ISOMORFISMA JUMLAH LANGSUNG DAN DARAP LANGSUNG DUA MODUL

(Skripsi)

Oleh

ALI ABDUL JABAR

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

ABSTRAK

ISOMORFISMA JUMLAH LANGSUNG DAN DARAP LANGSUNG DUA MODUL

Oleh

ALI ABDUL JABAR

Misalkan R merupakan Ring dan M, M' dan N merupakan Modul atas Ring R. Didefinisikan $Hom_R(M \oplus M', N)$ dan $Hom_R(N, M \times M')$ sebagai himpunan pemetaan operasi Jumlah Langsung dan Darap Langsung dari modul M, M' dan N atas Ring R. Diperoleh kesimpulan bahwa terdapat suatu pemetaan R-Homomorfisma $\varphi: f \to (f\alpha_i)$ yang bijektif sehingga $Hom_R(M \oplus M', N) \cong Hom_R(M, N) \times Hom_R(M', N)$ dan R-Homomorfisma $\varphi: f \to (p_i f)$ yang bijektif sehingga $Hom_R(N, M \times M') \cong Hom_R(N, M) \times Hom_R(N, M')$.

Kata Kunci : *Modul, Ring , Jumlah Langsung, Darap Langsung, R-Homomorfisma, Bijektif*

ABSTRACT

ISOMORPHISM OF DIRECT SUM AND DIRECT PRODUCT TWO MODULES

By

ALI ABDUL JABAR

Let R be a Ring and M, M' and N are Modules over Ring R. $Hom_R(M \oplus M', N)$ and $Hom_R(N, M \times M')$ are the sets of R-Homomorphism. We have the results that there exist bijective R-Homomorfisma $\varphi: f \to (f\alpha_i)$ such that $Hom_R(M \oplus M', N) \cong Hom_R(M, N) \times Hom_R(M', N)$ and bijective R-Homomorfisma $\varphi: f \to (p_i f)$ such that $Hom_R(N, M \times M') \cong Hom_R(N, M) \times Hom_R(N, M')$.

Keywords: *Module, Ring , Direct Sum, Direct product, R-Homomorfisma, Bijective*

ISOMORFISMA JUMLAH LANGSUNG DAN DARAP LANGSUNG DUA MODUL

Oleh

Ali Abdul Jabar

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Proposal Penelitian : **ISOMORFISMA JUMLAH LANGSUNG DAN DARAP LANGSUNG DUA MODUL**

Nama Mahasiswa : *Ali Abdul Jabar*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1317031005

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Drs. Suharsono, M.S., M.Sc., Ph.D.
NIP. 19620513 198603 1 003

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

2. Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Drs. Suharsono, M.S., M.Sc., Ph.D**

Sekretaris : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**

Penguji
Bukan Pembimbing : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Dr. Warsito, DEA.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **12 Juni 2017**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"ISOMORFISMA JUMLAH LANGSUNG DAN DARAP LANGSUNG DUA MODUL"** merupakan hasil karya saya sendiri dan bukan hasil karya orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung.

Apabila dikemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 15 Juni 2017

Penulis

Ali Abdul Jabar
NPM 131701005

MOTTO

"Barang siapa bersungguh-sungguh,

sesungguhnya kesungguhannya itu adalah untuk

dirinya sendiri."
(Q.S. Al-Ankabut [29]:6)

Tiada keyakinan yang membuat orang takut

menghadapi tantangan dan saya percaya pada diri

saya sendiri.
(Thomas Alfa Edison)

Orang-orang sukses telah belajar membuat

diri mereka melakukan hal yang harus dikerjakan

ketika hal itu memang harus dikerjakan,

entah mereka menyukainya atau tidak.
(Adhlus Huxley)

RIWAYAT HIDUP

Penulis adalah anak kelima dari lima bersaudara, dari Bapak Aceng dan Ibu Euis Yuyu yang dilahirkan pada 25 Juli 1994 di Kelurahan Iring Mulyo, Kecamatan Metro Timur, Kota Metro.

Penulis memulai pendidikan formalnya di TK Perwanida pada tahun 2000 kemudian dilanjutkan pada tingkat pendidikan dasar di SD Negeri 1 Metro Pusat pada tahun 2001, kemudian melanjutkan pendidikan tingkat menengah di SMP Negeri 2 Metro Timur pada tahun 2007 dan menyelesaikan pendidikan sekolah tingkat atas pada tahun 2013 di SMA Negeri 5 Metro Pusat.

Penulis terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada tahun 2013 melalui jalur SNMPTN tertulis. Selama menjadi mahasiswa penulis pernah menjadi pengurus di Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) sebagai anggota bidang keilmuan pada periode 2014-2015 dan pengurus Rohani Islam (ROIS) sebagai anggota bidang kaderisasi periode 2014-2015. Penulis juga pernah menjadi asisten pada mata kuliah kalkulus dan matematika diskrit.

Pada bulan Juli tahun 2016, Penulis melaksanakan kerja praktik di Perum BULOG Sub Divre Lampung Tengah di bidang administrasi dan keuangan selama empat minggu terhitung dari tangggal 18 Januari sampai tangal 15 Februari 2016.

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan syukur kehadirat Allah SWT, ku persembahkan karya ini sebagai tanda bukti dan cinta kasihku kepada :

Bapak (Aceng) dan ibu (Euis Yuyu) tersayang yang telah membesarkan, medidik, dan selalu medoakan, mencurahkan kasih sayangnya, serta selalu ada dikala ku sedih dan senang dengan pengorbanan yang tulus ikhlas demi kebahagian dan keberhasilanku.

Kakak dan Adik "Umi Kulsum" dan "Abdul Rahman Wahid" serta keluarga beasrku yang telah memberikan semangat kepadaku.

Teman-teman yang selalu membuatku tertawa, yang senantiasa memberikan doa, seeamngat dan nasihatnya demi keberhasilanku.

Para pendidik yang telah mendidikku, yang menjadikanku semakin berwawasan

Alamamater Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur kepada Allah SWT atas izin dan ridho-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Sholawat serta salam selalu tercurahkan kepada baginda Nabi Muhammad SAW, tauladan terbaik sepanjang masa.

Pada proses penyusunan skripsi yang berjudul " Jumlah Langsung Dari Modul Yang Dibangun Secara Berhingga ", penulis memperoleh banyak dukungan, kritik, dan saran yang membangun sehingga skripsi ini mampu diselesaikan.

Dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. Warsito, DEA., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung;
2. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika;
3. Bapak Drs. Suharsono, M.S., M.Sc., Ph.D., selaku Pembimbing Utama atas kesediaan memberi ilmu, waktu, bimbingan, saran dan kritik dalam proses menyelesaikan skripsi ini;
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Pembimbing Kedua atas waaktu, saran, bimbingan dan koreksi yang telah diberikan;
5. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., selaku Penguji atas saran dan masukan dalam menyelesaikan skripsi ini;
6. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si., Pembimbing Akademik;

7. Kedua orang tua penulis, Aceng dan Euis Yuyu yang telah memberikan kasih sayang, materiil, semangat, motivasi, spiritual, dan dukungannya;
8. Kakak dan adik penulis, Umi kulsum dan Abdul Rahman Wahid yang telah memberikan semangat dan motivasinya;
9. Rekan-rekan Matematika angkatan 2013 yang terus memberikan motivasi dan dukungan serta semangat, terima kasih atas kebersamaan, kebahagian, dan pengalaman yang tidak terlupakan;
10. Semua pihak yang telah membantu penulis baik selama masa studi maupun dalam menyelesaikan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, akan tetapi sedikit harapan semoga skripsi ini dapat berguna dan bemanfaat bagi pembaca. Aamiin.

Bandar Lampung, 15 Juni 2016

Penulis

Ali Abdul Jabar

DAFTAR ISI

DAFTAR NOTASI

$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real
$*$	Operasi biner
$\prod$	Darap Langsung
$Hom_R(M , N)$	Homomorfisma *R*-modul dari *M* ke *N*
$End(M)$	Endomorfisma *R*-modul dari *M*
$\bigoplus$	Jumlah lansung
$\circ$	Operasi Komposisi fungsi
$Ker\ f$	Kernel fungsi f
$Im\ f$	Image fungsi f
id	Fungsi identitas
f^{-1}	Pemetaan invers
${}_RMod$	*Categoty* R-modul
I	Himpunan indeks
i	Indeks
$\mathscr{C}$	Category

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Ruang vektor dalam struktur aljabar diartikan sebagai himpunan vektor V, bersama-sama dengan dua operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar yang harus memenuhi beberapa aksioma. Ruang vektor V atas lapangan F pada hakekatnya adalah grup komutatif $V = (V, +)$ yang dilengkapi dengan operasi pergandaan skalar dari lapangan F. Jika lapangan F diganti dengan suatu Ring maka akan diperoleh suatu struktur aljabar yang baru yaitu Modul atas Ring.

Modul merupakan himpunan dengan operasi pergandaan skalar dari Grup Abel dan Ring dengan elemen satuan yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Diberikan Grup Abel G dan Ring R dengan elemen satuan dioperasikan dengan operasi pergandaan skalar. Dengan demikian, G belum tentu merupakan ruang vektor atas R (karena Ring R belum tentu merupakan lapangan) terhadap operasi pergandaan skalar. Jadi, Modul atas Ring merupakan generalisasi ruang vektor atas lapangan. Modul atas Ring dibedakan menjadi dua yaitu Modul kiri dan Modul kanan atas suatu Ring.

Sama halnya dengan Grup atau Ring, Modul juga memiliki Submodul. Suatu Modul M memiliki Submodul M_i; untuk setiap indeks $i \in I$ dan I himpunan indeks. Pada Modul didefinisikan *cartesian product* yaitu Darap Langsung (*direct product)* dan Jumlah Langsung (*direct sum).* *Cartesian produk* dari Submodul Myaitu.$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$,$n \in \mathbb{N}$ disebut Darap Langsung atau *direct product* dinotasikan dengan $\prod_{i \in I} M_i$. Jumlah Langsung (*direct sum*) didefinisikan sebagai subset dari Darap Langsung (*direct product*) yang berisi elemen $x_i \in M_i$ dimana $x_i = 0$ untuk hampir semua i. Jumlah Langsung (*direct sum*) tentu saja merupakan Submodul dari Darap Langsung (*direct product*) dan dinotasikan dengan $\oplus$ jika $\sum_{i \in I} M_i = M$ dan $\bigcap_{i \in I} M_i = \{0\}$. Inilah yang menjadi ketertarikan penulis untuk menyelidiki Isomorfisma Darap Langsung (*direct product*) dan Jumlah Langsung (*direct sum*) dari dua Modul.

1.2 Batasan Masalah

Pada penelitian ini akan diselidiki sifat-sifat Isomorfisma Darap Langsung dan Jumlah Langsung dari dua Modul.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan yang dilakukan dari penelitian ini, yaitu mengkaji karakterisasi ataupun ciri-ciri Isomorfisma Darap Langsung dan Jumlah Langsung dari dua Modul.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah :

1. Menambah pengetahuan dan pengalaman penulis agar dapat mengembangkan ilmu yang diperoleh selama mengikuti perkuliahan di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

2. Memberikan sumbangan pemikiran dalam rangka memperluas dan memperdalam pengetahuan ilmu matematika khususnya Isomorfisma Jumlah Langsung dan Darap Langsung dua Modul.
3. Memberikan motivasi bagi pembaca dan peneliti untuk mengkaji lebih dalam permasalahan yang berhubungan dengan struktur aljabar khususnya teori Modul.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Grup

Pengkajian pertama, diulas tentang definisi Grup yang merupakan bentuk dasar dari suatu Ring dan Modul.

Definisi 2.1.1

Diberikan himpunan G dan operasi biner $*$. G disebut Grup yang dinotasikan dengan $(G,*)$ jika memenuhi aksioma berikut :

(i) $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in G$ ($*$ bersifat asosiatif);

(ii) Terdapat elemen e di G, yang disebut identitas di G, sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$, untuk setiap $a \in G$;

(iii) Untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$, sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, elemen a^{-1} disebut invers dari a (Dummit dan Fotte, 2004).

Untuk lebih memahami definisi Grup, berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.1.2

Diberikan n bilangan bulat positif dan $n\mathbb{Z}$ = $\{nm | nm \in \mathbb{Z}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle n\mathbb{Z}, +\rangle$ merupakan Grup.

i. Akan ditunjukkan bahwa $n\mathbb{Z}$ bersifat tertutup terhadap operasi +.

Diberikan sebarang $x, y \in n\mathbb{Z}$ dengan $x = nm_1$ dan $y = nm_2$ untuk suatu $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$.

$$x + y = nm_1 + nm_2$$

$$= n(m_1 + m_2) \in \mathbb{Z}$$

Jadi, $n\ \mathbb{Z}$ bersifat tertutup terhadap operasi +.

ii. Akan ditunjukkan bahwa elemen di $n\ \mathbb{Z}$ bersifat asosiatif terhadap +.

Diberikan sebarang $x, y, w \in n\mathbb{Z}$ dengan $x = nm_1$, $y = nm_2$ dan $w = nm_3$ untuk suatu $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$, sehingga:

$$\begin{aligned} x + (y + w) &= nm_1 + (nm_2 + nm_3) \\ &= nm_1 + n(m_2 + m_3) \\ &= n\big(m_1 + (m_2 + m_3)\big) \\ &= n\big((m_1 + m_2) + m_3\big) \\ &= n(m_1 + m_2) + nm_3 \\ &= (nm_1 + nm_2) + nm_3 \\ &= (x + y) + w \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa elemen di $n\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif terhadap operasi +.

iii. Akan ditunjukkan bahwa $n\mathbb{Z}$ memiliki elemen identitas.

Untuk setiap $nm \in \mathbb{Z}$, terdapat $0 \in n\mathbb{Z}$ sehingga untuk suatu $m \in \mathbb{Z}$

$nm + 0 = 0 + nm = nm.$

Jadi, elemen identitas di $n\mathbb{Z}$, yaitu 0.

iv. Akan ditunjukkan setiap elemen di $n\mathbb{Z}$ memiliki invers.

Diberikan sebarang $x \in n\mathbb{Z}$ dengan $x = nm$, akan ditentukan invers dari x :

$x + y = 0$

$nm + y = 0$

$y = 0 + (-nm)$

$y = -(nm)$

$y = n(-m) \in n\mathbb{Z}$

Jadi, invers dari nm adalah $n(-m)$. Hal ini berakibat bahwa setiap elemen di $n\mathbb{Z}$ memiliki invers.

Berdasarkan i-iv terbukti bahwa n$\mathbb{Z}$ merupakan Grup (Fraleigh, 2000).

Grup Abel (Grup Komutatif) merupakan salah satu bentuk Grup. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.1.3

Grup $(G,*)$ dikatakan Grup Abel (Grup Komutatif) jika $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in G$ (Dummit dan Foote, 2004).

Dari pendefinisian Grup Abel, berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.1.4

Diberikan $\mathbf{M} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{Z}\right\}$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{M} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ merupakan Grup Abel.

i. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{M} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ tertutup terhadap operasi $+$.

Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbf{M}$, maka

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix} \in \mathbf{M}$

ii. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{M} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ bersifat asosiatif terhadap operasi +.

Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \in \mathbf{M}$, maka

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c + e \\ d + f \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a + c + e \\ b + d + f \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

iii. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{M} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ memiliki elemen identitas.

Untuk setiap $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbf{M}$**,** terdapat $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}$, maka

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

iv. Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen $\mathbf{M} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ memiliki invers.

Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbf{M}$, akan ditentukan invers dari $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix} \in \mathbf{M}$$

Jadi invers $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ adalah $\begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$

v. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{M} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ bersifat komutatif terhadap opersai +.

Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbf{M}$, maka

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c + a \\ d + b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Berdasarkan i - v terbukti $\mathbf{M} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ merupakan Grup Abel

Contoh 2.1.5

Diberikan $\mathbf{N} = \{[a \quad b]; a, b \in \mathbb{Z}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{N} = \{[a \quad b]; a, b \in \mathbb{Z}\}$ merupakan Grup Abel.

i. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{N} = \{[a \quad b]; a, b \in \mathbb{Z}\}$ tertutup terhadap operasi +.

Diberikan sebarang $[a \quad b], [c \quad d] \in \mathbf{N}$, maka

$[a \quad b] + [c \quad d] = [a + c \quad b + d] \in \mathbf{N}$

ii. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{N} = \{[a \quad b]; a, b \in \mathbb{Z}\}$ bersifat asosiatif terhadap operasi +.

Diberikan sebarang $[a \quad b], [c \quad d], [e \quad f] \in \mathbf{N}$, maka

$$\begin{aligned} [a \quad b] + ([c \quad d] + [e \quad f]) &= [a \quad b] + [c + e \quad d + f] \\ &= [a + c + e \quad b + d + f] \\ &= [a + c \quad b + d] + [e \quad f] \\ &= ([a \quad b] + [c \quad d]) + [e \quad f] \end{aligned}$$

iii. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{N} = \{[a \quad b]; a, b \in \mathbb{Z}\}$ memiliki elemen identitas.

Untuk setiap $[a \quad b] \in \mathbf{N}$, terdapat $[0 \quad 0] \in \mathbf{N}$, maka

$$[a \quad b] + [0 \quad 0] = [0 \quad 0] + [a \quad b] = [a \quad b]$$

iv. Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen di $\mathbf{N} = \{[a \quad b]; a, b \in \mathbb{Z}\}$ memiliki invers.

Diberikan sebarang $[a \quad b] \in \mathbf{N}$, akan ditentukan invers dari $[a \quad b]$ sebagai berikut :

$$[a \quad b] + [x \quad y] = [0 \quad 0]$$

$$[x \quad y] = -[a \quad b] + [0 \quad 0]$$

$$[x \quad y] = -[a \quad b]$$

$$[x \quad y] = [-a \quad -b] \in \mathbf{N}$$

Jadi invers $[a \quad b]$ adalah $[-a \quad -b]$

v. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{N} = \{[a \quad b]; a, b \in \mathbb{Z}\}$ bersifat komutatif terhadap opersai +.

Diberikan sebarang $[a \quad b], [c \quad d] \in \mathbf{N}$, maka

$$\begin{aligned}[a \quad b] + [c \quad d] &= [a + c \quad b + d] \\ &= [c + a \quad b + d] \\ &= [c \quad d] + [a \quad b]\end{aligned}$$

Berdasarkan (i)-(v) terbukti $\mathbf{N} = \{[a \quad b]; a, b \in \mathbb{Z}\}$ merupakan Grup Abel.

Jadi terbukti bahwa $\mathbf{M} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ dan $\mathbf{N} = \{[a \quad b]; a, b \in \mathbb{Z}\}$ Grup Abel (Fraleigh, 2000).

Grup memiliki Subgrup yang akan didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1.5

Jika himpunan bagian dari H dari Grup G tertutup terhadap operasi biner di G dan jika perlakuan yang sama di H sama dengan di G, maka H Subgrup di G, H Subgrup di G dapat dinotasikan dengan $H \leq G$ atau $H < G$ (Fraleigh, 2000).

2.2 Ring

Pada bagian ini akan dibahas mengenai salah satu struktur aljabar yang terdiri atas satu himpunan dan dua operasi biner, yaitu Ring. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.2.1

Himpunan R dengan dua operasi biner + (penjumlahan) dan · (perkalian) merupakan Ring jika memenuhi aksioma berikut:

(i) $(R, +)$ merupakan Grup Abel;

(ii) Operasi perkaliannya bersifat asosiatif, yaitu $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ untuk setiap $a, b, c \in R$;

(iii) Hukum distribusi terpenuhi di R, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$
$(a + b) \cdot c = (a \cdot b) + (b \cdot c)$ dan $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
(Dummit dan Foote, 2004).

Untuk lebih jelasnya, diberikan contoh Ring sebagai berikut.

Contoh 2.2.2

Diberikan $\mathbf{G} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$. Akan ditunjukkan $\mathbf{G}$ merupakan Ring

i. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{G} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$ tertutup terhadap operasi $+$.

Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$, maka

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$$

ii. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{G} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$ bersifat asosiatif terhadap operasi $+$.

Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$, maka

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+e+i & b+f+j \\ c+g+k & d+h+l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \end{aligned}$$

iii. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{G} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$ memiliki elemen identitas terhadap operasi $+$.

Untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$, terdapat $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$, maka

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

iv. Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen di $\mathbf{G} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$ memiliki invers terhadap operasi $+$.

Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$, akan ditentukan invers dari $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & w \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & w \\ y & z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & w \\ y & z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & w \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

Jadi invers $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$

v. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{G} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$ bersifat komutatif terhadap operasi $+$.

Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$, maka

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

vi. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{G} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$ bersifat asosiatif terhadap operasi + .

Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$, maka

$$\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + cg & af + ch \\ be + dg & bf + dh \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ae + cg)i + (af + ch)k & (ae + cg)j + (af + ch)l \\ (be + dg)i + (bf + dh)k & (be + dg)j + (bf + dh)l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} aei + cgi + afk + chk & aej + cgj + afl + chl \\ bei + dgi + bfk + dhk & bej + dgj + bfl + dhl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} aei + afk + cgi + chk & aej + afl + cgj + chl \\ bei + bfk + dgi + dhk & bej + bfl + dgj + dhl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(ei + fk) + c(gi + hk) & a(ej + fl) + c(gj + hl) \\ b(ei + fk) + d(gi + hk) & b(ej + fl) + d(gj + hl) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right)$$

vii. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbf{G} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$ bersifat ditributif kiri dan distributif kanan.

Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & k \\ j & l \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$, maka

$$\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} i & k \\ j & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + e & c + g \\ b + f & d + h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & k \\ j & l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a + e)i + (c + g)j & (a + e)k + (c + g)l \\ (b + f)i + (d + h)j & (b + f)k + (d + h)l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ai + ei + cj + gj & ak + ek + cl + gl \\ bi + fi + dj + hj & bk + fk + dl + hl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ai + cj & ak + cl \\ bi + dj & bk + dl \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ei + gj & ek + gl \\ fi + hj & fk + hl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & k \\ j & l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & k \\ j & l \end{bmatrix}$$

Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$, maka

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e+i & g+j \\ f+k & h+l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(e+i)+c(f+k) & a(g+j)+c(h+l) \\ b(e+i)+d(f+k) & b(g+j)+d(h+l) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ae+ai+cf+ck & ag+aj+ch+cl \\ be+bi+df+dk & bg+bj+dh+dl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ae+cf & ag+ch \\ be+df & bg+dh \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ai+ck & aj+cl \\ bi+dk & bj+dl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

Berdasarkan i – vii terbukti $\mathbf{G} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ merupakan Ring (Fraleigh, 2000).

Pada Ring, terdapat elemen idempoten yang akan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.3

Suatu elemen a dan Ring R disebut idempoten jika $a^2 = a$. Setiap elemen idempoten $a \in R$ merupakan elemen reguler jika terdapat $b \in R$ maka $aba = a$ (Wisbauer, 1991).

Berikut diberikan beberapa contoh elemen idempoten pada suatu Ring.

Contoh 2.2.4

Jika $a \in R$ merupakan regular dan untuk suatu $b \in R$ maka a dapat dinyatakan sebagai $a = aba$. Akan ditunjukkan bahwa ab dan ba merupakan elemen idempoten.

Untuk setiap $a \in R$, terdapat $b \in R$ sehingga

$$\begin{aligned}(ab)^2 &= (ab)(ab)\\ &= (aba)b\\ &= ab\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa ab merupakan elemen idempoten.

$$\begin{aligned}(ba)^2 &= (ba)(ba)\\ &= (bab)a\\ &= ba\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa ba merupakan elemen idempoten.

2.3 Modul

Pada bagian ini akan dibahas mengenai Modul atas Ring R. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.3.1

Diberikan Ring R dengan elemen satuan dan M Grup Abel, dengan operasi pergandaan skalar

$$\cdot : R \times M \to M$$

M disebut Modul atas Ring R jika M merupakan Modul kiri dan Modul kanan.

(i) M disebut Modul kiri atas Ring R, jika untuk setiap $m, n \in M$ dan $a, b \in R$ memenuhi aksioma berikut ini:

a) $a(m+n) = am + an$;

b) $(a+b)m = am + bm$;

c) $(ab)m = a(bm)$;

d) $1m = m$.

(ii) M disebut Modul kanan atas Ring R, jika unutk setiap $m, n \in M$ dan $a, b \in R$ memenuhi aksioma berikut ini:

a) $(m+n)a = ma + na$;

b) $m(a+b) = ma + mb$;

c) $m(ab) = (ma)b$;

d) $m1 = m$ (Adkinds dan Weintraub, 1992).

Berikut ini diberikan contoh-contoh Modul

Contoh 2.3.2

Diberikan Ring $\mathbb{R}$ dan Grup Abel $\mathbb{R}^n$ sebagai berikut

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan Modul atas Ring R terhadap operasi pergandaan skalar.

Untuk memperlihatkan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan Modul atas Ring $\mathbb{R}$ haruslah $\mathbb{R}^n$ merupakan Modul kiri dan Modul kanan.

1. Akan ditunjukkan $\mathbb{R}^n$ merupakan Modul kiri atas Ring R. Didefinisikan operasi pergandaan skalar sebagai berikut:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

dengan $a \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (a \cdot x_1, a \cdot x_2, \dots, a \cdot x_n)$, untuk setiap $a \in R$ dan $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

i. Diberikan sebarang $a \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, maka diperoleh

$$a(\bar{x} + \bar{y}) = a\big((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)\big)$$

$$= a(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$=\big(a(x_1 + y_1), a(x_2 + y_2), \dots, a(x_n + y_n)\big)$

$= \big((ax_1 + ay_1), (ax_2 + ay_2), \dots, (ax_n + ay_n)\big)$

$= (ax_1, ax_2, \dots, ax_n) + (ay_1, ay_2, \dots, ay_n)$

$= a(x_1, x_2, \dots, x_n) + a(y_1, y_2, \dots, y_n)$

$= a\bar{x} + a\bar{y}$

Jadi, $a(\bar{x} + \bar{y}) = a\bar{x} + a\bar{y}$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$.

ii. Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka diperoleh

$(a_1 + a_2)(\bar{x}) = (a_1 + a_2)(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$= \big((a_1 + a_2)x_1, (a_1 + a_2)x_2, \dots, (a_1 + a_2)x_n\big)$

$= (a_1x_1, a_1x_2, \dots, a_1x_n) + (a_2x_1, a_2x_2, \dots, a_2x_n)$

$= a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$= a_1(\bar{x}) + a_2(\bar{x})$

Jadi $(a_1 + a_2)(\bar{x}) = a_1(\bar{x}) + a_2(\bar{x})$, untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

iii. Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka diperoleh

$(a_1.a_2)(\bar{x}) = (a_1.a_2)(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$= \big((a_1.a_2)x_1, (a_1.a_2)x_2, \dots, (a_1.a_2)x_n\big)$

$= (a_1a_2x_1, a_1a_2x_2, \dots, a_1a_2x_n)$

$= a_1(a_2x_1, a_2x_2, \dots, a_2x_n)$

$= (a_1)(a_2\bar{x})$

Jadi $(a_1.a_2)(\bar{x}) = (a_1)(a_2\bar{x})$, untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

iv. Diberikan sebarang $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$,

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
1(\bar{x}) &= 1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= (1x_1, 1x_2, \dots, 1x_n) \\
&= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= \bar{x}
\end{aligned}
$$

Jadi $1(\bar{x}) = \bar{x}$, untuk setiap $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Dari i-iv, terbukti bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan Modul kiri atas Ring R

2. Akan ditunjukkan $\mathbb{R}^n$ merupakan Modul kanan atas Ring R. Didefinisikan operasi pergandaan skalar sebagai berikut:

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

dengan $(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot a = (x_1 \cdot a, x_2 \cdot a, \dots, x_n \cdot a)$, untuk setiap $a \in R$ dan $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

i. Diberikan sebarang $a \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
(\bar{x} + \bar{y})a &= \big((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)\big)a \\
&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)a \\
&= \big((x_1 + y_1), a(x_2 + y_2), \dots, a(x_n + y_n)a\big) \\
&= \big((x_{1a} + y_1 a), (x_2 a + y_2 a), \dots, (x_n a + y_n a)\big) \\
&= (x_1 a, x_2 a, \dots, x_n a) + (y_1 a, y_2 a, \dots, y_n a) \\
&= (x_1, x_2, \dots, x_n)a + (y_1, y_2, \dots, y_n)a \\
&= \bar{x}a + \bar{y}a
\end{aligned}
$$

Jadi, $(\bar{x} + \bar{y})a = \bar{x}a + \bar{y}a$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$.

ii. Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
(\bar{x})(a_1 + a_2) &= (x_1, x_2, \dots, x_n)(a_1 + a_2) \\
&= \big(x_1(a_1 + a_2), x_2(a_1 + a_2), \dots, x_n(a_1 + a_2)\big) \\
&= (x_1 a_1, x_2 a_1, \dots, x_n a_1) + (x_1 a_2, x_2 a_2, \dots, x_n a_2) \\
&= (x_1, x_2, \dots, x_n) a_1 + (x_1, x_2, \dots, x_n) a_2 \\
&= (\bar{x}) a_1 + (\bar{x}) a_2
\end{aligned}
$$

Jadi, $(\bar{x})(a_1 + a_2) = (\bar{x}) a_1 + (\bar{x}) a_2$, untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

iii. Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
(\bar{x})(a_1 . a_2) &= (x_1, x_2, \dots, x_n)(a_1 . a_2) \\
&= \big(x_1(a_1 . a_2), x_2(a_1 . a_2), \dots, x_n(a_1 . a_2)\big) \\
&= (x_1 a_1 a_2, x_2 a_1 a_2, \dots, x_n a_1 a_2) \\
&= (a_1 x_1, a_1 x_2, \dots, a_1 x_n) a_2 \\
&= (\bar{x} a_1)(a_2)
\end{aligned}
$$

Jadi, $(\bar{x})(a_1 . a_2) = (\bar{x} a_1)(a_2)$, untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

iv. Diberikan sebarang $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
(\bar{x})1 &= (x_1, x_2, \dots, x_n)1 \\
&= (x_1 1, x_2 1, \dots, x_n 1) \\
&= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= \bar{x}
\end{aligned}
$$

Jadi, $(\bar{x})1 = \bar{x}$, untuk setiap $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Dari i-iv, terbukti bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan Modul kanan atas Ring $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}^n$ merupakan Modul atas Ring $\mathbb{R}$

Contoh 2.3.3

Diberikan Ring $\mathbf{G} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$ dan Grup Abel $\mathbf{M} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{Z}\right\}$.

Akan ditunjukkan $\mathbf{M} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ merupakan Modul kiri atas Ring

$\mathbf{G} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$

i. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$ dan $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbf{M}$, maka

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a(a + c) + b(b + d) \\ c(a + c) + d(b + d) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2 + ac + b^2 + bd \\ ca + c^2 + db + d^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2 + b^2 \\ ca + db \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ac + bd \\ c^2 + d^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ii. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$, dan $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbf{M}$, maka

$$\begin{aligned}
\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a + e)a + (b + f)b \\ (c + g)a + (d + h)b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2 + ea + b^2 + fb \\ ca + ga + db + hb \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2 + b^2 \\ ca + db \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ea + fb \\ ga + hb \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

iii. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$, dan $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbf{M}$, maka

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ae+bg)a+(af+bh)b \\ (ca+dg)a+(cf+dh)b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2e+bga+afb+b^2h \\ cea+dga+cfb+dhb \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ea+fb \\ ga+hb \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)$$

iv. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbf{M}$ dan dipilih $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$, maka

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Berdasarkan i-iv terbukti $\mathbf{M} = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ merupakan Modul kiri atas Ring $\mathbf{G} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$.

Contoh 2.3.4

Diberikan Ring $\mathbf{G} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$ dan Grup Abel $\mathbf{N} = \{[a \quad b]; a, b \in \mathbb{Z}\}$. Akan ditunjukkan $\mathbf{N} = \{[a \quad b]; a, b \in \mathbb{Z}\}$ merupakan Modul kanan atas Ring $\mathbf{G} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$.

i. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$ dan $[a \quad b], [c \quad d] \in \mathbf{N}$, maka

$$([a \quad b] + [c \quad d]) . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [a+c \quad b+d] . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= [(a+c)a+(b+d)c \quad (a+c)b+(b+d)d]$$

$$= [a^2 + ca + bc + dc \quad ab + cb + bd + d^2]$$

$$= [a^2 + bc \quad ab + bd] + [ca + dc \quad cb + d^2]$$

$$= [a \quad b].\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + [c \quad d].\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ii. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$, dan dan $[a \quad b] \in \mathbf{N}$, maka

$$[a \quad b].\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) = [a \quad b].\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$= [a(a+e) + b(c+g) \quad a(b+f) + b(d+h)]$$

$$= [a^2 + ae + bc + bg \quad ab + af + bd + bh]$$

$$= [a^2 + bc \quad ab + bd] + [ae + bg \quad af + bh]$$

$$= [a \quad b].\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + [a \quad b].\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

iii. Diberikan sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$, dan $[a \quad b] \in \mathbf{N}$, maka

$$[a \quad b].\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) = [a \quad b].\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

$$= [a(ae+bg) + b(ce+dg) \quad a(af+bh) + b(cf+dh)]$$

$$= [a^2e + abg + bce + bdg \quad a^2f + abh + bcf + bdh]$$

$$= [a^2 + bc \quad ab + bd].\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$= \left([a \quad b].\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

iv. Diberikan sebarang $[a \quad b] \in \mathbf{N}$ dan dipilih $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{G}$, maka

$$[a \quad b].\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [a \quad b]$$

Berdasarkan i-iv terbukti $\mathbf{N} = \{[a \quad b]; a, b \in \mathbb{Z}\}$ merupakan Modul kanan atas Ring $\mathbf{G} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$.

Dimisalkan R Ring dan $S \subseteq R$. Seperti yang telah diketahui, S Subring R jika:

1) $S \neq \emptyset$
2) $x - y \in S$, untuk setiap $x, y \in S$
3) $xy \in S$, untuk setiap x, y □ S

Begitu pula dengan Modul, Modul akan memiliki Submodul yang akan didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.3.5

Diberikan Ring R dengan elemen satuan dan M merupakan Modul atas R, $N \subseteq M$ disebut Submodul R (R-Submodul) dari M jika N merupakan Subgrup dari M yang juga merupakan Modul atas R dengan operasi yang sama di M (Adkins dan Weintraub, 1992).

Berdasarkan definisi ini, dapat disimpulkan bahwa Submodul M jika dan hanya jika:

1) N Subgrup M
2) N tertutup terhadap operasi pergandaan skalar

$$\cdot : R \times N \to N$$

yaitu $rn \in N$, untuk setiap $r \in R$ dan $n \in N$.

Berikut ini contoh dari Submodul atas suatu Ring R

Contoh 2.3.6

Diberikan $\mathbb{Z}$ merupakan Modul atas Ring R. Akan ditunjukkan bahwa himpunan $n\,\mathbb{Z}$ dengan $n \in \mathbb{N}$ merupakan Submodul dari $\mathbb{Z}$.

(i) Akan ditunjukkan bahwa $n\mathbb{Z}$ merupakan Subgrup dari $\mathbb{Z}$.

(a) Akan ditunjukkan bahwa operasi + bersifat tertutup di $n\mathbb{Z}$.

Diberikan sebarang $x, y \in n\mathbb{Z}$ dengan $x = nm_1$ dan $y = nm_2$ untuk suatu $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ dan $n \in \mathbb{N}$, sehingga:

x+y=$nm_1 + nm_2$

$= n(m_1 + m_2) \in n\mathbb{Z}$

Jadi, terbukti bahwa operasi + bersifat tertutup di $n\mathbb{Z}$

(b) Akan ditunjukkan bahwa $n\mathbb{Z} \neq \emptyset$.

Untuk setiap $m \in \mathbb{Z}$, ambil $m = 0$, sehingga

$nm = m(0) = 0 \in n\mathbb{Z}$

Jadi, terbukti bahwa $n\mathbb{Z} \neq \emptyset$.

(c) Akan ditunjukkan untuk setiap $x, y \in n\mathbb{Z}$, $xy^{-1} \in n\mathbb{Z}$.

Diberikan sebarang $x, y \in n\mathbb{Z}$ dengan $x = nm_1$ dan $y = nm_2$ untuk suatu $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ dan $n \in \mathbb{N}$.

$y^{-1} = n(-m_2) \in n\mathbb{Z}$ (karena $(-m_2) \in \mathbb{Z}$)

$xy^{-1} = nm_1 + n(-m_2)$

$= n(m_1 - m_2) \in n\mathbb{Z}$

Jadi, terbukti $xy^{-1} \in n\mathbb{Z}$, untuk setiap $x, y \in n\mathbb{Z}$.

(ii) Akan ditunjukkan bahwa operasi pergandaan skalar tertutup di $n\mathbb{Z}$

Diberikan sebarang $x \in n\mathbb{Z}$ dengan $x = nm$ untuk setiap $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ dan $r \in R$, maka:

$rx = r(nm) = n(rm) \in n\mathbb{Z}$

Jadi, terbukti bahwa operasi pergandaan skalar tertutup di $n\mathbb{Z}$.

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti bahwa $n\mathbb{Z}$ dengan $n \in \mathbb{N}$ merupakan Submodul dari $\mathbb{Z}$.

Seperti halnya pada Grup, dapat ditunjukkan bahwa irisan dan jumlahan dari dua Submodul juga membentuk Submodul, seperti yang diberikan dalam lemma berikut ini.

Lemma 2.3.7

Misal M Modul atas R dan N_1, N_2 Submodul, maka:

1. $N_1 \cap N_2$ merupakan Submodul di M
2. $N_1 + N_2$ merupakan Submodul di M

Bukti

1. Karena N_1 dan N_2 merupakan Submodul di M, maka $0 \in N_1$ dan $0 \in N_2$. Akibatnya $0 \in N_1 \cap N_2$. Sehingga, $N_1 \cap N_2$ bukan merupakan himpunan kosong.

   Diberikan sebarang $r \in \mathbb{R}$ dan $a, b \in N_1 \cap N_2$ maka $a, b \in N_1$ dan $a, b \in N_2$.

   Karena N_1 dan N_2 merupakan Submodul di M maka memenuhi $a - b \in N_1$ dan $a - b \in N_2$. Akibatnya, $a - b \in N_1 \cap N_2$.

   Karena N_1 dan N_2 masing-masing merupakan Submodul di M maka memenuhi operasi pergandaan skalar yaitu $r \cdot a \in N_1$ dan $r \cdot a \in N_2$ yang mengakibatkan $r \cdot a \in N_1 \cap N_2$

   Jadi, terbukti bahwa $N_1 \cap N_2$ merupakan Submodul di M.

2. Karena N_1 dan N_2 merupakan Submodul di M, maka $0 \in N_1$ dan $0 \in N_2$.

   Akibatnya $0 \in N_1 + N_2$. Sehingga, $N_1 + N_2$ bukan merupakan himpunan kosong.

   Diberikan sebarang $r \in \mathbb{R}$ dan $a + b, c + d \in N_1 + N_2$

   Karena N_1 dan N_2 merupakan Submodul di M maka memenuhi $a - c \in N_1$ dan $b - d \in N_2$. Akibatnya, $(a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d) \in N_1 + N_2$.

   Selanjutnya, Karena N_1 dan N_2 masing-masing merupakan Submodul di M maka memenuhi operasi pergandaan skalar yaitu $r \cdot a \in N_1$ dan $r \cdot b \in N_2$ yang mengakibatkan $r \cdot (a + b) = ra + rb \in N_1 + N_2$.

   Jadi, terbukti bahwa $N_1 + N_2$ merupakan Submodul di M.

Diberikan Ring R dengan elemen satuan, pada bagian sebelumnya telah dijelaskan tentang Modul yang merupakan Modul kiri. Suatu Submodul dapat dibangun oleh himpunan yang akan didefinisikan sebagai berikut.

2.4 Homomorfisma Modul

Modul merupakan generalisasi dari ruang vektor dan ditransformasikan linear pada ruang vektor juga dapat digeneralisasi pada Modul, yang disebut dengan Homomorfisma Modul. Homomorfisma Modul dapat dibentuk jika ada dua Modul atas Ring yang sama dan ada fungsi yang memetakan dua Modul tersebut. Untuk lebih jelasnya akan definisikan mengenai Homomorfisma Modul.

Definisi 2.4.1

Misalnya R Ring dan M, N Modul atas Ring R

1. Pemetaan $\varphi: M \to N$ merupakan Homomorfisma Modul jika memenuhi aksioma berikut:

   (a) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \forall x, y \in M$

   (b) $\varphi(rx) = r\varphi(x), \forall r \in R, x \in M.$

2. Homomorfisma Modul dikatakan Monomorfisma jika fungsi φ bersifat injektif dan dikatakan Epimorfisma jika fungsi φ bersifat surjektif. Jika fungsi φ bersifat injektif dan surjektif maka fungsi φ dikatakan Isomorfisma. Modul M dan N dikatakan isomorfik, dinotasikan $M \cong N$, jika terdapat Isomorfisma Modul dengan pemetaan $\varphi: M \to N$ (Dummit dan Foote, 2004).

Himpunan Homomorfisma dari M ke N dinotasikan sebagai $Hom_R(M, N)$ atau $Hom_R(M, N)$. Untuk $f \in Hom_R(M, N)$ didefinisikan *kernel* dan *image* dari f, yaitu

$ker\ f = \{m \in M | f(m) = 0\}$

$im\ f = \{f(m) \in N | m \in M]$

$ker\ f$ merupakan Submodul dari M dan $Im\ f$ merupakan Submodul dari N (Wisbauer, 1991).

Untuk memperjelas definisi Homomorfisma Modul atas suatu Ring. Pada halaman selanjutnya diberikan contoh Homomorfisma Modul.

Contoh 2.4.2

Diberikan suatu $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}[x]$ keduanya merupakan $\mathbb{Z}$-Modul. Pemetaan $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[x]$ dengan definisi $\varphi(a) = ax^3$, dimana $a \in \mathbb{Z}$, merupakan Homomorfisma Modul, karena

1. $\varphi(a+b) = (a+b)x^3$

   $= ax^3 + bx^3$

   $= \varphi(a) + \varphi(b)$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$
2. $\varphi(ra) = (ra)x^3$

   $= r(ax^3)$

   $= r\varphi(a)$, untuk $a \in \mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$.

Proposisi 2.4.3

Diberikan M, N dan L Modul atas Ring R.

(1) Pemetaan $\varphi : M \to N$ adalah Homomorfisma Modul atas Ring R jika dan hanya jika $\varphi(rx + y) = r\varphi(x) + \varphi(y)$, untuk setiap $x, y \in M$ dan $r \in R$.

(2) Diberikan φ, ω dan didefinisikan $\varphi + \omega$ oleh $(\varphi + \omega)(m) = \varphi(m) + \omega(m)$, untuk setiap $m \in M$.

Selanjutnya, $\varphi + \omega \in Hom_R(M, N)$ dan dengan operasi ini $Hom_R(M, N)$ disebut Grup Abel. Jika R Ring komutatif maka $r \in R$ didefinisikan $r\varphi$ oleh $(r\varphi)(m) = r\big(\varphi(m)\big)$, untuk setiap $m \in M$.

Kemudian, $r\varphi \in Hom_R(M, N)$ dan dengan perlakuan ini $Hom_R(M, N)$ yang merupakan Grup Abel dengan R Ring Komutatif merupaka R-Modul.

(3) Jika $\varphi \in Hom_R(L, M)$ dan $\omega \in Hom_R(M, N)$ maka $\omega \circ \varphi \in Hom_R(L, N)$.

Bukti

(1) Jika φ adalah Homomorfisma R-Modul, maka $\varphi(rx + y) = r\varphi(x) + \varphi(y)$. Sebaliknya, jika $\varphi(rx + y) = r\varphi(x) + \varphi(y)$, maka dengan mengambil $r = 1$ diperoleh $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. Selanjutnya, dengan mengambil $y = 0$, diperoleh $\varphi(rx) = r\varphi(x)$. Jadi, φ merupakan Homomorfisma R-Modul.

(2) Mengulas lagi, untuk memperlihatkan bahwa semua Grup Abel dan aksioma R-Modul yaitu dengan menggunakan definisi. Ring Komutatif R digunakan untuk menunjukkan $r\varphi$ memenuhi aksioma kedua dari Homomorfisma R-Modul, yaitu:

$(r_1\varphi)(r_2m) = r_1\varphi(r_2m)$, (dengan definisi $r_1\varphi$)

$= r_1r_2(\varphi m)$, (karena φ Homomorfisma)

$= r_2r_1\varphi(m)$, (karena R Komutatif)

$= r_2(r_1\varphi)(m)$.

(3) Diberikan sebarang $\varphi \in Hom_R(L, M)$ dan $\omega \in Hom_R(M, N)$ dan $r \in R$, $x, y \in L$, maka:

$(\omega \circ \varphi)(rx + y) = \omega\big(\varphi(rx + y)\big)$

$= \omega(r\,\varphi(x) + \varphi(y))$, (sifat (1))

$= r\omega(\varphi(x)) + \omega(\varphi(y))$, (sifat (1))

$= r(\omega \circ \varphi)(x) + (\omega \circ \varphi)(y)$

Jadi, dari (1) $\omega \circ \varphi$ adalah Homomorfisma Modul atas Ring R (Dummit dan Foote, 2004).

Homomorfisma Modul yang memetakan M ke M disebut dengan Endomorfisma dari Modul M, berikut definisinya.

Definisi 2.4.4

Ring $Hom_R(M, M)$ disebut Endomorfisma Ring dari Modul M dan dinotasikan dengan $End_R(M)$ atau $End(M)$. Elemen di $End(M)$ disebut Endomorfisma (Dummit dan Foote, 2004).

Untuk lebih memahami Endomorfisma Modul, berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.4.5

Didefinisikan $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$, dengan $\mathbb{R}^n$ Modul atas Ring $\mathbb{R}$ terhadap operasi pergandaan skalar. Pemetaan f dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^n$ yaitu untuk setiap $a \in \mathbb{R}, f(\bar{x}) = (a\bar{x})$, maka:

$$
\begin{aligned}
f(\bar{x} + \bar{y}) &= f\big((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)\big) \\
&= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + f(y_1, y_2, \dots, y_n) \\
&= (ax_1, ax_2, \dots, ax_n) + (ay_1, ay_2, \dots, ay_n) \\
&= f(\bar{x}) + f(\bar{y})
\end{aligned}
$$

Dan untuk setiap $r \in R, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, maka:

$$
\begin{aligned}
f(r\bar{x}) &= f\big(r(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) \\
&= f(rx_1, rx_2, \dots, rx_n) \\
&= (\ arx_1, arx_2, \dots, arx_n) \\
&= ar(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= ra(x_1, x_2, \dots, x_n)
\end{aligned}
$$

$= rf(\bar{x})$, jadi f merupakan Homomorfisma.

2.5 Jumlah Langsung *(Direct Sum)*

Suatu Modul dapat dioperasikan dengan pergandaan skalar dan juga dapat dioperasikan dengan Jumlah Langsung atau *direct sum* yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.5.1

Diberikan M_1, M_2 Submodul dari Modul M atas suatu Ring R. Jika $M = M_1 + M_2$ dan $M_1 \cap M_2 = 0$ maka M disebut Jumlah Langsung dari M_1 dan M_2, dinotasikan dengan $M = M_1 \oplus M_2$ dan M_1, M_2 disebut *direct summand* dari M.

Pada kasus ini, setiap $m \in M$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai $m = m_1 + m_2$ dengan $m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$ dan M_1, M_2 disebut hasil Jumlah Langsung dari M.

Jika M_1 adalah hasil langsung, maka terdapat Submodul di M_2 dengan $M = M_1 \oplus M_2$ (Wisbauer, 1991).

Hasil Jumlah Langsung dari Modul M adalah A dari M sedemikian sehingga $A \oplus B = M$ untuk suatu Submodul B dari M (Grillet, 1999).

Untuk lebih jelasnya, akan diberikan contoh Jumlah Langsung dari suatu Ring.

Contoh 2.5.2

Diberikan $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}_6$, maka $\{0\}$, $\{0,3\}$, $\{0,2,4\}$, $\mathbb{Z}_6$ merupakan Submodul dari $\mathbb{Z}_6$ sebagai $\mathbb{Z}$-Modul. Perhatikakan bahwa $\{0,3\}+\{0,2,4\}= \mathbb{Z}_6$ dan

{0,3}∩{0,2,4}={0}. Dengan demikian Submodul {0,3} merupakan hasil Jumlah Langsung dari Modul $\mathbb{Z}_6$.

Dalam teorema berikut diberikan sifat Jumlah Langsung dari Modul atas suatu Ring.

Teorema 2.5.3

Jika M Modul atas Ring R dan $M_1, M_2, \dots, M_n$ Submodul dari M sedemikian sehingga

(1) $M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$

(2) $M_i \cap (M_1 + M_2 + \cdots + M_{i-1} + M_{i+1} + M_n) = 0$,untuk $1 \leq i \leq n$ maka

$M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$.

Bukti

Diberikan $f_i: M_i \to M$ dengan $f_i(x) = x$ untuk semua $x \in M_i$ dan didefinisikan

$$f: M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n \to M$$

Dengan operasi

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

f adalah Homomorfisma Modul atas Ring R dan dengan mengikuti kondisi (1) maka f surjektif. Diberikan $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \ker(f)$, maka

$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = 0$ sehingga untuk $1 \leq i \leq n$ diperoleh

$x_i = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_n)$.

Oleh karena itu,

$x_i = M_i \cap (M_1 + M_2 + \cdots + M_{i-1} + M_{i+1} + M_n) = 0$. Maka $(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ dan f adalah Isomorfisma (Adkins dan Weintraub, 1992).

Dari pendefinisian Jumlah Langsung suatu Modul atas Ring, berikut diberikan definisi dari Submodul Komplemen.

Definisi 2.5.4

Jika M adalah R-Modul dan $M_1 \subseteq M$ merupakan Submodul, katakan bahwa M_1 yaitu Jumlah Langsung dari M, atau komplemen di M, jika terdapat Submodul $M_2 \subseteq M$ maka $M = M_1 \oplus M_2$.

Untuk lebih jelasnya, berikut diberikan contoh Submodul Komplemen dari suatu Modul atas Ring.

Contoh 2.5.5

Diberikan $R = Z$ dan $M = Z_{p^2}$. Jika $M_1 = \langle p \rangle$ maka M_1 tidak memiliki komplemen karena M_1 hanyalah Subgrup dari M yang berorder p, jadi kondisi ini tidak memungkin Teorema 2.5.3 bagian (2) terpenuhi (Adkins dan Weintraub, 1992).

2.6 Darap Langsung (*Direct Product*)

Darap Langsung atau *Direct product* dari suatu Modul merupakan *cartesian product* dengan operasi penjumlahan secara sepotong-sepotong (*componentwise*) dan pergandaan skalar untuk setiap anggota dari Submodul-submodul yang akan didefinisikan pada halaman selanjutnya.

Definisi 2.6.1

Darap Landung suatu $(A_i)_{i\in I}$ dari R-Modul adalah *cartesian product* $\prod_{i\in I} A_i$ (himpunan semua $(x_i)_{i\in I}$ sedemikian sehingga $x_i \in A_i$ untuk setiap *i*) dengan penjumlahan sepotong-sepotong (*componentwise*) dan pergandaan skalar dari setiap komponen R.

$$(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I}$$

$$r(x_i)_{i\in I} = (rx)_{i\in I}$$

(Grillet, 1999).

2.7 Category

Category $\mathcal{C}$ berisi obj($\mathcal{C}$) *objek*, *himpunan morfisma* $Hom(A, B)$ untuk setiap pasangan terurut (A, B) dari objek, dan *komposisi* $Hom(A, B) \times Hom(B, C) \to Hom(A, C)$, dinotasikan dengan $(f, g) \mapsto gf$ untuk setiap terurut A, B, C sehingga memenuhi aksioma berikut :

- Asosiatif

  Jika $f: A \to B, g: B \to C, h: C \to D$, maka $(hg)f = h(gf)$,
- Identitas

  Untuk setiap objek A terdapat morfisma $1_A: A \to A$ sedemikian sehingga untuk setiap morfisma $f: A \to B$ maka $f1_A = 1_Bf = f$.

Contoh 2.6.1

- Himpunan : Himpunan merupakan objek dan fungsi merupakan morfisma.
- Grup : Grup merupakan objek dan Homomorfisma merupakan morfisma.

- Ring : Ring merupakan objek dan Ring Homomorfisma merupakan morfisma
- R-Modul : objek merupakan R-Modul dan R-Modul Homomorfisma merupakan morfisma (Rotman, 2002).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2016/2017 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang dilakukan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan langkah-langkah sebabai berikut:

1. Membuktikan Darap Langsung (*direct product*) dan Jumlah Langsung (*direct sum*) merupakan suatu Modul.
2. Membuktikan Darap Langsung (*direct product*) dan Jumlah Langsung (*direct sum*) merupakan *product* dan *coproduct* dalam *category* R-Modul
3. Membuktikan R-Homomorfisma merupakan suatu Modul.
4. Membuktikan Isomorfisma Darap Langsung (*direct product*) dan Jumlah Langsung (*direct sum*) dari dua Modul.
5. Memberikan contoh Isomorfisma Darap Langsung (*direct product*) dan Jumlah Langsung (*direct sum*) dari dua Modul.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian, telah dikaji mengenai karakteristik Jumlah Langsung dan Darap Langsung sebagai berikut:

- $Hom_R(M \oplus M', N) \cong Hom_R(M, N) \times Hom_R(M', N)$
- $Hom_R(N, M \times M') \cong Hom_R(N, M) \times Hom_R(N, M')$

dengan M, M' dan N merupakan Modul atas Ring R.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, W.A, Weintraub, S.H. 1992. *Algebra An Approach Via Module Theory*. Springer Verlag, New York.

Dummit, D.S. and Foote, R.M. 2004. *Abstract Algebra Third Edition*. John Wiley & Sons, Inc., United States of America.

Fraleigh, J.B. 2000. *A First Course In Abstract Algebra*. Sixth Edition. Adison Wesley Publishing Company, Inc., Philippines.

Grillet, A.P. 1999. *Graduate Texts In Mathematics.* Second Edition. Springer, New Orleans.

Rotman, J.J. 2002. *Advance Modern Algebra*. First Edition. Prentice Hall, New Jersey.

Wasbauer, R. 1991. *Foundation Of Modules And Ring Theory*. Gordon And Breach, philadephia.