\partial|^2 + |\partial|^2 \\
&= \|x-m_0\|^2 - |\partial|^2 \\
&\le \|x-m_0\|^2
\end{aligned}
$$

Ini berarti $\exists$ m_1 dengan $m_1 = m_0 + \partial m$ sehingga $\|x - m_1\|^2 \le \|x - m_0\|^2$, ini berarti m_1 bukan vektor minimal. Jadi m_0 vektor minimal maka $x - m_0$ ortogonal terhadap M atau $(x - m_0) \perp m$, $\forall m \in M$. Dengan demikian jika $x - m_0$ tidak ortogonal terhadap M maka m_0 bukan vektor minimal.

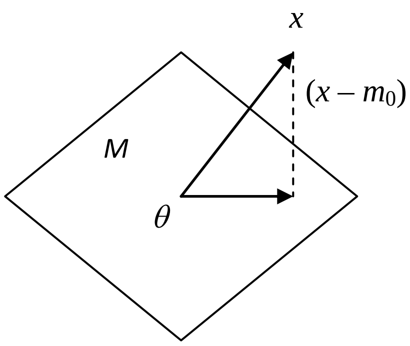
Selanjutnya akan ditunjukkan jika vektor $x - m_0$ ortogonal terhadap M, diambil sebarang $m \in M$, berdasarkan Teorema Phytagorea :

$$\|x - m\|^2 = \|x - m_0 + m_0 + m\|^2 = \|x - m_0\|^2 + \|m_0 + m\|^2$$

sehingga $\|x - m\|^2 > \|x - m_0\|^2$ untuk $m \neq m_0$. ■

Dalam dimensi tiga, teorema proyeksi ini dapat dinyatakan sebagai berikut :

Ruang bagian M adalah bidang yang melalui titik asal dan x di ruang dimensi tiga X. Jika ada vektor minimal $m_0 \in M$ maka m_0 tunggal dan vektor selisih $x - m_0$ tegak lurus terhadap bidang M, seperti digambarkan dalam gambar di bawah ini :



Gambar 2.1

Teorema di atas belum menjamin keberadaan vektor minimal, tetapi jika ada vektor minimal m_0, maka m_0 tunggal dan vektor selisih $x - m_0$ ortogonal terhadap ruang bagian M. Dengan hipotesis yang lebih kuat didapatkan kesimpulan yang lebih kuat, yaitu terjaminnya keberadaan vektor minimal. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.3.3 Teorema Proyeksi Klasik

Misalkan *H* ruang Hilbert dan *M* ruang bagian tertutup dari *H*, maka untuk sebarang vektor $x \in H$, terdapat tunggal vektor $m_0 \in M$ sedemikian hingga $\|x - m_o\| \leq \|x - m\|, \forall m \in M$. Syarat perlu dan cukup $m_0 \in M$,suatu vektor minimal tunggal adalah vektor selisih $x - m_0$ ortogonal terhadap ruang bagian *M*.

Bukti :

Ketunggalan dan ortogonalitasnya telah dibuktikan pada Teorema 2.3.2, sehingga tinggal membuktikan keberadaan vektor minimal. Jika $x \in M$ dan $m_0 = x$ maka bukti selesai.

Misalkan $x \notin M$ dan didefinisikan $\partial = \inf_{m \in M} \|x - m\|$ akan ditentukan $m_0 \in M$ dengan $\|x - m_0\| = \partial$. Misalkan $\{m_i\}$ suatu barisan vektor dalam *M* dan $\|x - m_i\| \to \partial$.

Menurut hukum jajaran genjang (*parallelogram)*,

$$\|(m_j - x) + (x - m_i)\|^2 + \|(m_j - x) - (x - m_i)\|^2 = 2\|m_j - x\|^2 + 2\|x - m_i\|^2$$

dengan menyusun kembali persamaan di atas didapatkan :

$$\|m_j - m_i\|^2 = 2\|m_j - x\|^2 + 2\|x - m_i\|^2 - 4\left\|x - \frac{m_i + m_j}{2}\right\|^2 \text{ untuk setiap i, j .}$$

Dan vektor $\frac{m_i + m_j}{2}$ berada di *M.*

Karena *M* ruang bagian linier sehingga dari definisi ∂, $\left\|x - \frac{m_i + m_j}{2}\right\| \geq \partial$

dan didapatkan :

$$\|m_j - m_i\|^2 \le 2\|m_j - x\|^2 + 2\|x - m_i\|^2 - 4\partial^2$$

karena

$$\{\ \|m_i - x\|^2\ \} \to \partial^2\ ,\ \mathrm{i} \to \infty$$

Maka $\{\ \|m_j - m_i\|^2\ \} \to 0$, i, j $\to \infty$.

Dengan demikian {m_i} adalah barisan Cauchy dan karena *M* ruang bagian tertutup dari ruang lengkap, maka barisan {m_i} mempunyai limit m_0 di dalam *M*.

Dengan kekontinuan norm maka $\|x - m_0\| = \partial$. ■

Jadi dalam penulisan ini, Teorema proyeksi klasik menjamin keberadaan dan ketunggalan penyelesaian optimal serta kondisi yang harus dipenuhi agar keberadaan vektor minimal ada penyelesaian optimalnya, penyelesaian optimalnya sendiri belum dapat ditentukan.

Selanjutnya teorema proyeksi di atas akan ditetapkan untuk membangun sifat struktural tambahan dari suatu ruang Hilbert, antara lain adalah dalam sebarang ruang bagian tertutup dari ruang Hilbert, sebarang vektor dapat ditulis sebagai jumlahan dua vektor, satu vektor di ruang bagian tertutup dan vektor yang lain ortogonal terhadapnya.

Definisi 2.3.2 (Luenberger, 1969)

Misalkan $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ basis dari M. Diberikan sebarang vektor x $\in$ H dan akan dicari vektor m_0 di M yang terdekat ke x. Jika vektor m_0 dinyatakan dalam suku-suku dalam vektor y_i sebagai :

$$m_o = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i$$

Maka masalah tersebut ekuivalen dengan menemukan skalar β_i , i = 1, 2, ..., n yang meminimalkan $\|x - \beta_1 y_1 - \beta_2 y_2 - .... - \beta_n y_n\|$.

Menurut Teorema proyeksi, vektor minimal tunggal m_0 adalah proyeksi ortogonal x pada M, atau vektor selisih x – m_0 ortogonal terhadap setiap vektor y_i .

Dengan demikia**n :** $< x - \beta_1 y_1 - \beta_2 y_2 - .... - \beta_n y_n , y_i >= 0$ *untuk i* = 1, 2, ..., *n.*

Atau

$$<x, y_1> - <\beta_1 y_1, y_1> - <\beta_2 y_2, y_1> - ....- <\beta_n y_n, y_1> = 0$$

$$<x, y_2> - <\beta_1 y_1, y_2> - <\beta_2 y_2, y_2> - ....- <\beta_n y_n, y_2> = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$<x, y_n> - <\beta_1 y_1, y_n> - <\beta_2 y_2, y_n> - ....- <\beta_n y_n, y_n> = 0$$

Atau

$$<y_1, y_1> \beta_1 + <y_2, y_1> \beta_2 + ...+ <y_n, y_1> \beta_n = <x, y_1>$$

$$<y_1,y_2> \beta_1 + <y_2,y_2> \beta_2 + ...+ <y_n, y_2> \beta_n = <x, y_2>$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$<y_1,y_n> \beta_1 + <y_2,y_n> \beta_2 + ...+ <y_n, y_n> \beta_n = <x, y_n>$$

Persamaan dalam koefisien β_i sebanyak n kali ini dikenal sebagai persamaan normal untuk masalah minimalisasi.

Matriks n x n yang berhubungan dengan vektor $y_1, y_2,...,y_n$ yaitu :

$$G = G(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} < y_1, y_1 > < y_1, y_2 > .... < y_1, y_n > \\ < y_2, y_1 > < y_2, y_2 > .... < y_2, y_n > \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ < y_n, y_1 > < y_n, y_2 > .... < y_n, y_n > \end{vmatrix}$$

disebut matriks Gram dari y_1, y_2, y_3, ..., y_n. Matriks ini adalah tranpose dari matriks koefisien normal.

Teorema 2.3.4

Determinan Gram $g = g(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ jika dan hanya jika $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bebas linear.

Bukti :

Pernyataan tersebut ekuivalen dengan pernyataan vektor–vektor $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bergantung linear jika dan hanya jika $g = g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$.

Misalkan y_i bergantung linier, berarti terdapat α_i yang tidak sama dengan nol sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$. Karena barisan-barisan pada determinan Gram bergantung pada y_i, maka determinannya nol.

Misalkan $g = g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$. Maka ada kebergantungan linier di antara barisan-barisannya sehingga terdapat konstanta α_I yang tidak semuanya nol sedemikian hingga $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < y_i, y_j >= 0$, untuk semua j. Dengan demikian $< \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i, y_j >= 0$ atau $\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right\|^2 = 0$. Sehingga $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$ dan vektor $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bergantung linier. ■

Walaupun persamaan normal tidak memiliki penyelesaian tunggal jika y_i bergantung linier, tetapi selalu ada paling sedikit satu penyelesaian. Jika $g = 0$

maka selalu dihasilkan penyelesaian yang tidak tunggal, bukan penyelesaian yang tidak konsisten.

Teorema berikut menyatakan jarak minimum suatu vektor ke ruang bagian dapat dicari dengan determinan matriks Gram.

Teorema 2.3.5

Misalkan $y_1, \ldots\ldots, y_n$ bebas linear dan ∂ jarak minimum vektor *x* ke ruang bagian *M* yang dibangun oleh y_i, yaitu :

$$\partial = \min\|x - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2 - \ldots\ldots. - \alpha_n y_n\| = \|x - \hat{x}\|$$

maka,

$$\partial^2 = \frac{g(y_1, y_2, \ldots, y_n, x)}{g(y_1, y_2, \ldots., y_n)}$$

Bukti :

Menurut definisi $\partial^2 = \|x - \hat{x}\|^2 = < x - \hat{x}, x - \hat{x} > = < x - \hat{x}, x > - < x - \hat{x}, x >$

Menurut teorema proyeksi, x - $\hat{x}$ ortogonal terhadap *M*, sehingga secara khusus karena $\hat{x} \in M$ maka : $<x - \hat{x}, \hat{x}> = 0$, sehingga

$$\partial^2 = < x - \hat{x}, x > = < x, x > - < \hat{x}, x > = < x, x > - \alpha_i < y_1, x > - \ldots\ldots - \alpha_n < y_n, x >$$

atau

$$\partial^2 + \alpha_1 < y_1, x > + \ldots\ldots + \alpha_n < y_n, x > = < x, x >$$

persamaan ini bersama persamaan normal memberikan *n* + 1 persamaan linier dalam *n* + 1 variabel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots.., \alpha_n, \partial^2$. Dengan aturan Cramer didapatkan

$$\partial^2 = \frac{\begin{vmatrix} <y_1,y_1> & <y_2,y_1> & \cdots & <y_n,y_1> & <x,y_1> \\ <y_1,y_2> & <y_2,y_2> & \cdots & <y_n,y_2> & <x,y_1> \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ <y_1,y_n> & <y_2,y_n> & \cdots & <y_n,y_n> & <x,y_n> \\ <y_1,x> & <y_2,x> & \cdots & <y_n,x> & <x,x> \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} <y_1,y_1> & <y_2,y_1> & \cdots & <y_n,y_1> & 0 \\ <y_1,y_2> & <y_2,y_2> & \cdots & <y_n,y_2> & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ <y_1,y_n> & <y_2,y_n> & \cdots & <y_n,y_n> & 0 \\ <y_1,x> & <y_2,x> & \cdots & <y_n,x> & 1 \end{vmatrix}} = \frac{g(y_1,\ldots\ldots,y_n,x)}{g(y_1,\ldots\ldots\ldots,y_n)}$$

2.4. Deret Maclaurin

Kasus khusus pada deret Taylor adalah bila fungsi diperluas sekitar $t_0 = 0$ maka deretnya dinamakan deret Maclaurin yang juga merupakan deret Taylor baku sebagai berikut:

$$x(t) = x(0) + \frac{x'(0)}{1!}t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \frac{x'''(0)}{3!}t^3 + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(0)}{n!} t^n$$

(Purcell, 2004)

Contoh 2.4.1

Fungsi ($x(t) = \int_0^{1/8} \sqrt{t+1}\,dt, 0 \leq t \leq \frac{1}{8}$)

Menentukan deret Maclaurin dari fungsi $x(t) = \int_0^{1/8} \sqrt{t+1}\,dt$ dan pendekatan ke nilai 0.

$x(t) = \sqrt{t+1}$ $\leftrightarrow$ x(0) = 1

$x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$ $\leftrightarrow$ $x'(0) = \frac{1}{2}$

Sehingga diperoleh deret Maclaurin dari fungsi $x(t) = \int_0^{1/8} \sqrt{t+1}dt$

$$\sqrt{t+1} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}t + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}t$$

2.5. Fungsi Irasional

Fungsi Irasional adalah akar dari fungsi polinom.

Bentuk umumnya :

$$y = \sqrt[m]{x_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n}, \frac{n}{m} \text{ tidak bulat}, m, n \in \text{R}$$

(Albari, 2001)