II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini akan dibahas beberapa konsep dasar, definisi-definisi serta teorema yang berkaitan dalam hal pendugaan parameter pada model linier campuran ini, yaitu sebagai berikut :

2.1 Model Linear Umum

Model Linear merupakan pemodelan khusus dengan ciri linear dalam parameter.

Definisi 2.8

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \text{(Persamaan 1)}$$

Dimana :

Y **:** vektor peubah acak $n\ x 1$ yang teramati;

X **:** mariks $n\ x\ p$ $(n > p)$ dengan unsur-unsurnya adalah bilangan tertentu yang diketahui;

$\boldsymbol{\beta}$: vektor parameter $p\ x 1$ yang tidak diketahui nilainya;

$\boldsymbol{\varepsilon}$: vektor peubah acak $n\ x 1$ yang tidak teramati,

Dengan, E(ε) = **0** dan cov ($\boldsymbol{\varepsilon}$) = $\sum$

Sehingga persamaan linear pada persamaan 1 dinamakan model linear umum. Model tersebut mempunyai pengertian-pengertian khusus tergantung pada :

1. Distribusi dari $\boldsymbol{\varepsilon}$
2. Struktur matriks kovarians $\sum$

Peringkat struktur dari matriks **X,** jika peringkat atau rank dari matriks **X** sama dengan jumlah kolomnya, maka matriks tersebut dinamakan matriks berpangkat penuh dan jika peringkat matriksnya tidak penuh maka modelnya dinamakan model tidak penuh (*non-full rank model*) (Usman dan Warsono, 2009).

2.2 Model Linear Campuran

Model linear campuran merupakan model yang terdiri dari tetap *(fixed effect)* dan faktor acak *(random effect).* Suatu faktor dikatakan tetap *(fixed)* jika dalam suatu penelitian faktor tersebut telah mewakili semua tingkat kemungkinan faktor yang ada yang telah ditetapkan sebelumnya. Suatu faktor dikatakan acak *(random)* jika faktor tersebut merupakan sampel yang diambil secara acak pada suatu populasi yang kiranya dapat mewakili karakteristik dari populasi tersebut, (Little dkk,1996).

Model linear campuran dapat ditulis sebagai berikut :

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{Z\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \text{(Persamaan 2)}$$

Dimana,

X : Matriks pada pengaruh tetap pada model

Z : Matriks pada pengaruh acak pada model

β : Vektor pada pengaruh tetap

$\boldsymbol{\gamma}$: Vektor pada pengaruh acak dan dengan asumsi : $\boldsymbol{\gamma} \sim \mathrm{N}\ (\mathbf{0}, \boldsymbol{G})$

$\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{N}\ (\mathbf{0}, \boldsymbol{R})$

serta cov (**Y**) = $\sum = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{G}\boldsymbol{Z}'$

Model linear campuran ini biasa digunakan pada data yang tak saling bebas serta data yang tak homogen (Henderson, 1984).

Dalam teori model linear campuran, terdapat persamaan model linear campuran *(Mixed Model Equation).*

2.2.1 Persamaan Model linear Campuran *(Mixed Model Equation)*

Persamaan model linear campuran merupakan persamaan yang terbentuk dari penurunan fungsi gabungan dari model linear campuran yang diturunkan masing-masing terhadap kedua parameter yang terdapat pada model linear campuran. Persamaan tersebut sama halnya seperti persamaan normal seperti biasanya, sejauh ini persamaan model linear campuran digunakan secara serempak untuk menentukan BLUE dan BLUP.

Kita misalkan **R** adalah matriks nonsingular. Jika $\boldsymbol{\gamma}$ acak, persamaan normal untuk model linear campuran dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}' \\ \boldsymbol{Z}' \end{bmatrix} \boldsymbol{R}^{-1}\ [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}' \\ \boldsymbol{Z}' \end{bmatrix} \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Y}$$

Atau,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{X}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Y} \end{bmatrix}$$

Untuk $\boldsymbol{G}$ nonsingular, persamaan dalam model linear campuran dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{X}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{G}^{-1} + \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Y} \end{bmatrix}$$

(Milliken dan Littel, 1998)

2.3 Pendugaan Parameter

Dalam statistika inferensial, sangat dibutuhkan pemahaman-pemahaman mengenai kaidah-kaidah pengambilan kesimpulan tentang suatu parameter populasi berdasarkan karakteristik sampel. Hal ini membangun apa yang disebut dengan pendugaan titik dari suatu fungsi kepekatan peluang parameter yang tidak diketahui. Dalam model linear, terdapat beberapa metode yang digunakan dalam pendugaan parameter, seperti Metode Kuadrat Terkecil *(Leaqst Square),* MLE *(Maximum likelihood Estimation)* dan RMLE *(Restricted Maximum likelihood Estimation)* (Hoog dan Craig, 1995).

2.3.1 *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)

MLE (*Maximum Likelihood Estimation*) merupakan metode pendugaan parameter yang menggunakan pendekatan distribusi dari data yang dimiliki serta asumsi distribusi yang diberlakukan oleh data tersebut, sehingga dapat diperoleh fungsi *likelihood* dari suatu data tersebut. MLE (*Maximum Likelihood Estimation*) ini menyediakan metode umum, dimana suatu kondisi dalam suatu sampel acak terdapat penduga, dimana penduga tersebut mempunyai sifat yang konsisten dan sifat-sifat lain yang sangat diperlukan sebagai suatu penduga.

Dalam menggunakan metode MLE, pertama kita misalkan bahwa peubah acak dari suatu populasi adalah **X,** dimana **X** mempunyai fungsi peluang yang mewakili beberapa parameter $\theta : \boldsymbol{Pr}\,\{\boldsymbol{x} = x\} = f(x;\theta)$. Lalu kita misalkan bahwa fungsi *f* diketahui tetapi nilai θ tidak diketahui.

Fungsi peluang bersama dari peubah acak $(x_{1,} x_{2,} \ldots \ldots\ x_n\ )$ dapat ditulis menjadi :

$$L(\theta) = f\ (x_{1,} x_{2,} \ldots \ldots, x_n\ ;\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} f\ (x_i\ ;\ \theta)$$

Fungsi diatas tersebut lebih dikenal dengan sebutan *likelihood function* dari suatu sampel. Sifat dari MLE ini diperlukan untuk memilih penduga dari parameter yang tidak diketahui.

Jika suatu kelompok distribusi ingin menentukkan dua atau lebih dari parameter yang tidak diketahui, yaitu $\theta_{1,} \theta_{2,} \ldots \ldots\ \theta_n$ maka fungsi *likelihood* dapat ditulis dalam bentuk berikut :

$$L\left(\theta_{1,} \theta_{2,} \ldots \ldots\ \theta_n\right) = f\left(x_{1,} \ldots \ldots, x_n\ ;\ \theta_{1,}, \ldots \ldots, \theta_k\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f\ (x_i\ ;\ \theta_{1,}, \ldots \ldots, \theta_k\ )$$

(Brunk, 1975)

2.4 Distribusi Normal Multivariate

Fungsi kepekatan normal ganda (*multivariate normal*) adalah bentuk generalisasi dari fungsi kepekatan univariate normal dengan p ≥ 2 dimensi. Fungsi kepekatan dari peubah acak Y yang menyebar normal dengan nilai tengah μ dan ragam σ^2, atau fungsi kepekatan normal tersebut dapat dinotasikan $Y \sim N(\mu; \sigma^2)$. Sehingga fungsi kepekatan normal ganda adalah:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Misal, diberikan peubah acak $\mathbf{Y}' = \{Y_{1.}\ Y_{2,\ldots\ldots}Yp\}$ dimana Y_i menyebar normal dan saling bebas (*independent)* dengan mean μ dan ragam σ^2. Sehingga fungsi kepekatan bersama dari peubah acak **Y** yaitu :

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) \quad & = \prod_{i=1}^{p} f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) \\
& = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
& = (2\pi)^{-p/2}\left(\frac{1}{\sigma\ p}\right) \exp\left\{-\sum_{i=1}^{p}(y-\mu)^2/2\sigma^2\right\} \\
& = (2\pi)^{-p/2}\left|\left(\sigma^2\mathbf{I}_p\right)\right|^{-1/2} \exp\left\{-(y-\mu)'\left(\sigma^2\mathbf{I}_p\right)^{-1}(y-\mu)/2\right\}
\end{aligned}
$$

Fungsi kepekatan bersama yang terbentuk dari distribusi normal multivariate yang saling bebas dapat ditulis $\boldsymbol{Y} \sim N(\boldsymbol{\mu}; \sigma^2\mathbf{I})$, dimana vektor nilai tengah dan matriks peragam adalah sebagai berikut :

$$\mathrm{E}\,(\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} \qquad ,\text{dan}\ \ \mathrm{cov}\,(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & {\sigma^2}_p \end{bmatrix} = \sigma^2\mathbf{I}_p$$

Bentuk $[(\frac{y-\mu}{\sigma})]^2$ dari eksponen fungsi sebaran normal mengukur jarak kuadrat dari y_i ke μ dalam unit simpangan baku. Bentuk ini dapat digeneralisasikan untuk px1 vektor **Y** dari pengamatan beberapa peubah sebagai :

$$(y-\mu)'\boldsymbol{\sigma}^{-1}(y-\mu)$$

Dimana,

$\boldsymbol{\sigma}$= matriks ragam peragam (*covariance*)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & {\sigma^2}_p \end{bmatrix}$$

Sehingga, fungsi kepekatan peluang bersama dari distribusi normal multivariate dapat ditulis sebagai berikut :

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\boldsymbol{\sigma}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\ (y-\mu)'\boldsymbol{\sigma}^{-1}(y-\mu)\right\}$$

(Timm, 2002)

2.5 Aplikasi Model linear campuran pada rancangan Faktorial dalam RAL (Rancangan Acak Lengkap)

Banyak Penelitian dilakukan untuk mengetahui pengaruh dua atau lebih factor. Rancangan faktorial merupakan rancangan yang sangat efisien digunakan dalam penelitian demikian. Pada faktorial, semua kombinasi perlakuan dari setiap level/taraf suatu faktor dikombinasikan secara penuh dengan dengan level/taraf faktor lainnya. Dengan demikian setiap pengamatan menyediakan informasi mengenai semua pengaruh dan dapat mengetahui respon level pada level lainnya.

Struktur rancangan perlakuan faktorial dapat diterapkan pada rancangan acak lengkap. Dalam model campuran, misal terdapat dua faktor dalam suatu percobaan yaitu A dan B, bila salah satu dari A atau B yang digunakan dalam penelitian diambil secara acak dari populasinya masing-masing sedangkan lainnya ditetapkan, maka penelitian tersebut haruslah dianalisis dengan model linear campuran. Model linear campuran untuk factorial dalam rancangan acak lengkap:

$$Y = \mu_i + \beta_i + \gamma_j + (\beta\gamma)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

dimana : i = 1,2,….b , j = 1,2,….t , k = 1,2,….r

dengan : $\beta \sim N\ (0, \sigma^2)$

$\varepsilon_{ijk} \sim N\ (0, \sigma^2)$

2.6 Karaktersistik Estimabilitas

Untuk melakukan uji hipotesis pada suatu model linear dalam bentuk $\boldsymbol{L\beta}$, haruslah estimable. Matriks $\boldsymbol{L\beta}$ dikatakan estimable, jika dan hanya jika salah satu dari kondisi berikut terpenuhi :

1. **L** = **BX**, untuk sebarang matriks **B**
2. $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{L}\end{pmatrix} = r(\boldsymbol{X})$
3. $r\{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}^{-}\boldsymbol{L})\} = r(\boldsymbol{X}) - r(\boldsymbol{L})$, untuk suatu g-invers $\boldsymbol{A}^{-}$

4. $\boldsymbol{LX^{-}X} = \boldsymbol{L}$ untuk suatu g-invers $\boldsymbol{X^{-}}$

5. $\boldsymbol{LX_l^{-}}$ adalah invariant untuk setiap kuadrat terkecil g-inverse $\boldsymbol{X_l^{-}}$

6. $r(\boldsymbol{LX_l^{-}})$ adalah invariant untuk setiap kuadrat terkecil g-inverse $\boldsymbol{X_l^{-}}$

7. $r(\boldsymbol{LX_l^{-}}) = r(\boldsymbol{L})$ untuk setiap kuadrat terkecil g-inverse $\boldsymbol{X_l^{-}}$

dimana g-inverse itu sendiri didefinisikan :

Jika matriks $\mathbf{X}$ berukuran mxn dan jika $\boldsymbol{X^{-}}$ ada dan memenuhi empat syarat berikut,yaitu :

1. $\boldsymbol{XX^{-}}$ simetrik;
2. $\boldsymbol{X^{-}X}$ simetrik;
3. $\boldsymbol{XX^{-}X} = \boldsymbol{X}$; dan
4. $\boldsymbol{X^{-}XX^{-}} = \boldsymbol{X^{-}}$.

maka $\boldsymbol{X^{-}}$ dikatakan g-inverse $\boldsymbol{X}$.

(Usman dan Warsono, 2009).

2.7 Uji Hipotesis

Hipotesis pada dasarnya merupakan suatu proporsi atau anggapan yang mungkin benar, dan sering digunakan sebagai dasar pembuatan keputusan atau pemecahan persoalan ataupun untuk dasar penelitian lebih lanjut. Hipotesis yang akan diuji biasanya disimbolkan H_0 (Hipotesis nol) dan disertai dengan H_1 (Hipotesis alternatif). H_1 akan secara otomatis diterima jika H_0 ditolak. Cara untuk merumuskan H_0 dan H_1 tergantung pada jenis parameter yang akan diuji dan jenis data (informasi yang dimiliki oleh peneliti atau menurut rencananya akan dipilih). Pada pengujian hipotesis terdapat dua macam kesalahan yang secara ringkas akan disajikan dalam Tabel 1 :

Tabel 1. Kesalahan Pada Uji Hipotesis

H_0 / Kesimpulan	**Hipotesis Benar**	**Hipotesis Salah**
Tidak tolak H_0	1 - α	Kesalahan Tipe II (Beta)
Tolak H_0	Kesalahan Tipe I Taraf nyata (α)	1 - β

Dari Tabel 1 dapat dijelaskan bahwa didalam uji hipotesis ini terdapat dua jenis kesalahan yang dapat terjadi di dalam pengujian hipotesis. Kesalahan itu bisa terjadi karena kita menolak hipotesis padahal hipotesis itu benar atau kita menerima hipotesis padahal hipotesis itu salah. Kesalahan yang disebabkan karena kita menolak hipotesis padahal hipotesis tersebut benar, disebut kesalahan jenis I, sebaliknya kesalahan yang disebabkan karena kita menerima hipotesis padahal hipotesis itu salah maka disebut kesalahan jenis II. Sehingga ***power* / kuasa uji** adalah peluang menolak H_0 dimana H_0 tidak benar atau sama saja dengan peluang (statistik uji akan jatuh dalam penolakan wilayah ketika hipotesis nol salah). Kuasa uji = 1 - beta.

Fungsi dari uji hipotesis ini adalah untuk menguji suatu teori, menyarankan teori baru apabila hasil pengujian hipotesis dapat membentuk proposisi asumsi atau penjelasan tentang suatu peristiwa, serta mendeskripsikan fenomena sosial yang artinya hipotesis memberikan informasi kepada peneliti tentang apa yang nyata-nyata terjadi secara empirik, (Supranto, 1986).

2.7.1 Uji Hipotesis Parameter Faktor Tetap *(fixed effect)* dan Faktor Acak *(random effect)* Pada Model Linear Campuran

Uji hipotesis pada faktor tetap (*fixed effect)* dan faktor acak *(random effect)* menggunakan pendekatan distribusi F, yang akan disajikan pada Tabel 2, tetapi sebelum disajikannya tabel bagi model linear campuran, akan disajikan terlebih dahulu *Expected Mean Square (EMS)*, Sebagai berikut :

Tabel 2. Tabel *Expected Mean Square (EMS)*

Fixed/Random Jumlah dari level Faktor	F a i	R b j	R r k	Expected Mean Square (EMS)
β_i	0	b	r	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\beta\gamma}^2 + br\sum\alpha^2/(a-1)$
γ_j	a	1	r	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\beta\gamma}^2 + ar\sigma_\gamma^2$
$(\beta\gamma)_{ij}$	1	1	r	$\sigma_\varepsilon^2 + r\sigma_{\beta\gamma}^2$
$\varepsilon_{(ij)k}$	1	1	1	σ_ε^2

Selanjutnya dapat dibentuk tabel ANOVA dari model linear campuran sebagai berikut :

Tabel 3. Tabel ANOVA

Faktor	Df	SS (Sum Square)	MS (Mean Square)	F
β_i	(a-1)	$\mathrm{Y}'[\left(\mathrm{I_a} - \frac{1}{a}\mathrm{J_a}\right) \otimes \frac{1}{b}\mathrm{J} \otimes \frac{1}{r}\mathrm{J_r}]\mathrm{Y}$	SSβ_i/(a-1)	$\frac{MS\beta_i}{MS(\beta\gamma)_{ij}}$
γ_j	(b-1)	$\mathrm{Y}'[\frac{1}{a}\mathrm{J_a} \otimes \left(\mathrm{I_b} - \frac{1}{b}\mathrm{J_b}\right) \otimes \frac{1}{r}\mathrm{J}]\mathrm{Y}$	SSγ_j/(b-)1	$\frac{MS\gamma_j}{MS(\beta\gamma)_{ij}}$
$(\beta\gamma)_{ij}$	(a-1)(b-1)	$\mathrm{Y}'[\left(\mathrm{I_a} - \frac{1}{a}\mathrm{J_a}\right) \otimes \left(\mathrm{I_b} - \frac{1}{b}\mathrm{J_b}\right) \otimes \frac{1}{r}\mathrm{J}]\mathrm{Y}$	SS$(\beta\gamma)_{ij}$/(a-1)(b-1)	$\frac{MS(\beta\gamma)_{ij}}{MS\varepsilon_{(ij)k}}$
$\varepsilon_{(ij)k}$	ab(r-1)	$\mathrm{Y}'[\mathrm{I_a} \otimes \mathrm{I_b} \otimes \left(\mathrm{I_r} - \frac{1}{r}\mathrm{J_r}\right)]\mathrm{Y}$	SS$\varepsilon_{(ij)k}$/ ab(r-1)	

Berdasarkan Tabel 3, yaitu tabel ANOVA, uji statistik pada model linear menggunakan pendekatan uji-F. F-Hitung didefinisikan sebagai berikut :

F-Hitung = $\frac{MS'}{MS''} \sim F_{p,q}$

Dengan derajat bebas :

$p = \frac{(MS')^2}{\frac{(MS')^2}{Df}}$ dan $q = \frac{(MS'')^2}{\frac{(MS'')^2}{Df}}$