PENERAPAN METODE *AUTOREGRESSIVE FRACTIONALLY INTEGRATED MOVING AVERAGE (*ARFIMA) DALAM PERAMALAN LAJU INFLASI DI INDONESIA

(Skripsi)

Oleh

SUCI NINGRUM ANJASMARA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2017

ABSTRAK

PENERAPAN METODE *AUTOREGRESSIVE FRACTIONALLY INTEGRATED MOVING AVERAGE* (ARFIMA) DALAM PERAMALAN LAJU INFLASI DI INDONESIA

Oleh

SUCI NINGRUM ANJASMARA

Model ARFIMA (*Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average*) dikembangkan untuk memodelkan data berjangka panjang pada data runtun waktu dengan nilai *differencing* (*d*) bilangan real, -0,5 < *d* < 0,5. Penelitian ini bertujuan untuk meramalkan laju angka inflasi di Indonesia dengan metode ARFIMA. Parameter model diestimasi menggunakan Maximum Likelihood Estimation (MLE). Model terbaik yang diperoleh untuk data tersebut adalah model ARFIMA (1, d[0.443495],0). Dari model tersebut diprediksi bahwa akan ada kenaikan inflasi rata-rata 0,12% per bulan.

Kata Kunci : ARFIMA, Jangka Panjang, *Fractional Integrated.*

ABSTRACT

APPLICATION OF AUTOREGRESSIVE FRACTIONALLY INTEGRATED MOVING AVERAGE (ARFIMA) METHOD IN FORECASTING INFLATION RATE IN INDONESIA

By

SUCI NINGRUM ANJASMARA

ARFIMA (Autoregresive Fractionally Integrated Moving Average) model was developed to model the long memory in time series with differencing (*d*) as a real number, 0,5 < d < 0,5. The aims of this study are to forecast the rate of inflation in Indonesia using ARFIMA method. The model parameters are estimated by Maximum Likelihood Estimation (MLE). The best model for the data is ARFIMA (1, d[0.443495], 0). The model predicted that inflation will be increased 0,12% on average per month.

Key words : ARFIMA, Long Memory, Fractional Integrated.

PENERAPAN METODE *AUTOREGRESSIVE FRACTIONALLY INTEGRATED MOVING AVERAGE (*ARFIMA) DALAM PERAMALAN LAJU INFLASI DI INDONESIA

Oleh

SUCI NINGRUM ANJASMARA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Skripsi	:	**PENERAPAN METODE *AUTOREGRESSIVE FRACTIONALLY INTEGRATED MOVING AVERAGE* (ARFIMA) DALAM PERAMALAN LAJU INFLASI DI INDONESIA**
Nama Mahasiswa	:	Suci Ningrum Anjasmara
No. Pokok Mahasiswa	:	1317031081
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Ir. Netti Herawati, M.Sc., Ph.D.	**Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**
NIP 19650125 199003 2 001	NIP 19720227 199802 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP 19620704 198803 1 002

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Ir. Netti Herawati, M.Sc., Ph.D.**	....
Sekretaris	: **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Drs. Rudi Ruswandi, M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **25 Juli 2017**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"Penerapan Metode *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average* (ARFIMA) dalam Peramalan Laju Inflasi di Indonesia"** merupakan hasil karya saya sendiri dan bukan hasil karya orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Juli 2017

Penulis

Suci Ningrum Anjasmara
NPM. 1317031081

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Gerning pada tanggal 25 Juli 1995 sebagai anak bungsu dari pasangan Bapak Gatot Samijan dan Ibu Aljannah.

Penulis telah menyelesaikan pendidikan sekolah dasar di SD N 1 Gerning pada tahun 2007, pendidikan menengah pertama di SMP N 1 Adiluwih pada tahun 2010, dan pendidikan menengah atas di SMA N 1 Bangunrejo pada tahun 2013.

Pada tahun 2013, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Selama menjadi Mahasiswa, penulis pernah menjadi Anggota Biro Kesekretariatan di Himpunan Mahasiswa Matematika periode 2014-2015 dan menjadi Anggota Departemen Pemberdayaan Sumber Daya Mahasiswa di Badan Eksekutif Mahasiswa FMIPA Unila periode 2015-2016 . Kemudian penulis menjadi Sekretaris Biro Kesekretariatan Himpunan Mahasiswa Matematika FMIPA Unila periode 2015-2016.

Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis telah menyelesaikan Kerja Praktik (KP) selama satu bulan di Kantor Wilayah Direktorat Jendral Pajak Bengkulu dan Lampung, serta Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Desa Mataram Jaya Kecamatan Bandar Mataram Kabupaten Lampung Tengah.

Kata Inspirasi

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"
(QS. Alam Nasyroh : 5-6)

Sesungguhnya doa bermanfaat bagi sesuatu yang sedang terjadi dan yang belum terjadi. Dan tidak ada yang bisa menolak takdir kecuali doa, maka berpeganglah pada doa.
(HR. Turmudzi dan Hakim)

"Anda mungkin bisa menunda, tapi waktu tidak akan menunggu"
(Benjamin Franklin)

Sebaik-baiknya manusia adalah manusia yang paling bermanfaat bagi manusia lainnya.
(HR. Thabrani dan Darutquthni)

Pengetahuan itu pahit, namun manis melebihi madu pada akhirnya.

Dengan mengucapkan Alhamdulillah,
Puji dan syukur kepada Allah Subhanahu Wata'ala atas segala nikmat dan karunia-Nya, dan suri tauladan Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam yang menjadi contoh dan panutan untuk kita semua.

Kupersembahkan sebuah karya sederhana ini untuk:

Ayahanda Gatot Samijan dan Ibunda Aljannah
Terimakasih atas limpahan kasih sayang, pengorbanan, doa, dan seluruh motivasi di setiap langkahku. Karena atas doa dan ridho kalian, Allah memudahkan tiap perjalanan hidup ini.

Terimalah bukti kecil ini sebagai kado keseriusanku untuk membalas semua pengorbanan, keikhlasan, dan jerih payah yang selama ini kau lakukan.

Kakak-Kakakku Tercinta
Dian Eko Saputra
Yosi Nur Arima
Akmaluddin Yudhistira

Almamaterku Tercinta
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan atas kehadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga dapat terselesaikannya skripsi dengan judul **"Penerapan Metode *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average (*ARFIMA) dalam Peramalan Laju Inflasi di Indonesia"**.

Terselesainya skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, kerjasama, dan dukungan berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Ibu Ir. Netti Herawati, M.Sc., Ph.D., selaku pembimbing I yang telah memberikan arahan, bimbingan, ide, kritik dan saran kepada penulis selama proses pembuatan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si., selaku pembimbing II yang telah memberikan arahan, dukungan, serta semangat kepada penulis.
3. Bapak Drs. Rudi Ruswandi, M.Si., selaku penguji yang telah memberikan ide, kritik dan saran sehingga terselesainya skripsi ini.
4. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si., selaku Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis dalam menyelesaikan permasalahan seputar akademik.
5. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

7. Seluruh Dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
8. Bapak, Ibu dan keluarga yang selalu mengiringi langkah penulis dengan do’a dan nasihat untuk selalu berjuang setiap harinya.
9. Teman-teman Matematika 2013, Adik-adik Matematika 2014 serta Abang dan Yunda Matematika 2012 yang selalu memberikan semangat, ide dan saran kepada penulis.
10. Keluarga besar HIMATIKA terutama Biro Kesekretariatan 2015-2016.
11. Sahabat-sahabat penulis Karindha, Zefni, Heni, Sinta, Eky, Vinny, Maimuri, Eka, Imelda, Suyitno dan Rasyd yang senantiasa menemani suka duka penulis.
12. Rekan-rekan tersayang Citra, Suri, Karina, Yucky, Tiwi, Shintia, Siti, Tina, Della, Retno dan Tika yang selalu memberikan keceriaan kepada penulis.
13. Teman-teman KKN Syofia, Aida, Rani, Joshua, Qibil dan Rio.
14. Aldy, Rahman, Agus, Darma dan Nandra yang selalu memberi semangat.
15. Semua pihak yang terlibat dalam penyelesaian skripsi ini.

Tentunya, Penulis menyadari bahwa masih ada kekurangan dari skripsi ini, akan tetapi besar harapan semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Sekian dan terimakasih.

Bandar Lampung, Juli 2017

Penulis

Suci Ningrum Anjasmara

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Data runtun waktu adalah sekumpulan data berupa angka yang didapat dalam suatu periode waktu tertentu. Data runtun waktu biasanya berupa data tahunan, semesteran, triwulan, bulanan, mingguan, harian, dan seterusnya. Analisis runtun waktu dapat menemukan bentuk atau pola variasi dari data dimasa lampau dan menggunakan pengetahuan ini untuk melakukan peramalan terhadap sifat-sifat dari data di masa yang akan datang (Rosadi, 2011). Suatu peramalan bertujuan untuk menetapkan kapan suatu peristiwa akan terjadi, sehingga tindakan yang tepat dapat dilakukan.

Metode pemodelan runtun waktu yang telah dikembangkan adalah *Exponential Smoothing*, *Autoregressive* (AR), *Moving Averag*e (MA), *Autoregressive Moving Average* (ARMA), dan *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA). Metode tersebut sangat baik ketepatannya untuk peramalan jangka pendek, sedangkan untuk peramalan jangka panjang ketepatan peramalannya kurang baik. Biasanya akan cenderung *flat* (mendatar/konstan) untuk periode yang cukup panjang.

Model yang dapat menjelaskan data deret waktu baik berupa jangka pendek maupun jangka panjang adalah metode ARFIMA (*Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average*). Data yang dikategorikan sebagai data jangka panjang memiliki nilai parameter d berkisar antara $-0{,}5 < d < 0{,}5$. Salah satu data yang dikatagorikan sebagai data jangka panjang adalah data inflasi di Indonesia. Inflasi merupakan suatu proses kenaikkan harga-harga yang berlaku dalam perekonomian. Kenaikan tersebut biasanya berlaku atas kebanyakan barang, tetapi tingkat kenaikannya berbeda.

Berdasarkan hal tersebut, maka pada penelitian ini akan dilakukan peramalan inflasi di Indonesia pada masa yang akan datang dengan metode ARFIMA (*Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average*).

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk meramalkan laju angka inflasi di Indonesia pada masa yang akan datang dengan metode ARFIMA.

1.3 Manfaat penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah

1. Dapat mengetahui tahap-tahapan analisis data runtun waktu dengan metode ARFIMA.
2. Dapat memperoleh model terbaik untuk meramalkan data inflasi di Indonesia.
3. Dapat meramalkan laju angka inflasi di Indonesia pada masa yang akan datang dengan model.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Jenis Data Berdasarkan Waktu Pengumpulannya

Gujarati dan Porter (2009) menyatakan tiga jenis data berdasarkan waktu pengumpulannya, yaitu runtun waktu, *cross-section* dan panel.

1. Data Runtun Waktu

   Data runtun waktu adalah kumpulan nilai-nilai pengamatan dari suatu variabel yang diambil pada waktu yang berbeda. Data jenis ini dikumpulkan pada interval waktu tertentu, misalnya harian,mingguan, bulanan, dan tahunan.

2. Data *Cross-section*

   Data *cross-section* adalah data dari satu variabel atau lebih yang dikumpulkan pada waktu tertentu secara bersamaan.

3. Data Panel

   Data panel adalah data yang elemen-elemennya merupakan kombinasi dari data runtun waktu dan data *cross-section*.

2.2 Analisis Runtun Waktu

Runtun waktu merupakan serangkaian observasi terhadap suatu variabel yang diambil secara beruntun berdasarkan interval waktu yang tetap (Wei, 2006).

Rangkaian data pengamatan runtun waktu dinyatakan dengan variabel X_t dimana t adalah indeks waktu dari urutan pengamatan. Konsep dasar model runtun waktu meliputi tentang asumsi-asumsi yang harus dipenuhi secara umum dan beberapa uji statistik pada model runtun waktu.

2.2.1 Stasioneritas

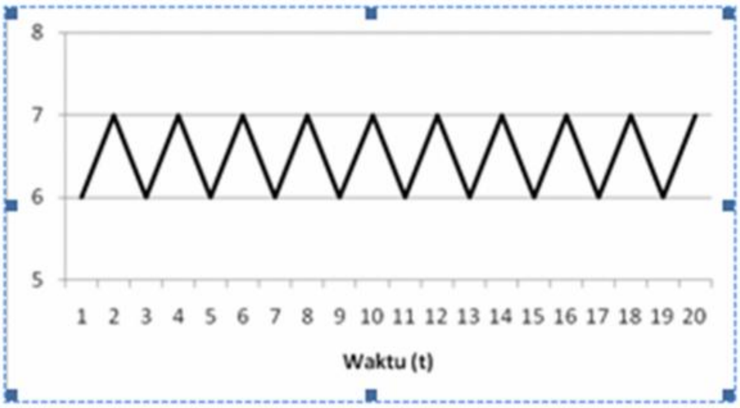
Stasioner berarti bahwa tidak terdapat perubahan drastis pada data, yaitu mean dan variannya konstan dari waktu ke waktu. Stasioneritas dibagi menjadi 2 yaitu:

1. Stasioner dalam rata-rata

   Stasioner dalam rata-rata adalah fluktuasi data berada di sekitar suatu nilai rata-rata yang konstan, tidak bergantung pada waktu dan variansi dari fluktuasi tersebut. Dari bentuk plot data seringkali dapat di ketahui bahwa data tersebut stasioner atau tidak stasioner. Apabila dilihat dari plot ACF (*Autocorrelation Function*), maka nilai-nilai autokorelasi dari stasioner akan turun menuju nol sesudah time *lag* (selisih waktu) kelima atau keenam.

2. Stasioner dalam variansi

   Sebuah data runtun waktu dikatakan stasioner dalam variansi apabila struktur dari waktu ke waktu mempunyai fluktuasi data yang tetap atau konstan dan tidak berubah-ubah. Secara visual untuk melihat hal tersebut dapat dibantu dengan menggunakan plot runtun waktu, yaitu dengan melihat fluktuasi data dari waktu ke waktu (Wei, 2006).



Gambar 1. Plot data dalam keadaaan stasioner terhadap rata-rata dan variansi

2.2.2 Proses *White Noise*

Proses *White Noise* digunakan untuk pemeriksaan diagnostik model untuk menguji kelayakan model ARFIMA. Suatu proses ε_t disebut proses *white noise* jika data terdiri dari variabel acak yang tidak berkorelasi antar variabel dan berdistribusi normal dengan rata-rata konstan E (ε_t) = 0, variansi konstan Var (ε_t) = σ^2 dan γ_k = Cov ($\varepsilon_{t,}$ ε_{t+k}) = 0 untuk k ≠ 0.

Dengan demikian proses *white noise* stasioner dengan :

Fungsi autokovariansi

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2, \text{jika } k = 0 \\ 0\text{ , jika } k \neq 0 \end{cases}$$

Fungsi autokorelasi

$$\rho_k = \begin{cases} 1\text{ , jika } k = 0 \\ 0\text{ , jika } k \neq 0 \end{cases}$$

Fungsi autokorelasi parsial

$$\emptyset_{kk} = \begin{cases} 1\text{ , jika } k = 0 \\ 0\text{ , jika } k \neq 0 \end{cases}$$

Proses *white noise* dapat dideteksi menggunakan uji autokorelasi residual pada analisis galatnya. Uji korelasi residual digunakan untuk mendeteksi ada tidaknya korelasi residual antar *lag*. Langkah-langkah pengujian korelasi residual yaitu :

H_0 : $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \cdots = 0$ (tidak terdapat korelasi)

H_1: $\exists\ \rho_k \neq 0$, k= 1, 2, …, K (terdapat korelasi)

Taraf signifikansi α = 5%

Statistik uji *Ljung Box-Pierce* yaitu:

$$Q_k = T(T+2)\sum_{k=1}^{K}\frac{\hat{\rho}_k{}^2}{T-k} \qquad (2.1)$$

dengan

T : banyaknya data

K : banyaknya *lag* yang diuji

K : selisih *lag*

$\hat{\rho}_k$: dugaan autokorelasi residual periode k

Kriteria keputusan yaitu tolak H_0 jika Q-hitung $>\chi^2_{(\alpha,df)}$ tabel , dengan derajat kebebasan K dikurangi banyaknya parameter pada model (Wei, 2006).

2.3 *Lag*

Lag merupakan suatu jarak atau selang waktu diantara dua kejadian yang saling berkaitan. Operator *lag* B menunjukkan hubungan antara differensiasi. Diberikan X adalah runtun waktu. Jika kita menggunakan operator *lag* pada runtun waktu, semua nilai menurun pada satu periode.

$$Bx_t = x_{t-1} \qquad (2.2)$$

Secara umum diperoleh

$$B^k x_t = Bx_{t-k} \quad , k = \ldots,-1,0,1,2,\ldots . \qquad (2.3)$$

Untuk k = 0 diperoleh $B^0 x_t = x_t$ (Kirchgassner and Wolters, 2007).

2.4 Fungsi Autokorelasi dan Fungsi Autokorelasi Parsial

Dalam metode runtun waktu, alat utama untuk mengidentifikasi orde *Autoregressive* dan *Moving Average* dari data yang akan diramalkan adalah dengan menggunakan fungsi autokorelasi/*Autocorrelation Function* (ACF) dan fungsi autokorelasi parsial/*Partial Autocorrelation Function* (PACF).

2.4.1 Fungsi Autokorelasi

Dari proses stasioner suatu data runtun waktu (X_t) diperoleh $E(X_t)=\mu$ dan variansi $Var(X_t) = E(X_t - \mu)^2 = \sigma^2$ yang konstan dan kovarian $Cov(X_t,X_{t+k})$, yang fungsinya hanya pada perbedaan waktu $|t-(t-k)|$. Maka dari itu, hasil tersebut dapat ditulis sebagai kovariansi antara X_t dan X_{t+k} sebagai berikut :

$$\gamma = Cov(X_t,X_{t+k}) = E(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)$$

dan korelasi antara X_t dan X_{t+k} didefinisikan sebagai

$$\rho_k = \frac{E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(X_t - \mu)^2].E[(X_{t+k} - \mu)^2]}} = \frac{Cov(X_t,X_{t+k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \qquad (2.4)$$

dimana notasi $Var(X_t) = Var(X_{t+k}) = \gamma_0$. Sebagai fungsi dari k, γ_k disebut fungsi autokovarian dan ρ_k disebut fungsi autokorelasi (ACF). Dalam analisis runtun waktu, γ_k dan ρ_k menggambarkan kovarian dan korelasi antara X_t dan X_{t+k}

dari proses yang sama, hanya dipisahkan oleh *lag* ke-k. Fungsi autokovariansi γ_k dan fungsi autokorelasi ρ_k memiliki sifat-sifat sebagai berikut :

1. γ_0= Var (X_t) ; $\rho_0 = 1$.

   Bukti :

   Dengan menggunakan definisi korelasi antara X_t dan $X_{t+k,}$ akan dibuktikan bahwa γ_0= Var (X_t) ; $\rho_0 = 1$.

$$\rho_k = \frac{Cov\ (X_t, X_{t+k})}{\sqrt{Var\ (X_t) Var\ (X_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

   Diberikan k = 0, maka

$$\rho_0 = \frac{Cov\ (X_t, X_{t+0})}{\sqrt{Var\ (X_t) Var\ (X_{t+0})}}$$

$$\rho_0 = \frac{Cov\ (X_t, X_t)}{\sqrt{Var\ (X_t) Var\ (X_t)}}$$

$$\rho_0 = \frac{Var\ (X_t)}{\sqrt{Var^2 (X_t)}}$$

$$\rho_0 = \frac{Var\ (X_t)}{Var\ (X_t)} = \frac{\gamma_0}{\gamma_0}$$

$$\rho_0 = 1$$

2. $|\gamma_k| \le \gamma_0$; $|\rho_k| \le 1$.

   Bukti :

   Sifat kedua merupakan akibat dari persamaan autokorelasi kurang dari atau sama dengan 1 dalam nilai mutlak.

3. $\gamma_k = \gamma_{-k}$ dan $\rho_k = \rho_{-k}$ untuk semua k, γ_k dan ρ_k adalah fungsi yang sama dan simetrik *lag* k=0.

   Bukti :

Sifat tersebut diperoleh dari perbedaan waktu antara X_t dan X_{t+k}. Oleh sebab itu, fungsi autokorelasi sering hanya diplotkan untuk *lag* nonnegatif. Plot tersebut kadang discbut korrelogram (Wei, 2006).

Pendugaan koefisien (r_k) adalah dugaan dari koefisien autokorelasi secara teoritis yang bersangkutan (ρ_k) . Nilai r_k tidak sama persis dengan ρ_k yang berkorespondensi dikarenakan galat sampling. Distribusi dari kemungkinan nilai-nilai disebut dengan distribusi sampel. Galat baku dari distribusi sampling adalah akar dari penduga variansinya.

Pengujian koefisien autokorelasi :

H₀ : ρ_k = 0 (Tidak ada hubungan antar koefisien autokorelasi)

H₁ : ρ_k ≠ 0 (Ada hubungan koefisien autokorelasi)

Statistik uji : $t = \frac{r_k}{SE\ r_k}$

dengan :

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{T-k}(x_t-\bar{x})(x-\bar{x})}{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2} \quad \text{dan} \quad \text{SE}\ (r_k) = \sqrt{\frac{1+2\sum_{j=1}^{k-1} r_j{}^2}{T}} \approx \frac{1}{\sqrt{T}}$$

dengan :

SE (r_k) : *standard error* autokorelasi pada saat *lag* k

r_k : autokorelasi pada saat *lag* k

k : time *lag*

T : banyak observasi dalam data *time series*

Kriteria keputusan : tolak H_0 jika nilai $|t_{hitung}| > t_{\alpha/2,df}$ dengan derajat bebas *df* = T-1, T merupakan banyaknya data dan *k* adalah *lag* koefisien autokorelasi yang diuji (Pankratz, 1991).

2.4.2 Fungsi Autokorelasi Parsial

Autokorelasi parsial digunakan untuk mengukur tingkat keeratan antara X_t dan X_{t+k}, apabila pengaruh dari *time lag* 1, 2, 3, . . . , dan seterusnya sampai k-1 dianggap terpisah . Ada beberapa prosedur untuk menentukan bentuk PACF yang salah satunya akan dijelaskan sebagai berikut. Fungsi autokorelasi parsial dapat dinotasikan dengan:

$$\text{corr}\,(X_t, X_{t+1}, X_{t+2}, X_{t+3,\dots}, X_{t+k})$$

misalkan X_t adalah proses yang stasioner dengan $E(X_t) = 0$, selanjutnya X_{t+k} dapat dinyatakan sebagai model linear

$$X_{t+k} = \emptyset_{k1} X_{t+k-1} + \emptyset_{k2} X_{t+k-2} + \dots + \emptyset_{kk} X_t + \varepsilon_{t+k} \qquad (2.5)$$

dengan $\emptyset_{ki}$ adalah parameter regresi ke-i dan ε_{t+k} adalah nilai kesalahan yang tidak berkorelasi dengan X_{t+k-j} dengan j=1,2, … , k. Untuk mendapatkan nilai PACF, langkah pertama yang dilakukan adalah mengalikan persamaan (2.5) dengan X_{t+k-j} pada kedua ruas sehingga diperoleh :

$$X_{t+k-j} X_{t+k} = \emptyset_{k1} X_{t+k-1} X_{t+k-j} + \emptyset_{k2} X_{t+k-2} X_{t+k-j} + \dots + \emptyset_{kk} X_t X_{t+k-j} + \varepsilon_{t+k} X_{t+k-j}$$

Selanjutnya nilai harapannya adalah

$$E(X_{t+k-j} X_{t+k}) = E(\emptyset_{k1} X_{t+k-1} X_{t+k-j} + \emptyset_{k2} X_{t+k-2} X_{t+k-j} + \dots + \emptyset_{kk} X_t X_{t+k-j} + \varepsilon_{t+k} X_{t+k-j})$$

dimisalkan nilai $E(X_{t+k-j} X_{t+k}) = \gamma_j$, j=0,1,…,k dan karena $E(\varepsilon_{t+k} X_{t+k-j}) = 0$, maka diperoleh

$$\gamma_j = \emptyset_{k1} \gamma_{j-1} + \emptyset_{k2} \gamma_{j-2} + \dots + \emptyset_{kk} \gamma_{j-k} \qquad (2.6)$$

Persamaan (2.6) dibagi dengan γ_0

$$\frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \emptyset_{k1}\frac{\gamma_{j-1}}{\gamma_0} + \emptyset_{k2}\frac{\gamma_{j-2}}{\gamma_0} + \cdots + \emptyset_{kk}\frac{\gamma_{j-k}}{\gamma_0}$$

diperoleh

$$\rho_j = \emptyset_{k1}\rho_{j-1} + \emptyset_{k2}\rho_{j-2} + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_{j-k}, \text{ j = 1,2,3,…,k}$$

untuk j = 1, 2, 3 ,…, k didapatkan sistem persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \emptyset_{k1}\rho_0 + \emptyset_{k2}\rho_1 + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_{k-1}, \\ \rho_2 &= \emptyset_{k1}\rho_1 + \emptyset_{k2}\rho_0 + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_{k-2}, \\ &\vdots \\ \rho_k &= \emptyset_{k1}\rho_{k-1} + \emptyset_{k2}\rho_{k-2} + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

Sistem persamaan (2.7) dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan Cramer. Persamaan (2.7) untuk j = 1, 2, 3, …, k digunakan untuk mencari nilai-nilai fungsi autokorelasi parsial *lag* k yaitu $\emptyset_{k1}, \emptyset_{k2}, \dots, \emptyset_{kk}$.

a. Untuk *lag* pertama (k = 1) dan (j = 1) diperoleh sistem persamaan sebagai berikut :

   $\rho_1 = \emptyset_{11}\rho_0$, karena $\rho_0 = 1$ sehingga $\rho_1 = \emptyset_{11}$ yang berarti bahwa fungsi autokorelasi parsial pada *lag* pertama akan sama dengan fungsi autokorelasi pada *lag* pertama.

b. Untuk *lag* kedua (k = 2) dan (j = 1,2) diperoleh sistem persamaan

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \emptyset_{11}\rho_0 + \emptyset_{22}\rho_1 \\ \rho_2 &= \emptyset_{21}\rho_1 + \emptyset_{22}\rho_0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) jika ditulis dalam bentuk matriks akan menjadi

$$\begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset_{11} \\ \emptyset_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{bmatrix}$, dan dengan menggunakan aturan Cramer diperoleh

$$\emptyset_{22} = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

c. Untuk *lag* ketiga (k = 3) dan (j = 1,2,3) diperoleh sistem persamaan

$$\rho_1 = \emptyset_{11}\rho_0 + \emptyset_{22}\rho_1 + \emptyset_{33}\rho_2$$

$$\rho_2 = \emptyset_{11}\rho_1 + \emptyset_{22}\rho_0 + \emptyset_{33}\rho_1$$

$$\rho_3 = \emptyset_{11}\rho_2 + \emptyset_{22}\rho_1 + \emptyset_{33}\rho_0 \tag{2.9}$$

persamaan (2.9) jika ditulis dalam bentuk matriks akan menjadi

$$\begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset_{11} \\ \emptyset_{22} \\ \emptyset_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{bmatrix}$$

dan dengan menggunakan aturan Cramer diperoleh

$$\emptyset_{33} = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

d. Untuk *lag* ke-j = 1,2,3,…, k diperoleh sistem persamaannya adalah

$$\rho_1 = \emptyset_{11}\rho_0 + \emptyset_{22}\rho_1 + \emptyset_{33}\rho_2 + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_{k-1}$$

$$\rho_2 = \emptyset_{11}\rho_1 + \emptyset_{22}\rho_0 + \emptyset_{33}\rho_1 + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_{k-2}$$

$$\rho_3 = \emptyset_{11}\rho_2 + \emptyset_{22}\rho_1 + \emptyset_{33}\rho_0 + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_{k-3}$$

$$\vdots \tag{2.10}$$

$$\rho_k = \emptyset_{11}\rho_1 + \emptyset_{22}\rho_2 + \emptyset_{33}\rho_3 + \cdots + \emptyset_{kk}\rho_0$$

Persamaan (2.10) jika dinyatakan dalam bentuk matriks menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset_{11} \\ \emptyset_{22} \\ \emptyset_{33} \\ \vdots \\ \emptyset_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix}$$

dengan aturan Cramer diperoleh

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_k \end{bmatrix}$$

nilai autokorelasi parsial *lag* k hasilnya adalah

$$\emptyset_{kk} = \frac{\det(A_k)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}$$

$\emptyset_{kk}$ disebut PACF antara X_t dan X_{t+k} atau dapat juga dituliskan

$$\emptyset_{kk} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

dengan demikian diperoleh autokorelasi parsial dari X_t pada *lag* k.

Himpunan dari $\emptyset_{kk}\{\emptyset_{kk}\,; k = 1,2, \ldots\}$, disebut sebagai *Partial Autocorrelation Function* (PACF). Fungsi $\emptyset_{kk}$ menjadi notasi standar untuk autokorelasi parsial antara observasi X_t dan X_{t+k} dalam analisis runtun waktu. Fungsi $\emptyset_{kk}$ akan bernilai nol untuk k > p. Sifat ini dapat digunakan untuk identifikasi model AR dan MA, yaitu pada model *Autoregressive* berlaku PACF akan menurun secara bertahap menuju nol dan *Moving Average* berlaku ACF menuju ke-0 setelah *lag* ke-q sedangkan nilai PACF model AR yaitu $\emptyset_{kk}$ = 0, k > p dan model MA yaitu $\emptyset_{kk}$ = 0, k > q. Hipotesis untuk menguji koefisien autokorelasi parsial adalah sebagai berikut

H_0 : $\emptyset_{kk}$ = 0 (Tidak ada hubungan antar koefisien PACF)

H_1 : $\emptyset_{kk} \neq 0$ (Ada hubungan antar koefisien PACF)

Taraf signifikansi : α = 5%

Statistik uji : $t = \frac{\emptyset_{kk}}{SE\ (\emptyset_{kk})}$

dengan : $SE\ (\emptyset_{kk}) = \frac{1}{T}$

Kriteria keputusan :

Tolak H_0 jika t hitung $> t_{\frac{\alpha}{2},df}$, dengan derajat bebas *df* = T-1, T adalah banyaknya data dan k adalah *lag* autokorelasi parsial yang akan diuji (Wei, 2006).

2.5 Penentuan *Lag* Optimum

Menentukan panjang lag yaitu dengan menggunakan kriteria informasi yang tersedia. Panjang lag yang dipilih dapat dilihat melalui nilai paling minimum dari masing-masing kriteria. Beberapa informasi kriteria yang sering digunakan adalah sebagai berikut:

a. *Akaike Information Criterion* (AIC)

$$\text{AIC} = \ln \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (\varepsilon_t^{(p)})^2 + \text{m} \frac{2}{T} \quad (2.11)$$

b. *Bayesian Criterion of* Gideon Schwarz

$$\text{SC} = \ln \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (\varepsilon_t^{(p)})^2 + \text{m} \frac{\ln T}{T} \quad (2.12)$$

c. Hannan-Quinn *Criterion*

$$HQ = \ln \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (\varepsilon_t^{(p)})^2 + \text{m} \frac{2\ln(\ln T)}{T} \quad (2.13)$$

Dimana ε_t adalah galat (Kirchgasser and Wolters, 2007).

2.6 Bentuk Umum Model *Autoregressive* AR(p)

Bentuk umum orde ke-p model *Autoregressive* adalah

$$x_t = \delta + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.14)$$

Dimana ε_t *white noise*. Persamaan (2.14) dapat juga ditulis

$$\Phi(\text{B}) x_t = \delta + \varepsilon_t$$

Dimana $\Phi(\text{B}) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$.

untuk AR (p) stasioner

$$E(X_t) = \mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p}$$

dan

$$\gamma_y(k) = cov\,(x_t, x_{t-k})$$

$$= cov\ (\ \delta + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t, x_{t-k})$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \phi_i\ cov(x_{t-i}, x_{t-k}) + cov(\varepsilon_t, x_{t-k}) \qquad (2.15)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \phi_i\, \gamma_y(k-i) + \begin{cases} \sigma^2 \text{ jika } k = 0 \\ 0 \text{ jika } k > 0 \end{cases}$$

Kemudian kita peroleh

$$\gamma_y(0) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i\, \gamma_y(i) + \sigma^2$$

$$\Rightarrow\ \gamma_y(0)\left[1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i \rho_y(i)\right] = \sigma^2$$

(Montgomery, Jennings, & Kulachi, 2008).

Hasil pembagian persamaan (2.15) dengan $\gamma_y(0)$untuk k > 0 dapat digunakan untuk mencari nilai ACF pada proses AR(p) yang memenuhi persamaan *Yule-Walker*

$$\rho_y(k) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i\, \rho_y(k-i) \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (2.16)$$

2.7 Bentuk Umum Model *Moving Average* MA(q)

Model *moving average* dengan orde q dinotasikan MA (q) didefinisikan sebagai :

$$x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}\ ;\ \varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$$

dengan :

x_t : nilai variabel pada waktu ke-t

ε_t : nilai error pada waktu t

θ_i : koefisien regresi, i: 1,2,3, …,q

q : orde MA

Persamaan di atas dapat ditulis dengan operator *backshift* (B), menjadi :

$$x_t = \mu + (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q)\varepsilon_t$$

$$= \mu + (1 - \textstyle\sum_{i=1}^{q} \theta_i B^i)\ \varepsilon_t$$

$$= \mu + \Theta(B)\varepsilon_t \qquad (2.17)$$

dimana $\Theta(B) = 1 - \sum_{i=1}^{q} \theta_i B^i$

Karena ε_t *white noise*, nilai harapan MA (q) adalah

$$E(X_t) = E(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q})$$

$$= \mu$$

dan varian

$$Var(X_t) = \gamma_y(0) = Var(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_3 \varepsilon_{t-3} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q})$$

$$= \sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2)$$

Dengan cara yang sama diperoleh nilai autokovarian pada *lag* k

$$\gamma_y(k) = Cov(x_t, x_{t+k})$$

$$= E[(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q})(\mu + \varepsilon_{t+k} - \theta_1 \varepsilon_{t+k-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t+k-q})]$$

$$= \begin{cases} \sigma^2(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q) & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

Diperoleh nilai autokorelasi pada *lag* k yaitu

$$\rho_y(k) = \frac{\gamma_y(k)}{\gamma_y(0)} = \begin{cases} \dfrac{(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q)}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & , k = 1, 2, 3, \dots q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

Dari bagian ini diperoleh bahwa nilai ACF sangat membantu mengindentifikasi model MA dan orde *cut off* tepat setelah *lag* q (Montgomery, Jennings, & Kulachi, 2008).

2.8 Model *Autoregressive Moving Average* ARMA(p,q)

Dalam bentuk umum, model *Autoregressive Moving Average* atau ARMA(p,q) diberikan sebagai

$$x_t = \delta + \emptyset_1 x_{t-1} + \emptyset_2 x_{t-2} + \cdots + \emptyset_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$= \delta + \sum_{i=1}^{p} \emptyset_i x_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

atau $\Phi(B)x_t = \delta + \Theta(B)\varepsilon_t$ (Wei, 2006). (2.18)

dengan

x_t	: nilai variabel pada waktu ke-*t*
$\emptyset_i$	: koefisien regresi ke-i, i= 1, 2, 3, ..., p
p	: order *AR*
θ_i	: parameter model *MA* ke-i, i=1, 2, 3, ..., q
ε_t	: nilai *error* pada waktu ke-t
$\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots, \varepsilon_{t-q}$	: galat pada saat t, t-1, t-2, ..., t-q dan ε_t diasumsikan *White Noise* dan normal.

2.9 Model *Autoregressive Integrated Moving Average* ARIMA(p,d,q)

Jika d adalah bilangan bulat nonnegative, maka $\{X_t\}$ dikatakan proses ARIMA jika $Y_t := (1 - B)^d x_t$ merupakan akibat dari proses ARMA.

Definisi di atas berarti bahwa $\{X_t\}$ memenuhi persamaan :

$$\phi^*(B)X_t \equiv \phi(B)(1-B)^d x_t = \theta(B)\varepsilon_t, \ \{\varepsilon_t\} \sim WN(0, \sigma^2) \quad (2.19)$$

Dengan $\phi(B)$dan $\theta(B)$ adalah derajat polinomial dari p dan q, $\phi(B) \neq 0$ untuk $|\phi(B)| < 1$ (Brockwell, 2002).

2.10 Proses Jangka Panjang dan Jangka Pendek Data Runtun Waktu

Proses ARMA sering dinyatakan sebagai proses memori jangka pendek (*short memory*) karena autokorelasi antara X_t dan X_{t+k} turun sangat cepat untuk $k \rightarrow \infty$. Dalam kasus-kasus tertentu, autokorelasi turun secara lambat menuju nol untuk *lag* yang semakin besar. Hal ini menunjukkan masih ada hubungan antara pengamatan yang jauh terpisah atau memiliki ketergantungan jangka panjang.

Suatu proses stasioner dengan fungsi autokorelasi ρ_k dikatakan sebagai proses memori jangka panjang jika $\lim_{t\rightarrow\infty} \sum_{k=1}^{t} |\rho_k|$ tidak konvergen (Hosking, 1981). Penyelidikan terhadap proses memori dapat diamati pada fungsi autokorelasi. Deret berkala X_t dikatakan mengikuti proses memori jangka pendek jika

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \sum_{k=1}^{t} |\rho_k| < \infty$$

yang ditandai dengan fungsi autokorelasi yang turun secara cepat, dan akan mengikuti proses memori jangka panjang jika

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \sum_{k=1}^{t} |\rho_k| = \infty.$$

yang ditandai dengan fungsi autokorelasi yang turun secara perlahan menuju nol. Dimana ρ_k adalah fungsi autokorelasi pada lag ke k.

2.11 *Fractional Integrated*

Dalam proses ARIMA, kita mengasumsikan bahwa nilai d adalah bilangan bulat. Dengan kata lain, proses Xt nonstationar dengan pembedaan nilai d bilangan bulat. Dalam sebuah proses untuk menjadi stasioner, nilai d harus kurang dari 1.

$$\emptyset(B)\,(1-B)^{d}\,X_t = \theta(B)\,\varepsilon_t \qquad (2.20)$$

Dimana $\emptyset(B)\,\theta(B) \neq 0$ untuk $|B| \leq 1$ dan ε_t proses *white noise* dengan rata-rata nol dan variansi konstan σ^2_{ε}.

$$(1-B)^{d}\,X_t = \varepsilon_t \qquad (2.21)$$

Jika proses pada (2.21) stasioner

$$X_t = (1-B)^{-d}\,\varepsilon_t \qquad (2.22)$$

Dari serangkaian ekspansi taylor, kita memiliki rumus binomial umum

$$(1-B)^{-d} = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{-d}{j}(-B^{j}) = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j B^{j} \qquad (2.23)$$

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j B^{j}\,\varepsilon_t$$

dimana

$$\psi_j = (-1)^{j}\binom{-d}{j}$$

$$= (-1)^{j}\frac{(-d)(-d-1)\ldots(-d-j+1)}{j!}$$

$$= \frac{(j+d-1)(j+d-2)\ldots(j+d-j)}{j!}$$

$$= \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d)}$$

dan Γ adalah fungsi gamma. Menggunakan formula stirling

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi}\, e^{-x}\, x^{x-1/2} \qquad x \to \infty$$

Kita peroleh

$$\psi_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d)} \approx \frac{1}{\Gamma(d)}\frac{\sqrt{2\pi}\, e^{-j-d}(j+d)^{j+d-1/2}}{\sqrt{2\pi}\, e^{-j-1}(j+1)^{j+1-1/2}} \approx \frac{1}{\Gamma(d)\, j^{1-d}}$$

Jelas ,{ ψ_j} adalah *square summable* jika dan hanya jika $2(1-d) > 1$, $d < 0.5$. Dengan cara yang sama kita lihat bahwa proses *invertible* jika dan hanya jika -0.5<d. Dengan demikian proses pada (2.21) atau lebih umum proses pada (2.20) adalah stasioner dan *invertible* jika dan hanya jika -0.5<d<0.5. proses pada (2.20) dengan $-0.5<d<0.5$ disebut model *autoregressive fractionally integrated moving average* (ARFIMA(p,d,q)). Proses pada (2.21) dengan $-0.5<d<0.5$ disebut pembedaan fraksional (Wei, 2006).

Menurut Hosking (1981), karakteristik deret yang *fractionally integrated* untuk berbagai nilai *d* adalah

1. $|d| \geq 0,5$ menyatakan proses panjang dan tidak stasioner.
2. $0 < d < 0,5$ menyatakan proses berkorelasi panjang stasioner dengan adanya ketergantungan positif antar pengamatan yang terpisah jauh yang ditunjukkan dengan autokorelasi positif dan turun lambat dan mempunyai representasi *moving average* orde tak hingga.
3. $-0,5 < d < 0$ menyatakan proses berkorelasi pendek stasioner dengan memiliki ketergantungan negatif yang ditandai dengan autokorelasi negatif dan turun lambat serta mempunyai representasi *autoregressive* orde tak hingga.
4. $d = 0$ menyatakan proses berkorelasi pendek.

2.12 *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average* (ARFIMA)

Data runtun waktu akan mempunyai sifat ketergantungan jangka panjang (*long memory*) jika di antara pengamatan dengan periode yang terpisah jauh masih mempunyai korelasi yang tinggi. Model data deret waktu ketergantungan jangka panjang disebut dengan Model ARFIMA (*Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average*) dengan parameter pembeda berbentuk bilangan riil dengan $-0,5 < d < 0,5$, ini berbeda dengan model ARIMA yang mempunyai parameter pembeda berupa bilangan bulat. Model ARFIMA(*p*,*d*,*q*) yang dikembangkan Granger dan Joyeux (1980) adalah sebagai berikut,

$$\emptyset(B)\,(1-B)^{d}\,X_t = \theta(B)\,\varepsilon_t \qquad (2.24)$$

dengan :

t = indeks dari pengamatan,

d = parameter pembeda (bilangan pecahan),

$\varepsilon_t \sim \mathrm{IIDN}(0,\sigma^2_{\varepsilon})$

$\emptyset(B) = 1 - \emptyset_1 B - \emptyset_2 B^2 - \dots - \emptyset_p B^p$ adalah polinomial AR(*p*),

$\theta(B) = 1 - \sum_{i=1}^{q} \theta_i B^i$ adalah polinomial MA(*q*),

$(1-B)^d = \Delta^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{dk}{k}(k) - 1$ operator pembeda pecahan

2.13 Pendugaan Parameter

Maximum likelihood estimation merupakan salah satu metode dalam pendugaan parameter. Metode ini menggunakan prinsip memaksimumkan fungsi *likelihood* untuk menduga parameter d, θ dan ϕ pada model ARFIMA. Diberikan bentuk umum model ARFIMA (p,d,q) sebagai berikut :

$$\emptyset(B)\,(1-B)^{d}\,X_t = \theta(B)\,\varepsilon_t$$

atau

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)\,(1-B)^d\,(Z_t - \mu) = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q)\varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \frac{(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)\,(1-B)d\,(Zt - \mu)}{(1 + \theta 1\,B + \theta 2\,B2 + \dots + \theta q\,Bq)}$$

dimana $\varepsilon_t \sim N\,(0,\sigma^2)$, fungsi kepekatan peluang dari $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$P(\varepsilon \mid d, \emptyset, \mu, \theta, \sigma_\varepsilon{}^2) = (2\pi\sigma_\varepsilon{}^2)^{-\frac{n}{2}} \exp[-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon{}^2}\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t{}^2]$$

Kita dapat menuliskan fungsi *likelihood* dari parameter (d,$\emptyset, \mu, \theta, \sigma_\varepsilon{}^2$).

$\ln L\,(d, \emptyset, \mu, \theta, \sigma_\varepsilon{}^2) =$

$$-\frac{n}{2}\ln 2\pi\sigma_\varepsilon{}^2 - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon{}^2}\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{(1-\phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)\,(1-\mathrm{B})d\;(\mathrm{Zt}-\mu)}{(1+\theta 1\ \mathrm{B} + \theta 2\ \mathrm{B2} + \ldots + \theta \mathrm{q\ Bq})}\right)^2, \qquad (2.25)$$

Nilai pendugaan $d, \emptyset, \mu, \theta$ diperoleh ketika memaksimumkan persamaan (2.25) yang kemudian disebut sebagai pendugaan *maximum likelihood* (Wei, 2006).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian dilakukan di Semester Genap Tahun Ajaran 2016/2017 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan adalah data sekunder yang diperoleh dari *http://www.bi.go.id/* tentang inflasi bulanan Indonesia dari Januari 2004 hingga Desember 2016.

Tabel 1. Inflasi Bulanan Indonesia dari Januari 2004 Hingga Desember 2016.

Bulan/Tahun	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Januari	4.82%	7.32%	17.03%	6.26%	7.36%	9.17%	3.72%
Februari	4.60%	7.15%	17.92%	6.30%	7.40%	8.60%	3.81%
Maret	5.11%	8.81%	15.74%	6.52%	8.17%	7.92%	3.43%
April	5.92%	8.12%	15.40%	6.29%	8.96%	7.31%	3.91%
Mei	6.47%	7.40%	15.60%	6.01%	10.38%	6.04%	4.16%
Juni	6.83%	7.42%	15.53%	5.77%	11.03%	3.65%	5.05%
Juli	7.20%	7.84%	15.15%	6.06%	11.90%	2.71%	6.22%
Agustus	6.67%	8.33%	14.90%	6.51%	11.85%	2.75%	6.44%
September	6.27%	9.06%	14.55%	6.95%	12.14%	2.83%	5.80%
Oktober	6.22%	17.89%	6.29%	6.88%	11.77%	2.57%	5.67%
November	6.18%	18.38%	5.27%	6.71%	11.68%	2.41%	6.33%
Desember	6.40%	17.11%	6.60%	6.59%	11.06%	2.78%	6.96%

Tabel 1. Lanjutan

Bulan/Tahun	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Januari	7.02%	3.65%	4.57%	8.22%	6.96%	4.14%
Februari	6.84%	3.56%	5.31%	7.75%	6.29%	4.42%
Maret	6.65%	3.97%	5.90%	7.32%	6.38%	4.45%
April	6.16%	4.50%	5.57%	7.25%	6.79%	3.60%
Mei	5.98%	4.45%	5.47%	7.32%	7.15%	3.33%
Juni	5.54%	4.53%	5.90%	6.70%	7.26%	3.45%
Juli	4.61%	4.56%	8.61%	4.53%	7.26%	3.21%
Agustus	4.79%	4.58%	8.79%	3.99%	7.18%	2.79%
September	4.61%	4.31%	8.40%	4.53%	6.83%	3.07%
Oktober	4.42%	4.61%	8.32%	4.83%	6.25%	3.31%
November	4.15%	4.32%	8.37%	6.23%	4.89%	3.58%
Desember	3.79%	4.30%	8.38%	8.36%	3.35%	3.02%

3.3 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan studi literatur secara sistematis yang diperoleh dari buku-buku maupun media lain untuk mendapatkan informasi demi mendukung penulisan skripsi ini. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membuat plot ACF dari data untuk mengetahui adanya indikasi ketergantungan jangka panjang.
2. Penentuan *lag* optimum untuk mengidentifikai orde AR(p) dan MA(q)
3. Menentukan orde terbaik dari AR(p) dan MA(q) dengan melihat dari nilai *Akaike Information Criterion* (AIC), *Schwarz Criteria* (SC), dan Hannan-Quinn *Criterion* (HQ). dikatakan baik jika AIC, SC dan HQ bernilai minimum.
4. Estimasi model ARFIMA (p,d,q) menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE).

5. Menguji signifikansi orde AR(p) dan MA(q)
6. Pemeriksaan diagnostik model untuk menguji kelayakan model. Model dikatakan baik jika memenuhi proses *white noise* menggunakan uji *Ljung-Box Q Statistic*
7. Melakukan peramalan.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Model terbaik dari data angka laju inflasi bulanan di Indonesia periode Januari 2004 hingga Desember 2016 yakni ARFIMA (1, d[0.443495],0)

$$X_t = \frac{0.1200Xt-1 + 0.0334Xt-2 + 0.0173Xt-3 + ... + \varepsilon_t}{0.2706}$$

2. Laju inflasi bulanan di Indonesia diprediksi akan naik sekitar rata-rata 0,12% per bulan.

DAFTAR PUSTAKA

Brockwell, P.J. and Davis, R.A. 2002. *Introduction to Time Series and Forecasting* Second Edition. Springer-Verlag New York, Inc., New York.

Granger, C. W. J. and Roselyne Joyeux (1980). An introduction to long-memory time series models and fractional differencing, *Journal of Time Series Analysis*, **1**:15–29.

Gujarati, Damodar N., and Dawn C. Porter. 2009. *Basic Econometrics Fifth edition*. McGraw-Hill/Irwin Companies, Inc., New York.

Hosking, J. R. M. 1981. Fractional Differencing. *Biometrika*. **68**:165-176.

Kirchgasser G. and Wolters J. 2007. *Introduction To Modern Time Series Analysis.* Springer-Verlag Berlin, Berlin.

Montgomery, D.C., Jennings, C.L., and Kulachi, M. 2008. *Introduction Time Series Analysis and Forecasting*.John Wiley & Sons,Inc., Hoboken, New Jersey.

Pankratz, A. 1991. *Forecasting with Dynamic Regression Models.* Willey Intersciences Publication, Canada.

Rosadi, D.2011. *Ekonometrika dan Analisis Runtun Waktu Terapan dengan Eviews.* Andi Offset, Yogyakarta.

Wei, W.W.S. 2006. *Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods Second Edition*. Pearson Education Inc., Canada.