PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TAK TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE MAKSIMAL LIMA DENGAN *LOOP* MAKSIMAL LIMA TANPA GARIS PARALEL

(Tesis)

Oleh

SUHARYOKO

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

ABSTRAK

PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TAK TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE MAKSIMAL LIMA DENGAN *LOOP* MAKSIMAL LIMA TANPA GARIS PARALEL

Oleh
SUHARYOKO

Graf G disebut graf terhubung jika untuk setiap dua titik yang berbeda di G terdapat suatu *path* yang menghubungkan dua titik tersebut, jika tidak maka disebut graf tak terhubung. Suatu graf dapat diberi label pada titik dan garisnya. Jika hanya titik yang diberi label disebut pelabelan titik, jika hanya garis disebut pelabelan garis, dan jika titik dan garis yang diberi label maka disebut pelabelan total. Suatu garis pada graf yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama disebut *loop*, sedangkan dua garis disebut garis paralel jika dua garis tersebut menghubungkan dua titik yang sama. Jika diberi n titik dan m garis, banyak graf yang dapat dibentuk, baik terhubung atau tidak terhubung, sederhana maupun tidak. Pada penelitian ini dihasilkan rumus untuk menghitung banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde maksimal lima dengan *loop* maksimal lima tanpa garis paralel untuk $n \leq 5$ dan $m \geq 1$.

Kata Kunci : *loop*, orde, garis paralel, pelabelan titik, graf tak terhubung

ABSTRACT

COUNTING THE NUMBER OF DISCONNECTED VERTEX LABELED GRAPH WITH ORDER MAXIMAL FIVE AND LOOP MAXIMAL FIVE WITHOUT PARALLEL EDGES

By
SUHARYOKO

A graph G is called connected if for every pair of vertices in G there exists a path connecting them, otherwise, G is disconnected. A graph can be labeled. If only the vertices are labeled then it is called as vertex labeling, if only edges are labeled, it is called an edge labeling, and if both vertices and edges are labeled is called total labeling. Given n vertices and m edges there are a lot of possible graphs can be constructed either connected or not, simple or not. In this research we determine formulas used to count disconnected vertex labeled graphs with order maximal five and loop maximal five without parallel edges for $n \leq 5$ dan $m \geq 1$.

Key words : vertex labeled, disconnected graf, vertex order

PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TAK TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE MAKSIMAL LIMA DENGAN *LOOP* MAKSIMAL LIMA TANPA GARIS PARALEL

Oleh

SUHARYOKO

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Memperoleh Gelar
MAGISTER SAINS

Pada

Jurusan Matematika Program Studi Magister Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Tesis : **PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TAK TERHUBUNG BERLABEL TITIK BERORDE MAKSIMAL LIMA DENGAN *LOOP* MAKSIMAL LIMA TANPA GARIS PARALEL**

Nama Mahasiswa : Suharyoko

Nomor Pokok Mahasiswa : 1527031001

Program Studi : Magister Matematika

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP 19760411 200012 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

Sekretaris : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

3. Direktur Program Pascasarjana

Prof. Dr. Sudjarwo, M.S.
NIP 19530528 198103 1 002

Tanggal Lulus Ujian Tesis : **19 Juni 2017**

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan dengan sebenarnya bahwa :

Tesis yang berjudul Penentuan Banyaknya Graf Tak Terhubung Berlabel Titik Berorde Maksimal Lima Dengan *Loop* Maksimal Lima Tanpa Garis Paralel adalah karya saya sendiri dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan atas karya penulis lain dengan cara yang tidak sesuai dengan etika ilmiah yang berlaku dalam masyarakat akademik atau yang disebut plagiarisme.
Hak intelektual atau karya ilmiah ini diserahkan sepenuhnya kepada Universitas Lampung.

Atas pernyataan ini, apabila dikemudian hari ternyata diketemukan adanya ketidakbenaran, saya bersedia menaggung akibat dan sanksi yang diberikan kepada saya, saya bersedia dan sanggup dituntut sesuai dengan hukum yang berlaku.

Bandar Lampung, Juni 2017
Pembuat Pernyataan

Suharyoko
NPM : 1527031001

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Tanjung Karang pada tanggal 03 Juli 1984, dari pasangan Bapak Sukardi Siswoadmodjo dan Ibu Temu Djariah. Penulis menempuh pendidikan Taman Kanak-Kanak di TK KURNIA Tanjung Gading pada Tahun 1990, dilanjutkan kependidikan dasar di SDN 2 Tanjung Gading pada tahun 1991. Setelah lulus pada jenjang tersebut pada tahun 1997 melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP UTAMA 3 Bandar Lampung. Penulis menyelesaikan pendidikan menengah akhir di SMA UTAMA 3 Bandar Lampung pada tahun 2003 dan pada tahun yang sama diterima Universitas Lampung Jurusan Matematika FMIPA dengan jalur UMPTN hingga semester 5, karena kondisi biaya akhirnya terhenti, kemudian pada tahun 2007 melanjutkan konversi ke STKIP PGRI Bandar Lampung pada Jurusan Pendidikan Matematika. Kemudian pada tahun 2015 melanjutkan di Program Magister Matematika FMIPA Universitas Lampung. Riwayat pekerjaan tahun 2000-2003 sebagai loper koran, tahun 2003-2005 sebagai office boy, tahun 2007-2015 sebagai guru di SMP UTAMA 3 Bandar Lampung, tahun 2013-2016 sebagai tutor di PKBM Anak Bangsa, tahun 2014- sekarang tutor di PKBM Melati, tahun 2015-sekarang sebagai guru dan kesiswaan di SMP MUTIARA BANGSA Bandar Lampung

PERSEMBAHAN

Kupersembahkan karya sederhana ini untuk :

Almarhum Bapak

Ibu

Bapak mertua

Ibu Mertua

Istriku

Anakku

Sebagai Ungkapan Rasa Terimakasih dan Bakti Atas Segala Do`a dan Kasih Sayang Serta Pengorbanan Dari Keberhasilanku Ini

MOTTO

Segala perkara dapat ku tanggung didalam Dia yang memberi kekuatan kepadaku
(Filipi 4:13)

Serahkanlah perbuatanmu kepada Tuhan, maka terlaksana segala rencanamu
(Amsal 16:3)

Janganlah kamu kuatir tentang apa pun juga, tetapi nyatakanlah dalam segala hal keinginanmu kepada Allah dalam doa dan permohonan dengan ucapan syukur
(Filipi 4:6)

SANWACANA

Puji syukur atas kasihNya dan anugrahNya yang berlimpah dalam menyelesaikan tesis ini. Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar magister sains pada program studi Magister Matematika, FMIPA Universitas Lampung.

Selesainya penulisan tesis ini adalah berkat motivasi dan pengarahan serta bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada :

1. Ibu Dra. Wamiliana, M.A, Ph.D selaku pembimbing pertama yang selalu sabar dalam membimbing dan mengarahkan penelitian tesis ini.
2. Ibu Dr. Asmiati, S.Si, M.Si selaku Ketua Program Studi Magister Matematika dan juga sebagai pembimbing kedua serta sebagai pembimbing akademik yang selalu memberikan motivasi dan semangat dalm penyelesaian tesis ini.
3. Bapak Drs. Mustofa Usman, M.A, Ph.D selaku pembahas yang telah membimbing dan memberikan arahan dalam penyelesaian tesis ini.
4. Bapak Prof. Warsito, S.Si, DEA, Ph.D selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
5. Bapak Sukardi Siswoadmodjo (Alm) dan Ibuku Temu Djariah yang telah memberikan motivasi dan dukungan materi.
6. Bapak dan Ibu mertua yang selalu memotivasi dan mendoakan.
7. Istriku Mei Pesta Prasi yang telah memberikan motivasi dan pengorbanan dalam pembiayaan untuk menyelesaikan program magister ini.
8. Anakku Timothy Emmanuel yang selalu memberi semangat.

9. Kakak, Embak, dan Adikku yang selalu mendukung dan memberikan semangat.
10. Pak Agus, Bu Misgiati, Bu Nurmaita, Pak Devri, Reni yang selalu memberikan semangat dalam penyelesaian tesis ini.
11. Bu Dra. Idawati dan teman-teman di SMP MUTIARA BANGSA dan SMP UTAMA 3 yang selalu memberikan dukungan.
12. Almamaterku tercinta Universitas Lampung.

Penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk kesempurnaan tesis ini. Akhirnya penulis mengucapkan terimakasih, semoga tesis ini dapat memberikan manfaat bagi kita semua.

Bandar Lampung, Juli 2017
Penulis

Suharyoko

DAFTAR ISI

Halaman

IV.HASIL DAN PEMBAHASAN

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

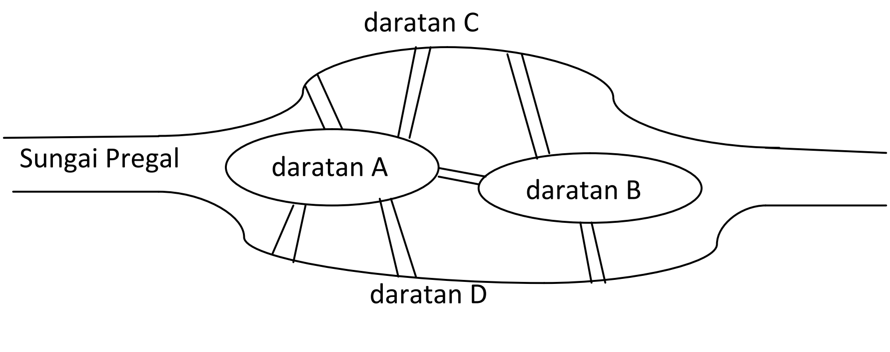
Halaman

I. PENDAHULUAN

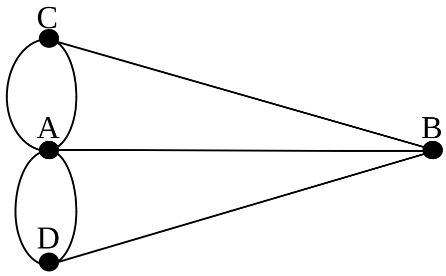
1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah berusia lebih dari 280 tahun, tetapi memiliki banyak terapan dalam berbagai bidang pada saat ini. Graf digunakan dalam mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Teori graf dapat digunakan untuk mempresentasikan masalah. Teori graf dapat mempresentasikan jaringan transportasi, jaringan sistem kerja pada salesman, rangkaian listrik, jalur kereta api, pembentukan rangkaian isomer senyawa kimia karbon serta pipanisasi saluran air pada gedung-gedung.

Menurut catatan sejarah , masalah jembatan Konigsberg adalah masalah pertama kali yang menggunakan graf yaitu pada tahun 1736. Di kota Konigsberg (sebelah timur negara bagian Prussia, Jerman) yang pada saat ini berganti nama menjadi kota Kalinigrad, terdapat sungai Pregal yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua anak sungai sehingga sungai tersebut membagi daratan menjadi empat daratan yang terpisah



Gambar 1. Jembatan Konigsberg



Gambar 2. Bentuk representasi graf

Ada tujuh jembatan yang menghubungkan daratan yang terbelah karena aliran sungai tersebut. Masalah jembatan Konigberg adalah apakah mungkin melalui ke tujuh jembatan itu masing-masing tepat satu kali, dan kembali lagi ketempat semula. Sebagian penduduk kota itu sepakat bahwa tidak mungkin melalui jembatan hanya sekali dan kembali ketempat asal mula keberangkatan, tetapi mereka tidak dapat menjelaskan mengapa demikian jawabannya.

Pada tahun 1736, seorang matematikawan Swiss, Leonhard Euler adalah orang yang pertama kali berhasil menemukan jawaban itu dengan pembuktian yang sederhana. Ia memodelkan masalah ini kedalam bentuk gambar yang selanjutnya dinamakan representasi graf. Daratan (titik-titik yang dihubungkan dengan jembatan) dinyatakan sebagai titik (noktah) yang sebut simpul *(vertex)* dan jembatan dinyatakan dengan garis yang disebut sisi *(edge).* Setiap titik diberi label huruf A,B,C, dan D. Graf yang dibuat Euler dapat dilihat pada gambar di atas.
Jawaban yang dikemukakan oleh L.Euler adalah tidak mungkin orang akan melalui ketujuh jembatan itu hanya dengan masing-masing satu kali dan kembali lagi ketempat asal keberangkatan jika derajat setiap titik tidak seluruhnya genap (Munir,2001). Derajat dari titik v_i adalah jumlah garis yang menempel pada titik v_i.

Secara matematis, graf didefinisikan sebagai berikut : suatu Graf G sebagai pasangan himpunan (V,E) yang dalam hal ini V merupakan himpunan tidak kosong dari titik-titik dan E merupakan himpunan pasangan tidak terurut yang menghubungkan sepasang titik yang disebut garis. Banyaknya titik pada graf G dinotasikan dengan $|V|$ dan banyaknya garis dinotasikan dengan $|E|$.

Pada suatu graf dapat diberikan label pada titik (noktah) atau pada garisnya, bila yang diberi label hanya pada titik maka disebut pelabelan titik, dan bila pada garisnya saja yang diberi label maka disebut pelabelan garis, tetapi jika titik dan garisnya yang diberi label maka disebut pelabelan total.

Pada graf keterhubungan dua buah titik adalah penting. Dua buah titik v_i dan titik v_j dikatakan terhubung jika terdapat lintasan (*path*) dari v_i ke v_j. Jika dua titik terhubung maka pasti suatu titik dapat dicapai dari titik yang lain, jika setiap pasang titik didalam graf terhubung, maka graf tersebut dikatakan graf terhubung. Tetapi jika tidak ada lintasan pada titik tersebut maka graf tersebut dikatakan graf tak terhubung.

Loop (sisi gelang) merupakan suatu garis yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama, sedangkan dua garis atau lebih yang menghubungkan dua titik yang sama disebut garis paralel. Jika suatu graf tidak terdapat *loop* dan garis paralel maka graf tersebut dinamakan graf sederhana. (Deo,1989)

Penghitungan ataupun Enumerasi pada graf pertama kali dilakukan oleh matematikawan Cayley (1874) sekitar 138 tahun setelah teori graf pertama kali dikemukakan oleh L. Euler. Untuk menentukan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik tanpa garis paralel yang diteliti oleh Winarni (2015) serta penelitian mengenai penghitungan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde maksimal empat yang diteliti oleh Sari (2016). Wamilliana (2016) meneliti tentang banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde maksimal lima tanpa garis paralel. Didasari hasil yang didapat maka penulis tertarik untuk meneliti penentuan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde maksimal lima dengan *loop* maksimal lima tanpa garis paralel.

1.2 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini pembahasan dibatasi hanya untuk graf tak terhubung berlabel titik dengan *loop* maksimal lima tanpa garis paralel jika $n \leq 5$ dengan $m \geq 1$, n adalah banyaknya titik dan m adalah banyaknya garis pada graf.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini yaitu :

1. Mengetahui banyaknya graf tak terhubung berlabel titik dengan *loop* maksimal lima tanpa garis paralel, untuk $n \leq 5$ dengan $m \geq 1$.
2. Menentukan rumus jumlah graf tak terhubung berlabel titik dengan *loop* maksimal lima tanpa garis paralel, untuk $n \leq 5$ dengan $m \geq 1$.

1.4 Manfaat Penelitian

1. Memperluas ilmu pengetahuan mengenai khususnya graf tak terhubung berlabel titik dengan *loop* tanpa garis paralel.
2. Sebagai referensi bagi pembaca untuk penelitian lanjutan, serta dapat memberikan kontribusi dalam mempelajari ilmu matematika khususnya pada bidang graf.

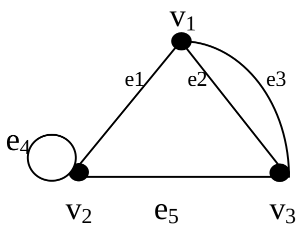
II.TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa istilah, definisi dan konsep – konsep yang mendukung dalam penelitian yang akan dilakukan.

2.1 Konsep Dasar Graf

Berikut akan diberikan konsep dasar graf yang bersumber dari Deo (1989) :

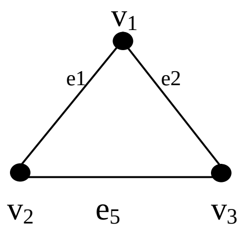
Graf adalah himpunan terurut (V(G),E(G)), dengan V(G) menyatakan himpunan titik dari G dengan $V(G) \neq \emptyset$, dan E(G) menyatakan himpunan garis yaitu pasangan tak terurut dari V(G) . Banyaknya himpunan titik V(G) disebut orde dari graf G. Banyaknya himpunan titik pada graf G dinyatakan sebagai $|E(G)| = n$, dan banyaknya garis pada graf G dinyatakan sebagai $|V(G)| = m$.



Gambar 3. Contoh graf G dengan 3 titik dan 5 garis.

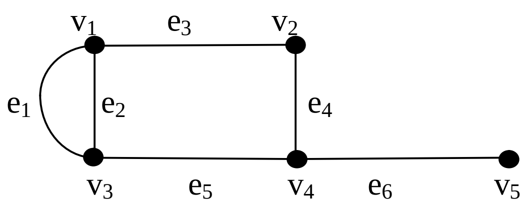
Pada suatu graf, dua titik disebut bertetangga (*adjacent*) jika terdapat satu atau lebih garis yang menghubungkan keduanya, garis tersebut menempel pada titik yang sama. Himpunan titik yang bertetangga dengan v disebut tetangga (*neighbor*) dari v, dinyatakan sebagai N(v). Jika suatu titik v merupakan titik akhir atau ujung dari garis e, maka titik v dikatakan menempel (*incident*) pada garis e. Pada Gambar 2 dapat dilihat bahwa garis e_4 menempel pada v_2 dan titik v_2 bertetangga dengan v_1 dan $v_{3.}$

Graf sederhana adalah graf yang tidak terdapat *loop* maupun garis paralel.



Gambar 4. Contoh graf sederhana dengan 3 titik dan 3 garis.

Walk merupakan barisan berhingga dari titik dan garis yang dimulai dan diakhiri dengan titik, sedemikian sehingga setiap garis yang menempel pada titik sebelum dan sesudahnya. *Walk* yang berawal dan berakhir dititik yang sama adalah *walk* tertutup. Sedangkan jika *walk* yang berawal dan berakhir dititik yang berbeda disebut *walk* terbuka.

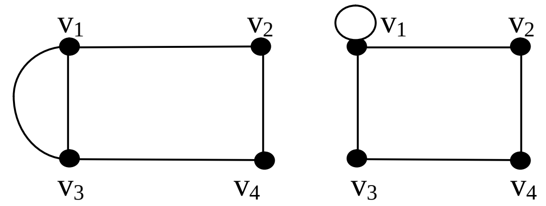


Gambar 5 . Contoh graf yang memiliki *walk* tertutup dan terbuka

Salah satu contoh *walk* tertutup pada Gambar 4 yaitu v_1 e_3 v_2 e_4 v_4 e_5 v_3 e_2 v_1 dan salah satu contoh *walk* terbuka yaitu v_1 e_3 v_2 e_4 v_4 e_6 v_5.

Path merupakan *walk* yang semua titiknya berbeda. Salah satu contoh *path* yang dapat dibentuk dari Gambar 4 yaitu : v_1 e_3 v_2 e_4 v_4 e_6 v_5. *Path* tertutup disebut sirkuit.

Loop merupakan garis yang memiliki titik ujung yang sama. Sedangkan garis pararel adalah dua garis atau lebih yang menghubungkan dua titik yang sama.

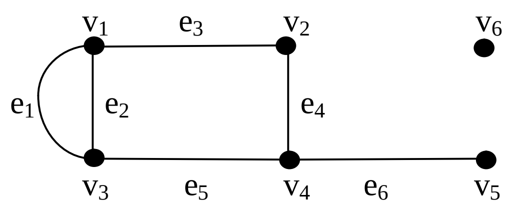


(a) (b)

Gambar 6. (a) Contoh graf dengan garis paralel (b) contoh graf dengan *loop*

Derajat (*degree*) dari suatu titik v pada graf G dinotasikan *deg*(v), adalah banyaknya garis yang menempel pada titik v dengan *loop* terhitung dua.

Titik terasing merupakan titik yang memiliki derajat nol, sedangkan titik *pendant* (daun) adalah titik yang memiliki derajat satu.



Gambar 7. Contoh graf yang memiliki 1 titik terasing (v_{6}) dan 1 titik *pendant* (v_5)

Berikut ini adalah lemma yang menyatakan hubungan antara jumlah derajat semua titik pada suatu graf G dengan banyak garisnya.

Lemma 1. Misalnya G(V,E) adalah graf terhubung dengan |E| = e, maka:

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2e$$

Bukti : Dalam sebarang graf, masing-masing garis menyumbangkan dua titik, sehingga setiap garis menyumbangkan tepat dua untuk jumlah derajat titik. Jadi jumlah derajat pada titik sama dengan dua kali jumlah garis pada graf.

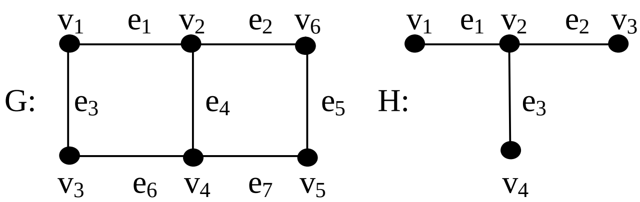
Lemma 2. Untuk sembarang graf G, banyaknya titik yang berderajat ganjil selalu genap.

Bukti : Misalkan v_{genap} dan v_{ganjil} masing-masing adalah himpunan-himpunan titik yang berderajat genap dan berderajat ganjil pada G(V,E). Maka persamaan dapat ditulis sebagai berikut :

$$\sum_{i=i}^{n} d(v_i) = \sum_{v_{genap}} d(v_j) + \sum_{v_{ganjil}} d(v_k)$$

Karena $d(v_j)$ untuk setiap $v_j \in v_{genap}$, maka suku pertama dari ruas kanan persamaan harus bernilai genap. Ruas kiri persamaan juga harus bernilai genap. Nilai genap pada ruas kiri hanya benar bila suku kedua dari ruas kanan juga harus genap. Karena $d(v_k)$ untuk setiap $v_k \in v_{ganjil},$ maka banyaknya titik v_k didalam v_{ganjil} harus genap agar jumlah seluruh derajatnya bernilai genap, jadi banyaknya titik yang berderajat ganjil selalu genap.

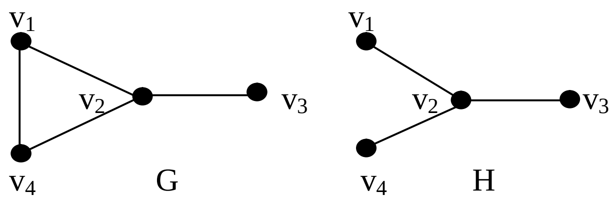
Suatu subgraf H disebut subgraf dari G, ditulis H ⊆ G, jika V(H) ⊆ V(G) dan E(H) ⊆ E(G).



Gambar 8. Contoh subgraf H dari graf G

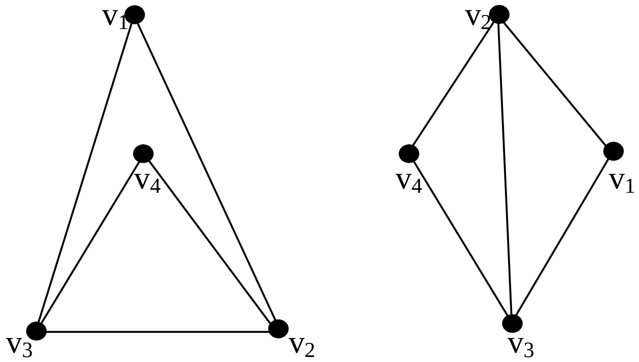
Suatu subgraf H dari graf G dikatakan *spanning* subgraf, jika V(H) = V(G) dan

E(H) ⊂ E(G). Subgraf terhubung maksimal dari graf G disebut komponen dari graf G.



Gambar 9. Contoh *spanning* subgraf H dari G

Dua graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfis, jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik di G_1 dengan titik-titik di G_2, serta antara garis-garis di G_1 dengan garis-garis di G_2, sehingga hubungan ketetanggaan tetap terjaga.



Gambar 10. Contoh isomorfis graf G_1 dan G_2

Suatu graf disebut *tree* atau pohon jika graf T merupakan graf terhubung yang tidak memiliki *cycle* atau sirkuit. Suatu graf T disebut *spanning tree* dari suatu graf G jika graf T adalah *tree* dan memuat semua titik dari graf G atau dengan kata lain graf T adalah *spanning* subgraf dari graf G yang tidak memuat *cycle* atau sirkuit. Gabungan dari *tree* disebut *forest* (hutan).

Graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik yang berbeda di graf G ada *path* yang menghubungkan titik tersebut. Jika tidak ada *path* yang menghubungkan maka dikatakan tidak terhubung.

2.2. Konsep Dasar Teknik Penghitungan

Dalam proses penghitungan terdapat dua hukum yang digunakan yaitu hukum penjumlahan dan hukum perkalian. Pada hukum penjumlahan, jika sebuah tugas dapat dilakukan dalam n_1 cara dan tugas lainnya dalam n_2 cara, dan jika kedua tugas tersebut tidak dapat dilakukan pada saat yang sama maka ada $n_1 + n_2$ cara untuk melakukan tugas tersebut.

Pada hukum perkaliaan, misalkan dalam sebuah prosedur dapat dibagi dalam dua kegiatan .jika ada n_1 cara untuk melakukan kegiatan pertama dan ada n_2 cara untuk melakukan kegiatan kedua setelah kegiatan pertama selesai , maka ada n_1 x n_2 cara untuk melakukan prosedur tersebut.

Nilai n! (dibaca " *n factorial*) didefinisikan sebagai hasil kali semua bilangan bulat positif antara 1 sampai n, dengan n ϵ N

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)...............3.\ 2.\ 1$$

Teorema 1

0! = 1 dan 1! = 1

Bukti :

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)........3.2.1$$

$$n! = n(n-1)!$$

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}$$

Untuk n = 1

$$(1-1)! = \frac{1!}{1}$$

$$0! = \frac{1}{1} = 1$$

Untuk n $= 2$

$(2-1)! = \frac{2!}{2}$

$1! = \frac{2}{2} = 1$

Permutasi merupakan sebuah himpunan dari objek- objek yang berbeda yang disusun berdasarkan dari urutan objek-objek tersebut. Suatu pengaturan terurut dari r anggota himpunan disebut r-permutasi.

Teorema 2

Banyaknya permutasi n objek yang diambil sebanyak r objek adalah

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Sebuah r-kombinasi dari anggota-anggota sebuah himpunan adalah penyelesaian seleksian secara tidak terurut dari anggota-anggota himpunan tersebut. Singkatnya sebuah r-kombinasi adalah sebuah himpunan bagian yang memuat r anggota.

Teorema 3

Banyaknya kombinasi r objek yang diambil sebanyak n objek adalah

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

2.3 Barisan Aritmatika Orde Tinggi

Barisan aritmatika tingkat ke-p adalah sebuah barisan yang memiliki selisih yang sama tiap suku berurutannya setelah p tingkatan (Imail,2012). Rumus umum suku ke-p pada barisan aritmatika adalah

$$U_n = \frac{m_0}{0!} + \frac{(n-1)m_1}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)m_2}{2!} + \dots\dots\dots + \frac{(n-1)(n-2)\dots\dots(n-p)m_p}{p!}$$

dengan :

Un = suku ke-n

m_0 = suku awal pada barisan semula

m_1 = suku awal pada barisan tingkat pertama yang dibentuk

m_2 = suku awal pada barisan tingkat kedua yang dibentuk

m_p = suku awal pada barisan tingkat ke-p yang dibentuk

III. METODE PENELITIAN

3.1. Waktu Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di Program Studi Magister Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada semester ganjil tahun pelajaran 2016/2017.

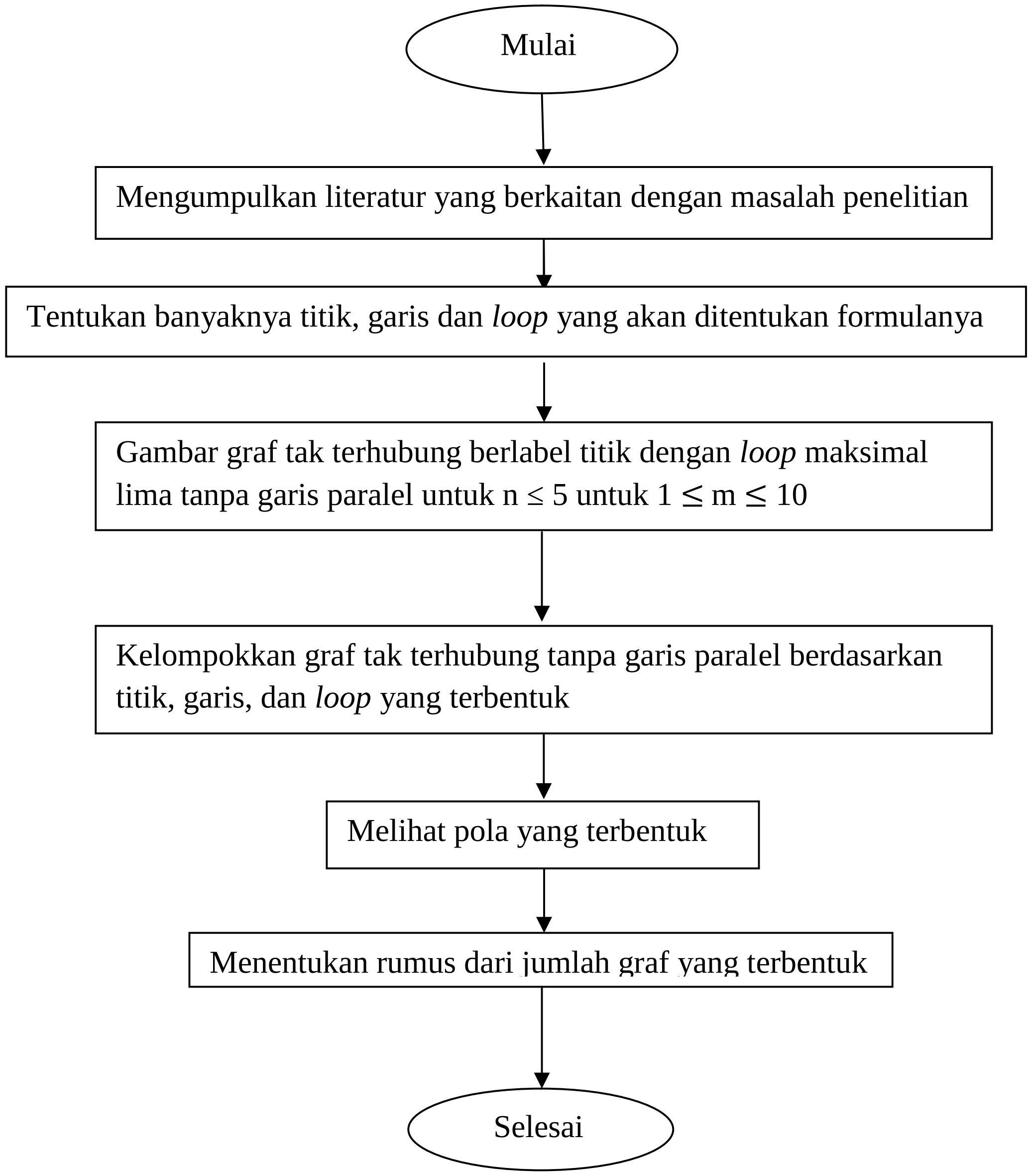
3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah dalam penelitian yang dilakukan ini adalah :

1. Mengumpulkan bahan literatur dan studi kepustakaan yang berhubungan dengan teori graf.
2. Menentukan banyak titik, garis, dan *loop* yang akan ditentukan formulanya.
3. Menggambarkan graf tak terhubung berlabel titik dengan *loop* maksimal lima tanpa garis paralel untuk $n \leq 5$ dengan $1 \leq m \leq 10$.
4. Mengelompokkan graf tak terhubung berdasarkan n titik, m garis dan *loop* yang sama.
5. Menghitung jumlah graf tak terhubung berdasarkan n titik, m garis, dan *loop* yang telah dikontruksi.
6. Melihat pola yang terbentuk pada n titik, m garis, dan *loop* yang sama.
7. Menentukan rumus umum dari bentuk barisan aritmatika berorde tinggi kedalam bentuk kombinasi, untuk menghitung banyaknya graf takterhubung berlabel titik dengan *loop* maksimal lima tanpa garis paralel untuk $n \leq 5$ dengan $1 \leq m \leq 10$ yang terbentuk.

Langkah-langkah tersebut dapat dinyatakan dalam diagram alir sebagai berikut :

Penyajian dalam bentuk diagram alir



Gambar 11. Diagram alir langkah-langkah penelitian

BAB V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil konstruksi dan observasi terhadap penentuan banyaknya graf tak terhubung berlabel titik berorde maksimal lima dengan *loop* maksimal lima tanpa garis paralel, maka diperoleh kesimpulan rumus umum sebagai berikut :

1. **Untuk n = 1**

   Untuk g = 0, $N(G_{1,m,0}) = 1;\ 1 \leq m \leq 5$

2. **Untuk n = 2**

   Untuk g = 0, $N(G_{2,m,0}) = m + 1;\ 1 \leq m \leq 5$

3. **Untuk n = 3**

   Untuk g = 0, $N(G_{3,m,0}) = \binom{m+2}{2};\ 1 \leq m \leq 5$

   Untuk g = 1, $N(G_{3,m,1}) = 3\binom{m+1}{2};\ 1 \leq m \leq 6$

Jadi , untuk n = 3 rumus umum untuk menentukan banyaknya graf adalah :

Untuk n = 3 , $1 \leq m \leq 5$, $0 \leq g \leq 1$, yaitu:

$$N(G_{3,m,g}) = \sum_{g=0}^{1} N(G_{3,m,g})$$

$$= N(G_{3,m,0}) + N(G_{3,m,1})$$

$$= \binom{m+2}{2} + 3\binom{m+1}{2}$$

Untuk n = 3 , m = 6 , dan g = 1, yaitu:

$N(G_{3,m,g})$ = $3\binom{m+1}{2}$

4. Untuk n = 4

Untuk g = 0, $N(G_{4,m,0}) = \binom{m+3}{3}$; $1 \le m \le 5$

Untuk g = 1, $N(G_{4,m,1}) = 6\binom{m+2}{3}$; $1 \le m \le 6$

Untuk g = 2, $N(G_{4,m,2}) = 15\binom{m+1}{3}$; $2 \le m \le 7$

Untuk g = 3, $N(G_{4,m,3}) = 4\binom{m}{3}$; $3 \le m \le 8$

Jadi, untuk n = 4 rumus umum untuk menentukan banyaknya graf adalah :

Untuk n = 4 , m = 1 , $0 \le g \le 1$, yaitu:

$$
\begin{aligned}
N(G_{4,m,g}) &= \sum_{g=0}^{1} N(G_{4,m,g}) \\
&= N(G_{4,m,0}) + N(G_{4,m,1}) \\
&= \binom{m+3}{3} + 6\binom{m+2}{3}
\end{aligned}
$$

Untuk n = 4 , m = 2 , $0 \le g \le 2$, yaitu:

$$
\begin{aligned}
N(G_{4,m,g}) &= \sum_{g=0}^{2} N(G_{4,m,g}) \\
&= N(G_{4,m,0}) + N(G_{4,m,1}) + N(G_{4,m,2}) \\
&= \binom{m+3}{3} + 6\binom{m+2}{3} + 15\binom{m+1}{3}
\end{aligned}
$$

Untuk n = 4 , $3 \le m \le 5$, $0 \le g \le 3$, yaitu:

$$
\begin{aligned}
N(G_{4,m,g}) &= \sum_{g=0}^{3} N(G_{4,m,g}) \\
&= N(G_{4,m,0}) + N(G_{4,m,1}) + N(G_{4,m,2}) + N(G_{4,m,3}) \\
&= \binom{m+3}{3} + 6\binom{m+2}{3} + 15\binom{m+1}{3} + 4\binom{m}{3}
\end{aligned}
$$

Untuk n = 4 , m = 6 , $1 \leq g \leq 3$, yaitu:

$$N(G_{4,m,g}) = \sum_{g=1}^{3} N(G_{4,m,g})$$

$$= N(G_{4,m,1}) + N(G_{4,m,2}) + N(G_{4,m,3})$$

$$= 6\binom{m+2}{3} + 15\binom{m+1}{3} + 4\binom{m}{3}$$

Untuk n = 4 , m = 7 , $2 \leq g \leq 3$, yaitu:

$$N(G_{4,m,g}) = \sum_{g=2}^{3} N(G_{4,m,g})$$

$$= N(G_{4,m,2}) + N(G_{4,m,3})$$

$$= 15\binom{m+1}{3} + 4\binom{m}{3}$$

Untuk n = 4 , m = 8 , g = 3 , yaitu:

$$N(G_{4,m,g}) = N(G_{4,m,3})$$

$$= 4\binom{m}{3}$$

5. Untuk n = 5

Untuk g = 0, $N(G_{5,m,0}) = \binom{m+4}{4}$; $1 \leq m \leq 5$

Untuk g = 1, $N(G_{5,m,1}) = 10\binom{m+3}{4}$; $1 \leq m \leq 6$

Untuk g = 2, $N(G_{5,m,2}) = 45\binom{m+2}{4}$; $2 \leq m \leq 7$

Untuk g = 3, $N(G_{5,m,3}) = 120\binom{m+1}{4}$; $3 \leq m \leq 8$

Untuk g = 4, $N(G_{5,m,4}) = 85\binom{m}{4}$; $4 \leq m \leq 9$

Untuk g = 5, $N(G_{5,m,5}) = 30\binom{m-1}{4}$; $5 \leq m \leq 10$

Untuk g = 6, $N(G_{5,m,6}) = 5\binom{m-2}{4}$; $6 \leq m \leq 11$

Jadi, untuk n = 5 rumus umum untuk menentukan banyaknya graf adalah :

Untuk n = 5, m = 1, $0 \leq g \leq 1$, yaitu :

$$N(G_{5,m,g}) = \sum_{g=0}^{1} N(G_{5,m,g})$$

$$= N(G_{5,m,0}) + N(G_{5,m,1})$$

$$= \binom{m+4}{4} + 10\binom{m+3}{4}$$

Untuk n = 5 , m = 2 , $0 \leq g \leq 2$, yaitu:

$$N(G_{5,m,g}) = \sum_{g=0}^{2} N(G_{5,m,g})$$

$$= N(G_{5,m,0}) + N(G_{5,m,1}) + N(G_{5,m,2})$$

$$= \binom{m+4}{4} + 10\binom{m+3}{4} + 45\binom{m+2}{4}$$

Untuk n = 5 , m = 3 , $0 \leq g \leq 3$, yaitu:

$$N(G_{5,m,g}) = \sum_{g=0}^{3} N(G_{5,m,g})$$

$$= N(G_{5,m,0}) + N(G_{5,m,1}) + N(G_{5,m,2}) + N(G_{5,m,3})$$

$$= \binom{m+4}{4} + 10\binom{m+3}{4} + 45\binom{m+2}{4} + 120\binom{m+1}{4}$$

Untuk n = 5 , m = 4 , $0 \leq g \leq 4$, yaitu:

$$N(G_{5,m,g}) = \sum_{g=0}^{4} N(G_{5,m,g})$$

$$= N(G_{5,m,0}) + N(G_{5,m,1}) + N(G_{5,m,2}) + N(G_{5,m,3}) + N(G_{5,m,4})$$

$$= \binom{m+4}{4} + 10\binom{m+3}{4} + 45\binom{m+2}{4} + 120\binom{m+1}{4} + 85\binom{m}{4}$$

Untuk n = 5 , m = 5 , $0 \leq g \leq 5$, yaitu:

$$N(G_{5,m,g}) = \sum_{g=0}^{5} N(G_{5,m,g})$$

$$= N(G_{5,m,0}) + N(G_{5,m,1}) + N(G_{5,m,2}) + N(G_{5,m,3}) + N(G_{5,m,4}) + N(G_{5,m,5})$$

$$= \binom{m+4}{4} + 10\binom{m+3}{4} + 45\binom{m+2}{4} + 120\binom{m+1}{4} + 85\binom{m}{4} + 30\binom{m-1}{4}$$

Untuk n = 5 , m = 6 , $1 \leq g \leq 6$, yaitu:

$N(G_{5,m,g}) \quad = \sum_{g=1}^{6} N(G_{5,m,g})$

$= N(G_{5,m,1}) + N(G_{5,m,2}) + N(G_{5,m,3}) + N(G_{5,m,4}) + N(G_{5,m,5}) + N(G_{5,m,6})$

$= 10\binom{m+3}{4}+45\binom{m+2}{4}+120\binom{m+1}{4}+85\binom{m}{4}+30\binom{m-1}{4}+5\binom{m-2}{4}$

Untuk n = 5 , m = 7 , $1 \leq g \leq 6$, yaitu:

$N(G_{5,m,g}) \quad = \sum_{g=2}^{6} N(G_{5,m,g})$

$= N(G_{5,m,2}) + N(G_{5,m,3}) + N(G_{5,m,4}) + N(G_{5,m,5}) + N(G_{5,m,6})$

$= 45\binom{m+2}{4}+ 120\binom{m+1}{4}+ 85\binom{m}{4}+ 30\binom{m-1}{4}+ 5\binom{m-2}{4}$

Untuk n = 5 , m = 8 , $3 \leq g \leq 6$, yaitu:

$N(G_{5,m,g}) \quad = \sum_{g=3}^{6} N(G_{5,m,g})$

$= N(G_{5,m,3}) + N(G_{5,m,4}) + N(G_{5,m,5}) + N(G_{5,m,6})$

$= 120\binom{m+1}{4} + 85\binom{m}{4} + 30\binom{m-1}{4} + 5\binom{m-2}{4}$

Untuk n = 5 , m = 9 , $4 \leq g \leq 6$, yaitu:

$N(G_{5,m,g}) \quad = \sum_{g=4}^{6} N(G_{5,m,g})$

$= N(G_{5,m,g4}) + N(G_{5,m,g5}) + N(G_{5,m,g6})$

$= 85\binom{m}{4} + 30\binom{m-1}{4} + 5\binom{m-2}{4}$

Untuk n = 5 , m = 10 , $5 \leq g \leq 6$, yaitu:

$N(G_{5,m,g}) \quad = \sum_{g=5}^{6} N(G_{5,m,g})$

$= N(G_{5,m,5}) + N(G_{5,m,6})$

$= 30\binom{m-1}{4} + 5\binom{m-2}{4}$

Untuk n = 5 , m = 11 ,   g = 6 , yaitu:

$N(G_{5,m,g}) \quad = N(G_{5,m,6})$

$= 5\binom{m-2}{4}$

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan untuk menentukan rumus umum banyaknya graf tak terhubung berlabel titik dengan loop tanpa garis paralel untuk n ≥ 5 dan m ≥ 1.

DAFTAR PUSTAKA

Munir ,Rinaldi.2001.*Matematika Diskrit*. Informatika.Bandung

Deo,N.1989.*Grafh Theory With Application to Enginering and Computer Science.*Prentice Hall Inc,New York

Cayley, A. 1874. On the Mathematical Theory of Isomers. *Philosophical Magazine,* Vol 47, pp. 444-446.

Imail, S. 2012 *Suku Ke-n Barisan Aritmatika.* http : //www.repository.ung.ac.id/grt/karyailmiah.pdf. Diakses Tanggal 15 Oktober 2016, pukul 15.30.

Wamiliana, Amanto, and Grita Tumpi Nagari.2016.Counting The Number of Disconnected Labeled Graphs of Order Five Without Paralel Edges. *Internasional Series on Interdisciplinary Research* Vol 1,pp 4-7.

Rohandi.2014.Penentuan Banyaknya Graf Tak terhubung Tanpa *Loop.*Skripsi.Unila.Bandar Lampung

Winarni,Yunita.Dwi.2015.Penentuan Banyaknya Graf Takterhubung Berlabel Titik Tanpa Garis Paralel.Skripsi. Unila.Bandar Lampung

Sari,Reni.Permata.2016.Penentuan Banyaknya Graf Takterhubung berlabel Titik Berorde Maksimal Empat.Tesis.Unila.Bandar Lampung