# KESTABILAN PERTUMBUHAN POPULASI IKAN LELE DENGAN MODEL PERTUMBUHAN LOGISTIK VERHULST

(Skripsi)


Oleh

ZEFNI APRILIA



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS LAMPUNG**
**BANDAR LAMPUNG**
**2017**

# ABSTRAK

## KESTABILAN PERTUMBUHAN POPULASI IKAN LELE DENGAN MODEL LOGISTIK VERHULST

**OLEH**

**ZEFNI APRILIA**

Mengetahui kestabilan pertumbuhan populasi ikan lele sangat penting karena dapat membantu memperkirakan jumlah pemanenan dan supaya tidak terjadi kepunahan. Kestabilan pertumbuhan populasi ikan lele dapat diketahui dengan menggunakan Model Logistik Verhulst. Penghitungan dapat dilakukan apabila jumlah populasi awal, ambang batas populasi, laju pertumbuhan populasi, dan daya dukung maksimum diketahui. Pertumbuhan populasi ikan lele akan stabil pada saat jumlah populasi sama dengan daya dukung lingkungannya. Apabila jumlah populasi lebih kecil dari ambang batas populasi, maka pemanenan tidak dapat dilakukan.



Kata kunci: Ikan lele, Konstanta Panen, Model Verhulst, Pertumbuhan Populasi

# ABSTRACT

## THE STABILITY OF THE CATFISH GROWTH POPULATION BY USING VERHULST LOGISTIC MODEL

**By**

**ZEFNI APRILIA**

Knowing the stability of the catfish growth population was very important because it could help to estimate the harvest amount so that there was no extinction. The stability of the catfish growth population could be known by using Verhulst Logistic Model. The computation could be done when the initial population amount, thresold population, growth rate population and carrying capacity was known. The catfish growth population would be stable when the population's amount were same to their carrying capacity amount. On the other hand, if the population's amount was smaller than the thresold population it could be said that harvest could not be done.



Keyword : Verhulst Model, Catfish, Constant Harvesting, Growth Population

**KESTABILAN PERTUMBUHAN POPULASI IKAN LELE DENGAN MODEL PERTUMBUHAN LOGISTIK VERHULST**

Oleh

ZEFNI APRILIA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS LAMPUNG**
**BANDAR LAMPUNG**
**2017**

| | |
|---|---|
| Judul Skripsi | : **KESTABILAN PERTUMBUHAN POPULASI IKAN LELE DENGAN MODEL PERTUMBUHAN LOGISTIK VERHULST** |
| Nama Mahasiswa | : *Zefni Aprilia* |
| Nomor Pokok Mahasiswa | : 1317031091 |
| Jurusan | : Matematika |
| Fakultas | : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam |

**MENYETUJUI**

1. Komisi Pembimbing

**Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**
NIP 19700831 199903 1 002

**Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.**
NIP 19620704 198803 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

**Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**
NIP 19631108 198902 2 001

## MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Pembimbing Utama : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ......................

Anggota Pembimbing : **Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.** ......................

Penguji
Bukan Pembimbing : **Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.** ......................

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

**Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D.**
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **14 Agustus 2017**

## PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"Kestabilan Pertumbuhan Populasi Ikan Lele dengan Model Pertumbuhan Logistik Verhulst"** merupakan hasil karya sendiri dan bukan hasil karya orang lain. Semua hasil yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah ilmiah Universitas Lampung. Apabila di kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini hasil salinan atau dibuat oleh orang lain maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Agustus 2017

Penulis

**Zefni Aprilia**

NPM. 1317031091

## RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bandaliko-Sumani, Solok pada tanggal 10 April 1995 sebagai anak pertama dari  bersaudara dari Bapak Suwerman dan Ibu Marnis.

Penulis menempuh pendidikan Taman Kanak-Kanak (TK) Tunas Bangsa Aurduri pada tahun 2000-2001, Sekolah Dasar Negeri (SDN) 31 Cinangkiek Sumani pada tahun 2001-2007, Sekolah Menengah Pertama Negeri (SMPN) 3 X Koto Singkarak pada tahun 2007-2010, dan Sekolah Menengah Atas Negeri (SMAN) 1 X Koto Singkarak pada tahun 2010 -  2013.

Pengalaman organisasi penulis yaitu menjadi anggota bidang keilmuan Himpunan Mahasiswa Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung pada tahun 2014-2015. Anggota Biro BBQ Rois FMIPA pada tahun 2014-2015 dan anggota Biro Danus Rois FMIPA 2015-2016.

Pada tahun 2016 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Dinas Pendidikan Pemuda dan Olahraga (Disdikpora) Kabupaten Solok, Provinsi Sumatera Barat. Pada tahun 2017 penulis melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sendang Asri, Kecamatan Sendang Agung, Kabupaten Lampung Tengah, Provinsi Lampung.

# PERSEMBAHAN

*Puji syukur kepada Allah SWT, karena atas limpahan berkat dan rahmat-Nya skripsi ini dapat terselesaikan.*

*Aku persembahkan karya sederhana penuh perjuangan dan kesabaran ini sebagai ungkapan rasa sayang dan bakti kepada :*

*Bapak dan Ibu tercinta yang selalu mencurahkan kasih sayang, mengajari begaimana menjadi manusia terbaik, serta dalam doa dan sujud yang selalu menantikan keberhasilanku dengan sabar dan penuh pengertian.*

*Adik Dina dan Syauqi serta semua keluarga besarku atas rasa sayang, doa, perhatian, pengertian, pengorbanan, penghormatan dan dorongan semangat yang tulus, serta persaudaraan yang tidak dapat tergantikan.*

*Hidayat Mustafa dan Sahabatku Si Buruak Gita Andriana yang selalu sabar mendengarkan keluh-kesahku, menemani dan menyemangati dalam menuju keberhasilan.*

*Para dosen dan staff Jurusan Matematika FMIPA Unila memberikan ilmu bermanfaat kepada penulis.*

*Almamater yang kucintai, Universitas Lampung.*

*Kata Inspirasi*

**"Orang berilmu dan beradab tidak akan diam di kampung halaman**
**Tinggalkan negerimu dan merantaulah ke negeri orang**
**Merantaulah, kau akan dapat pengganti dari kerabat dan kawan**
**Berlelah-lelahlah, manisnya hidup terasa setelah lelah berjuang**
**Aku melihat air menjadi rusak karena diam tertahan**
**Jika mengalir menjadi jernih, jika tidak kan keruh menggenang**
**Singa jika tak tinggalkan sarang tak akan dapat mangsa**
**Anak panah jika tak tinggalkan busur tidak akan kena sasaran**
**Jika matahari di orbitnya tidak bergerak dan terus diam**
**Tentu manusia bosan padanya dan enggan memandang**
**Bijih emas bagaikan tanah biasa sebelum digali dari tambang**
**Kayu gaharu (cendana) tak ubahnya seperti kayu biasa jika di dalam hutan. "**
**(Imam Syafi'i)**

**"Dan barangsiapa berhijrah di jalan Allah, niscaya mereka akan mendapatkan di bumi ini tempat hijrah yang luas dan rezeki yang banyak. Barangsiapa keluar dari rumahnya dengan maksud berhijrah karena Allah dan Rasul-Nya, kemudian kematian menimpanya (sebelum sampai ke tempat yang dituju), maka sungguh, pahalanya telah ditetapkan di sisi Allah. Dan Allah Maha Pengampun, Maha Penyayang "**

**(QS. An Nisa : 100)**

"Jagalah shalatmu ! ketika kau kehilangannya, kau akan kehilangan segalanya"
(Umar Bin Khatab).

"Some people follow their dreams otherss hunt them down and beat them mercilessly into submission"
(Neil Kendall)

"Jangan takut untuk bermimpi lebih tinggi, karena apa yang kamu peroleh saat ini adalah wujud dari mimpimu dimasa lalu"

(Zefni Aprilia, 2017)

## SANWACANA

Puji syukur Penulis ucapkan kehadirat Allah SWT, karena atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya skripsi ini dapat diselesaikan.

Dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., selaku Ketua Tim Penguji dan Pembimbing Pertama atas saran, pengarahan, motivasi, dan kesabaran dalam membimbing penulis selama penelitian hingga penyelesaian skripsi.
2. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc.,Ph.D., selaku Pembimbing Kedua atas kesediaannya memberikan bimbingan, pengarahan, pikiran, semangat, motivasi, waktu, saran, nasehat, dan bantuan selama penulis menyelesaikan skripsi.
3. Bapak Suharsono S., M.S.,M.Sc.,Ph.D., selaku Penguji bukan Pembimbing yang telah memberikan saran, pengarahan, semangat, motivasi, nasehat, kesabaran, dan bantuan yang sangat berharga untuk perbaikan penulisan skripsi.
4. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si., selaku Pembimbing Akademik yang telah memberi nasehat demi kebaikan penulis selama menjadi mahasiswa Matematika Universitas Lampung.
5. Ibu Dra.Wamiliana, M.A.,Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang telah mengesahkan skripsi ini.
7. Para dosen dan staff Jurusan Matematika Universitas Lampung.
8. Ibunda Marnis,S.Pdi serta Adinda penulis Dina Febrianti dan Muhammad Syauqi atas kasih sayang, dukungan, keceriaan, dan semangat yang diberikan.
9. Hidayat Mustafa yang selalu memberi bantuan moril maupun materil serta setia menemani penulis baik dalam suka maupun duka.
10. Sahabatku Gita Andriana yang sama-sama berjuang memperoleh gelar sarjana dan selalu mendengarkan suka-duka penulis dalam penyusunan skripsi ini.
11. Suci, Karindha, Eky, Sinta, Vinny, Heni, Hanggita, Tina, Ali, Haris dan teman-teman Matematika’13 yang telah bersama-sama berjuang, memberikan semangat, dan membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.
12. Adik-adik tercinta : Siti Komariah, Yutia, Susan, Andan, Intan, Uti, Tiara, Rahmat, Darma dan seluruh pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah membantu dan memberikan semangat dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga Allah SWT senantiasa membalas kebaikan mereka dengan yang lebih baik dan semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amin.

Bandar lampung, Agustus 2017
Penulis

**Zefni Aprilia**

## DAFTAR ISI

# DAFTAR GAMBAR

# I. PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang dan Masalah

Matematika adalah salah satu disiplin ilmu yang memegang peranan penting dalam kajian di berbagai bidang keilmuan. Bidang lain seperti fisika, kimia , bahkan biologi tidak terlepas dari dunia matematika. Dalam penggunaannya, matematika tidak hanya terpaku pada rumus-rumus yang telah ada. Matematika memiliki banyak cabang ilmu, diantaranya yaitu matematika terapan dan pemodelan matematika. Matematika terapan berkenaan dengan penggunaan alat matematika abstrak guna memecahkan masalah-masalah konkret di dalam ilmu pengetahuan, bisnis dan wilayah lainnya. Matematika terapan secara prinsipal mengandung analisa terapan, kebanyakan berupa persamaan diferensial, teori aproksimasi (dianalisis secara luas, untuk memasukkan representasi, metode asimtotik, metode variasional, dan analisis numerik), dan probabilitas terapan.

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas $u$ terhadap satu atau lebih variabel bebas dan dituliskan dengan :

$$F\left(u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \frac{d^3u}{dt^3}, \dots \dots, \frac{d^nu}{dt^n}, t\right) = 0$$

Persamaan diferensial seringkali muncul dalam model matematika yang menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Sebagai contoh, turunan-turunan dalam fisika muncul sebagai kecepatan dan percepatan, dalam geometri sebagai kemiringan (tanjakan), dalam biologi sebagai laju pertumbuhan populasi dan sebagainya.

Pertumbuhan populasi ditandai dengan adanya perubahan jumlah populasi di setiap waktu yang dipengaruhi jumlah kematian, kelahiran serta perpindahan (migrasi). Selain membutuhkan pengamatan dalam jangka waktu tertentu, perhitungan mengenai perkembangan jumlah populasi juga penting dilakukan untuk mengetahui laju pertumbuhan spesies tersebut. Salah satu cabang ilmu matematika yang dapat membantu menyelesaikan permasalahan tersebut adalah pemodelan matematika.

Dalam penerapan pemodelan matematika terdapat beberapa model pertumbuhan, salah satunya adalah model pertumbuhan kontinu. Model kontinu terbagi dua yaitu model eksponensial dan model logistik. Dalam pertumbuhan populasi, model pertumbuhan logistik mempunyai hasil estimasi yang lebih baik dibanding dengan model pertumbuhan eksponensial. Dalam penggunaan model logistik ini batas populasi dimasukkan dalam perhitungan sehingga jumlah populasi dengan model ini tidak akan tumbuh secara tak terhingga.

Pada skripsi ini penulis akan membahas kestabilan pertumbuhan populasi ikan lele dengan menggunakan model Verhulst. Ikan lele adalah salah satu komoditas perikanan yang banyak digemari masyarakat. Habitat lele yakni di perairan air tawar, di dataran rendah. Salah satu persoalan paling penting dalam budidaya ikan lele adalah proyeksi populasi ikan tersebut. Ukuran dan pertumbuhan populasi ikan secara langsung mempengaruhi keuntungan yang akan diperoleh nantinya. Dengan dibentuknya sebuah model matematika, proyeksi populasi tiap panen ikan dapat dilakukan berdasar data panen ikan yang sudah ada.

Berdasarkan uraian diatas, maka penulis tertarik untuk melakukan penelitian tentang “Kestabilan Pertumbuhan Populasi Ikan Lele dengan Model Logistik Verhulst.

## 1.2 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan masalah yang telah diuraikan maka tujuan penelitian ini adalah :

1. Mengetahui solusi analitik dari model Verhulst yang digunakan.
2. Mengetahui kestabilan pertumbuhan populasi ikan lele ternak menggunakan model pertumbuhan logistik (model Verhults).

## 1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah :

1. Menambah pengetahuan dan pengalaman penulis agar dapat mengembangkan ilmu yang diperoleh selama mengikuti perkuliahan di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
2. Upaya untuk mempelajari lebih dalam lagi tentang penerapan model Verhulst pada pertumbuhan populasi ikan lele ternak.
3. Menambah wawasan tentang model pertumbuhan populasi (model Verhults).

# II. TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1 Ikan Lele

Ikan Lele adalah salah satu jenis ikan air tawar yang termasuk ke dalam ordo Siluriformes dan digolongkan ke dalam ikan bertulang sejati. Lele dicirikan dengan tubuhnya yang licin dan pipih memanjang, serta adanya sungut yang menyembul dari daerah sekitar mulutnya. Ikan lele merupakan hewan nokturnal dimana ikan ini aktif pada malam hari dalam mencari mangsa. Lele memiliki alat pernapasan tambahan yang dinamakan *Arborescent*. *Arborescent* ini merupakan organ pernapasan yang berasal dari busur insang yang telah termodifikasi. Organ ini dipergunakan untuk pernafasan udara sehingga memungkinkan lele untuk mengambil napas langsung dari udara dan dapat hidup di tempat beroksigen rendah. Alat ini juga memungkinkan lele dumbo untuk hidup di darat, asalkan udara di sekitarnya memiliki kelembapan yang tinggi. Pada kedua sirip dada lele terdapat sepasang duri (patil), berupa tulang berbentuk duri yang tajam. Pada beberapa spesies ikan lele, duri-duri patil ini mengandung racun ringan (Suyanto, 2006).

Berdasarkan perkembangbiakannya, ikan lele termasuk ikan yang bertelur pada substart. Induk jantan mempunyai sifat mengasuh anak sedangkan induk betina banyak keluyuran keluar sarang. Ikan lele biasa berpijah pada musim penghujan.

Jika gonad sudah matang, induk jantan dan induk betina berpasangan mencari lokasi yang aman untuk membuat sarang berupa lubang dibawah permukaan air dengan kedalaman 20 cm dan diameter 25 cm. Lubang dibuat diantara rerumputan yang tumbuh menjulur ke dalam air. Lalu, telur-telur dikeluarkan dan menempel di antara rerumputan atau dasar lubang, bersamaan waktunya induk jantan melepaskan spermanya di dalam air sehingga terjadi pembuahan. Telur yang telah dibuahi dijaga oleh induk jantan dengan mengipaskan badan maupun siripnya untuk menambah oksigen ke telur yang tentunya berpengaruh positif terhadap derajat penetasan telur (Sutrisno, 2007).

Di Indonesia dikenal banyak jenis lele, di antaranya lele Lokal, lele Sangkuriang, lele Dumbo, lele Phiton dan lele Mutiara). Namun yang dibudidayakan hanya lele Lokal (*Clarias batrachus*) dan lele Dumbo (*Clarias gaeriepinus*). Jenis yang kedua lebih banyak dikembangkan karena pertumbuhannya lebih cepat dan ukurannya lebih besar daripada lele Lokal.

### 2.1.1 Lele Lokal

Ikan lele Lokal memiliki nama latin *Clarias batrachus,* merupakan jenis lele yang dikenal luas dimasyarakat. Sebelum lele dumbo diperkenalkan di Indonesia, para peternak membudidayakan jenis lele jenis ini. Namun saat ini sangat jarang peternak yang membudidayakan jenis ikan lele Lokal karena dipandang kurang menguntungkan. Lele Lokal memiliki *Food Convertion Ratio* (FCR) yang tinggi, artinya rasio pakan yang diberikan terhadap berat daging yang dihasilkan tinggi. Perlu lebih dari satu kilogram daging dalam satu siklus budidaya. Selain itu, pertumbuhan lele Lokal terbilang sangat lambat. Lele lokal yang berumur satu tahun masih kalah besar dengan lele Dumbo yang berumur 2 bulan.

Terdapat tiga jenis lele Lokal yang ada di Indonesia, yaitu lele hitam, lele putih dan lele merah. Diantara ketiga jenis lele tersebut, lele hitam paling banyak dibudidayakan untuk konsumsi. Sedangkan lele putih dan merah lebih banyak dibudidayakan sebagai ikan hias. Lele Lokal memiliki patil yang tajam dan berbisa, terutama pada lele muda. Apabila menyengat, racun yang terdapat pada patil bisa membunuh mangsanya dan bagi manusia bisa membuat bengkak dan demam (Khairuman, 2008).

### 2.1.2 Lele Dumbo

Ikan lele Dumbo (*Clarias gariepenus)* pertama kali didatangkan ke Indonesia dari Taiwan pada tahun 1985. Ikan ini menjadi favorit dikalangan peternak karena pertumbuhannya yang cepat dan badannya yang bongsor dibandingkan dengan lele Lokal. Dari sisi fisik, ikan lele Dumbo bisa dibedakan dengan lele Lokal dari warnanya yang hitam kehijauan. Lele Dumbo juga akan bereaksi ketika terkejut atau stress, kulitnya berubah menjadi bercak-bercak hitam atau putih dan kemudian akan berangsur-angsur kembali ke warna awal. Lele Dumbo memiliki patil seperti ikan lele Lokal, namun patilnya tidak mengeluarkan racun. Lele Dumbo juga cocok dipelihara di kolam tanah karena tidak mempunyai kebiasaan membuat lubang. Secara umum, lele Dumbo bisa hidup lebih cepat, lebih besar dan lebih tahan terhadap penyakit dibanding lele Lokal. Namun dari sisi rasa, daging lele Dumbo lebih lembek. Sebagian orang menganggap daging ikan lele Lokal lebih enak rasanya dibanding lele Dumbo (Prihartono, 2003).

### 2.1.3 Lele Phiton

Lele Phiton merupakan produk hasil rekayasa genetik perternak di Padeglang. Ikan ini merupakan hasil persilangan dari lele betina eks Thailand dengan lele jantan lokal yang tidak diketahui asal-usulnya. Secara fisik, bentuk dan ukurannya panjang semampai sempurna, mulut agak rata, serta kepala lebih besar dan panjang dengan corak batik di kepalanya. Uniknya , lele Phiton memiliki semua keunggulan yang dimiliki dumbo dan sangkuriang. Produktivitas telur-telurnya tinggi, benih yang dihasilkan lebih baik dan cenderung merata, petumbuhan cepat, kemampuan adaptasi tinggi dan biasa dibudidayakan pada suhu dingin, sejuk, sedang dan panas

### 2.1.4 Lele Sangkuriang

Ikan lele Sangkuriang merupakan hasil perbaikan genetik melalui cara silang balik antara induk betina generasi kedua (F2) dengan induk jantan generasi keenam (F6) lele dumbo.  Dari hasil perkawinan ini ternyata didapatkan sifat-sifat unggul seperti kemampuan bertelur hingga 40 - 60 ribu butir per sekali pemijahan. Jauh berbeda dengan kemampuan bertelur lele lokal yang berkisar 1.000-4000 butir. Lele Sangkuriang juga lebih tahan terhadap penyakit, dapat dipelihara di air minim dan kualitas daging lebih baik.

Hanya saja kelemahannya, peternak tidak bisa membenihkan lele Sangkuriang dari induknya. Apabila lele Sangkuriang dibenihkan lagi, kualitasnya akan turun. Jadi pembenihan harus dilakukan dengan persilangan balik (Nasrudin, 2010).

### 2.1.5 Lele Mutiara

Ikan lele Mutiara merupakan hasil persilangan populasi ikan lele Mesir, Phiton , Sangkuriang dan Dumbo pada tahun 2010 dan 2011. Populasi ikan lele Mesir diperoleh dari Karawang, Piton dari Mojokerto, Sangkuriang dari Subang dan Dumbo dari Subang. Keunggulan dari ikan jenis ini adalah tumbuh lebih cepat, produktivitas panen tinggi, keseragaman ukuran tinggi, FCR rendah, lama pemeliharaan singkat, daya tahan terhadap penyakit tinggi dan toleransi terhadap lingkungan tinggi .

## 2.2 Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika adalah penyusunan suatu deskripsi dari beberapa perilaku dunia nyata (fenomena alam) ke dalam bagian matematika yang disebut dunia matematika (Giordano dan Weir, 2002).

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk merepresentasi dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau problem pada dunia real ini menjadi lebih tepat. Representasi matematika yang dihasilkan dari proses ini dikenal sebagai “Model Matematika”. Kontruksi, analisis dan penggunaan model matematika dipandang sebagai salah satu aplikasi matematika yang penting (Bambang, 1989).

Model Matematika digunakan dalam banyak disiplin ilmu dan bidang studi yang berbeda. Terdapat beberapa jenis model matematika, meliputi :

1. Model Empiris

   Pada model empiris, data yang berhubungan dengan problem menentukan peran yang penting. Dalam pendekatan ini, gagasan yang utama adalah mengkontruksi formula (persamaan) matematika yang dapat menghasilkan grafik yang terbaik untuk mencocokkan data.

2. Model Simulasi

   Pendekatan yang lain untuk pemodelan matematika adalah konstruksi model simulasi. Dalam pendekatan ini, program komputer dituliskan berdasarkan pada aturan-aturan. Aturan-aturan ini dipercaya untuk membentuk bagaimana suatu proses atau fenomena akan berjalan terhadap waktu dalam kehidupan nyata. Program komputer ini dijalankan terhadap waktu sehingga implikasi interaksi dari berbagai variabel dan komponen yang dikaji dan diuji.

3. Model Deterministik dan Stokastik

   Model deterministik meliputi penggunaan persamaan atau himpunan persamaan untuk mempresentasikan hubungan antara berbagai komponen (variabel) suatu sistem. Contohnya adalah persamaan diferensial biasa yang menjelaskan bagaimana suatu kualitas (yang dinyatakan oleh variabel tak bebas dari persamaan) dan waktu sebagai variabel bebas. Dalam model deterministik, variasi random diabaikan. Dengan kata lain persamaan ini digunakan untuk menyatakan problem dunia nyata yang diformulasikan berdasarkan pada hubungan dasar faktor-faktor yang terlibat dalam problem ini (Widowati, 2007).

## 2.3 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu bentuk persamaan yang memuat derivatif (turunan) satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas suatu fungsi. Banyak permasalahan dalam berbagai bidang teknik, fisika maupun bidang-bidang kehayatan yang dapat dimodelkan ke dalam bentuk persamaan diferensial. Suatu persamaan diferensial orde-$n$ adalah persamaan bentuk :

$$F(x, y', y'', y''', \dots\dots\dots\dots\dots, y^n) = 0$$

Yang menyatakan hubungan antara $x$, fungsi $y(x)$ dan turunannya $y', y'', y''' \dots, y^n$.

Misalnya :

$$y'' + 3y' + 2y - 6e^x = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$(y''')^2 - 2y'y'' + \left(y''^2\right) = 0 \qquad \text{(ii)}$$

Persamaan (i) berorde dua tetapi derajat satu. Sedangkan persamaan(ii) berorde tiga dan berderajat dua, karena adanya turunan ketiga dalam pangkat dua. Berdasarkan banyaknya variabel bebas, persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi dua macam yaitu biasa dan parsial (Lestari, 2013).

### 2.3.1 Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas suatu fungsi. Penentuan orde suatu persamaan adalah dengan melihat indeks tertinggi dari turunan yang terlibat dalam persamaannya. Sedangkan derajat adalah pangkat tertinggi dari turunn tingkat tertinggi Solusi dari persamaan diferensial biasa adalah suatu fungsi atau keluarga fungsi yang memenuhi persamaannya. Solusi persamaan diferensial biasa terbagi dua yaitu solusi umum dan solusi khusus. Solusi umum PDB adalah suatu keluarga fungsi yang memuat beberapa parameter dan memenuhi persamaannya. Sedangkan solusi khusus PDB adalah suatu fungsi yang merupakan anggota dari keluarga fungsi solusi umumnya.

Contoh :

$\frac{dy}{dt} = 100$ mempunyai solusi umum : $y = C + 100t$

Diketahui : $y_0 = 20$. Carilah solusi khususnya!

Jawab :

$$y = C + 100t$$

$$y_0 = 20$$

$$20 = C + 100 \,.\, 0$$

Jadi $C = 20$ dan solusi khusus PD adalah : $y = C + 100t$ ( Degeng, 2007).

### 2.3.2 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan parsial dengan dua atau lebih variabel bebas. Persamaan diferensial parsial dikatakan linear jika hanya memuat derajad pertama dari variabel-variabel bebasnya dan derivatif - derivatif parsialnya.

Contoh :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ab\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

adalah suatu solusi PDP dimana *u* adalah variabel dependen (yang dicari) , sedangkan *x* dan *y* adalah variabel – variabel independennya. Persamaan diatas merupakan persamaan Laplace dua dimensi (Bronson, 2007).

## 2.4 Model Pertumbuhan Populasi

Populasi adalah kumpulan individu dari suatu spesies yang sama menempati suatu tempat tertentu. Kedua kekuatan utama yang mempengaruhi pertumbuhan populasi  yaitu angka kelahiran dan angka kematian yang mana dapat diukur dan digunakan untuk memprediksi bagaimana ukuran populasi akan berubah menurut waktu. Berdasarkan dari segi waktu, model pertumbuhan populasi dapat dibagi menjadi model pertumbuhan kontinu dan model pertumbuhan diskrit. Model pertumbuhan kontinu meliputi model eksponensial dan model logistik. Sedangkan model pertumbuhan diskrit meliputi model linear homogen dan model diskrit logistik.

### 2.4.1 Model Eksponensial

Model eksponensial merupakan model pertumbuhan yang sangat sederhana. Model ini menjelaskan suatu populasi ideal dalam lingkungan yang tidak terbatas. Pada model ini individu berkembang tidak dibatasi oleh lingkungan seperti kompetisi dan keterbatasan akan suplai makanan. Laju perubahan populasi dapat dihitung jika banyaknya kelahiran, kematian dan migrasi diketahui.

Prediksi bahwa jumlah populasi akan tumbuh secara ekponensial pertama kali dicetuskan oleh Malthus (1798). Populasi yang tumbuh secara eksponensial pertama kali diamati terjadi di alam bebas. Dinamika populasi dapat di aproksimasi dengan model ini hanya untuk periode waktu yang pendek saja. Mengasumsikan bahwa laju pertumbuhan populasi terhadap waktu berbanding lurus dengan jumlah populasi yang ada.

Misalkan $N(t)$ menyatakan jumlah populasi pada saat $t$ dan diketahui bahwa jumlah populasi saat $t = 0 = t_0$ adalah $N_0$ , maka model matematikanya dapat dituliskan :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = aN \text{ ; dimana } a \text{ konstan} \tag{2.1}$$

Berikut ini adalah solusi jumlah populasi $N$ saat $t$ atau $(t)$ berdasarkan (2.1) :

$$\int \frac{\partial N}{N} = \int a \, \partial \mathrm{t}$$

$$\ln N = at + c$$

$$N(t) = e^{at+c}$$

$$N(t) = e^{at}.e^{c}$$

$$N(t) = C_1 e^{at}$$

Karena $(t_0) = N_0 = C_1 e^{a(0)} = C_1$ , maka :

$$N(t) = N_0 \, e^{a(t-t_0)} \tag{2.2}$$

Keterangan :

$a$ = daya tumbuh suatu populasi (*intrinsic growth rate*) / perbedaan antara angka kelahiran dan kematian per kapita ( $a$ = angka kelahiran tahunan perkapita – angka kematian tahunan per kapita ) / laju pertumbuhan populasi per kapita.

Persamaan (2.2) dikenal sebagai Model Eksponensial pertumbuhan populasi / Model pertumbuhan populasi Malthus.

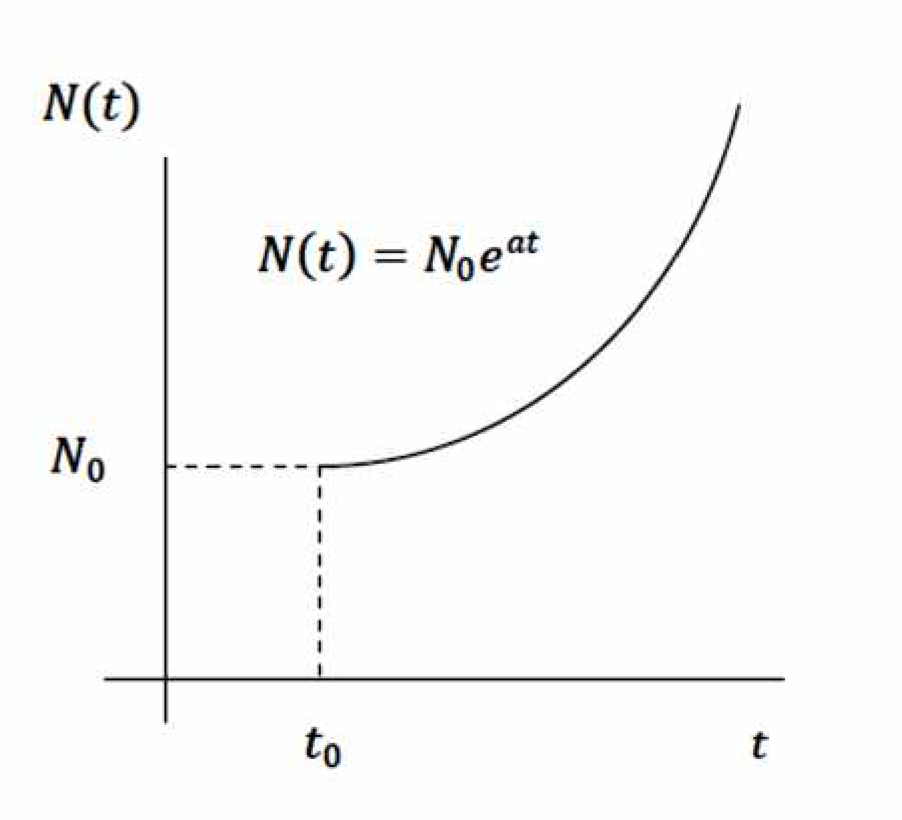
Dari (2.2) dapat diperoleh :

$$e^{a(t-t_0)} = \frac{N(t)}{No}$$

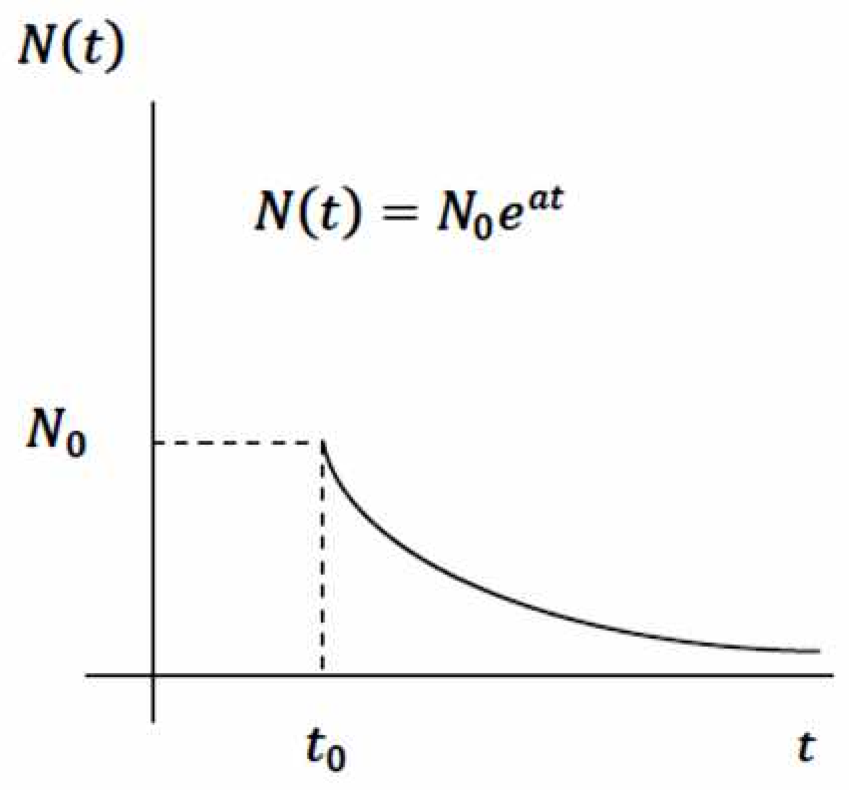
$$\ln e^{a(t-t_0)} = \ln \frac{N(t)}{No}$$

$$a = \frac{1}{(t-t_0)} \ln \frac{N(t)}{N_0} \qquad (2.3)$$

Jika solusi (2.2) ditampilkan dalam bentuk grafik, maka didapatkan dua grafik berikut :




**Gambar.2.1**
*Grafik Pertumbuhan Eksponensial*
*Grafik untuk* $a > 0$




**Gambar.2.2**

*Grafik Pertumbuhan Eksponensial*
*Grafik untuk a* $< 0$

Dari Gambar.2.1 jelas bahwa untuk $a > 0$ diperoleh $\lim_{t\to\infty}(t) = \infty$. Jika hasil ini dikaitkan dengan jumlah suatu populasi, maka akan menimbulkan pertanyaan apakah suatu populasi dapat berkembang sampai pada jumlah tak-hingga?

Gambar.2.2, untuk $a < 0$ akan didapatkan $\lim_{t\to\infty}(t) = 0$, yang mana jika dikaitkan dengan jumlah populasi nampaknya hasil ini cukup logis. Suatu populasi akan mendekati kepunahan (akan habis) jika laju pertumbuhannya negatif.

Model ini memprediksi bahwa semakin besar suatu populasi akan semakin cepat populasi tersebut tumbuh (Banks, 1994).

### 2.4.2 Model Logistik

Model ini merupakan penyempurnaan dari model eksponensial dan pertama kali diperkenalkan oleh Pierre Verhulst pada tahun 1838. Model pertumbuhan eksponensial mengasumsikan sumberdaya yang tidak terbatas. Karena solusi pada model Malthus tidak realistik, yaitu naik atau turun secara eksponensial dan juga merupakan kasus yang tidak pernah ditemukan pada dunia nyata.

Sebagai contoh yaitu untuk populasi manusia pada suatu negara, tidak mungkin pada waktu yang lama, banyaknya populasi manusia mendekati tak hingga. Karena alam memiliki keterbatasan ruang, makanan ataupun daya dukung lainnya. Para ahli ekologi mendefinisikan daya tampung (*carrying capacity*) sebagai ukuran populasi maksimum yang dapat ditampung oleh suatu lingkungan tertentu tanpa ada pertambahan atau penurunan ukuran populasi selama periode waktu yang relatif lama. Daya tampung yang disimbolkan dengan $\frac{a}{b}$ adalah ciri lingkungan, dengan demikian daya tampung bervariasi terhadap waktu dan ruang dengan keberlimpahan sumberdaya yang terbatas.

Kepadatan dan keterbatasan sumberdaya dapat mempunyai dampak yang besar pada laju pertumbuhan populasi. Jika individu tidak mendapatkan sumberdaya yang mencukupi untuk bereproduksi, angka kelahiran per kapita akan menurun. Jika mereka tidak memperoleh cukup energi untuk mempertahankan diri mereka sendiri, angka kematian per kapita akan meningkat. Suatu penurunan dalam angka kelahiran tahunan per kapita atau suatu peningkatan dalam angka kematian tahunan per kapita akan mengakibatkan laju pertumbuhan populasi yang lebih kecil.

Model ini memasukkan batas untuk populasinya sehingga jumlah populasi dengan model ini tidak akan tumbuh secara tak terhingga. Laju pertumbuhan populasi akan terbatas akan ketersediaan makanan, tempat tinggal, dan sumber hidup lainnya. Dengan asumsi tersebut, jumlah populasi dengan model ini akan selalu terbatas pada suatu nilai tertentu. Pada masa tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan (*equilibrium*), pada titik ini jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama.

Verhulst menunjukkan bahwa pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada ukuran populasi tetapi juga pada sejauh mana ukuran ini dari batas atasnya seperti daya tampung. Dia memodifikasi model Malthus (eksponensial) untuk membuat ukuran populasi sesuai baik untuk populasi sebelumnya dengan syarat $\frac{a-bN}{a}$, $a$ dan $b$ disebut koefisien vital dari populasi.

Suatu model logistik diawali dengan model pertumbuhan eksponensial dan menciptakan suatu ekspresi yang mengurangi nilai $a$ ketika $N$ meningkat. Jika ukuran populasi maksimum yang dapat dipertahankan adalah $\frac{a}{b}$, maka $(\frac{a}{b} - N)$ akan memberikan petunjuk berapa banyak individu tambahan yang dapat ditampung oleh lingkungan tersebut, dan $\left(\frac{\frac{a}{b}-N}{\frac{a}{b}}\right) = \left(\frac{a-bN}{a}\right)$ memberikan petunjuk berapa fraksi $\frac{a}{b}$ yang masih tersedia untuk pertumbuhan populasi.

Persamaan yang telah dimodifikasi menggunakan syarat baru adalah :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = aN\left(\frac{a-bN}{a}\right) = \frac{a^2 N - abN^2}{a} = aN - bN^2 \tag{2.4}$$

Dengan :

a : Laju pertumbuhan intrinsik

b : Pengaruh dari peningkatan kepadatan populasi

N : Jumlah populasi

$\frac{a}{b}$ : *Carrying capacity*

Solusi eksplisit persamaan logistik Verhulst dapat diperoleh jika model persamaan tersebut merupakan persamaan terpisah. Jadi dari persamaan (2.4) dapat dilakukan pemisahan variabel menjadi :

$$\int \frac{1}{aN - bN^2} dN = \int \frac{1}{a}\left(\frac{1}{N} + \frac{b}{a - bN}\right) dN$$

Diperoleh :

$$N(t) = \frac{\frac{a}{b}}{1+\left(\frac{\frac{a}{b}}{N_0} - 1\right) e^{-at}} \qquad (2.5)$$

Persamaan (2.5) ini dikenal sebagai Model Pertumbuhan Logistik/Verhulst.

Jika persamaan dilimitkan $t \to \infty$ , didapatkan (untuk $a > 0$) :

$$N_{max} = \lim_{t\to\infty} N = \frac{a}{b} \qquad (2.6)$$

(Bacaer, 2011).

### 2.4.3 Ragam Model Logistik

Matematikawan Verhulst memodifikasi pertumbuhan ekponensial dari Malthus dengan mengganti $\frac{dN}{dt} = KN$ , dengan $\frac{dN}{dt} = (a - bN)N$ untuk mendapatkan persamaan yang logisitik. Persamaan logistik tidak hanya berlaku untuk populasi manusia tetapi juga untuk populasi ikan, hewan dan tumbuhan seperti ragi, jamur atau bunga liar.

Berikut adalah beberapa varian model logistik yang dasar yang dikenal untuk penelitian dibidang kesehatan , biologi dan ekologi :

- Lingkungan terbatas

Populasi *N(t)* dari lalat mempunyai *carrying capacity* (daya dukung) *M* serangga. Model pertumbuhan logistiknya adalah $\frac{dN}{dt} = KN$ , dengan gabungan laju pertumbuhan dan kematian $K = k(M - N)$ sehingga modelnya menjadi $\frac{dN}{dt} = k(M - N)N$.

- Penyebaran penyakit

Ukuran awal dari populasi rentan adalah *M*. Maka *N* dan *M* – *N* merupakan jumlah infektif dan populasi rentan. Kesempatan penyebaran penyakit yang tidak dapat disembuhkan dengan laju populasi sebanding dengan infektif dan populasi rentannya. Modelnya adalah $\frac{dN}{dt} = KN(M - N)$.

- Ledakan- kepunahan

Jumlah *N (t)* dari populasi buaya di rawa memenuhi $\frac{dN}{dt} = KN$, dimana konstanta kelahiran dan kematiannya *K* proporsional ke *N* – *M* dan *M* adalah *thresold population* atau ambang batas populasi. Model logistiknya $\frac{dN}{dt} = K(N - M)N$

menyebabkan kepunahan populasi awal lebih kecil daripada *M* dan ledakan populasi berakhir $N(t) \to \infty$ untuk populasi awal lebih besar dari *M*. Model ini mengabaikan pemanenan.

- Konstanta panen

Jumlah populasi *N (t)* ikan di danau dapat dipenuhi dengan model logistik $\frac{dN}{dt} = (a - bN)N - h$. Asalkan ikan dipanen pada tingkat konstanta $h > 0$. Model ini dapat ditulis $\frac{dN}{dt} = k(P - y)(y - M)$ untuk laju pemanenan yang sedikit, dimana *P* adalah daya dukung dan *M* adalah ambang batas populasi.

- Pemanenan variabel

Model logistik khusus pemanenan variabel adalah $\frac{dN}{dt} = (a - bN)(N - hN)$. Hasil panen pada laju non-konstan sebanding dengan laju populasi pada saat *N*. Akibatnya adalah untuk menurunkan laju pertumbuhan alamiah *a* dengan tingkatan konstanta *h* pada model logistik biasa.

- *Restocking*

Persamaan $\frac{dN}{dt} = (a - bN)N - h \sin \omega t$ memodelkan populasi logistik yang dipanen secara berkala dan diisi kembali dengan laju maksimal $h > 0$. Periodenya adalah $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Model persamaan ini mungkin punah untuk stok yang kurang dari beberapa ambang batas populasi $N_0$. Dan sebaliknya populasi stabil yang berosilasi tentang daya dukung ideal $\frac{a}{b}$ dengan periode *T*.

## 2.5 Titik Infleksi

Titik infleksi adalah titik berhentinya sejenak suatu kenaikan atau penurunan. Sebuah titik dikatakan titik belok dari sebuah fungsi jika fungsi tersebut berubah dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah. Titik infleksi juga dikenal dengan titik sadel, karena lengkungan di sekitar titik infleksi mirip sadel pada grafik. Titik infleksi dicirikan oleh turunan pertama dan kedua fungsi pada titik itu yang sama dengan nol. Di dalam ilmu lingkungan, titik infleksi dimaksudkan sebagai titik belok dan lazim digunakan untuk menurunkan suatu pertumbuhan. Titik belok di dalam matematika dicirikan oleh tak sinambungnya turunan pertama. Pertumbuhan suatu populasi yang dipengaruhi oleh keterbatasan lingkungan akaan mengikuti kurva sigmoid, kurva S atau kurva logistik. Pertumbuhan populasi mempunyai titik infleksi ketika $N = \frac{1}{2}$ *carrying capacity*.

Pada saat inilah, pertumbuhan populasi secara nyata mulai mengalami penurunan, sehingga tidak lagi mengikuti pola kurva S seperti semula. Jadi titik infleksinya adalah saat pertumbuhan populasi mulai menurun secara nyata, sehingga pertumbuhan menunjukkan pola logistik. Ketahanan lingkungan juga dapat dianggap sebagai akibat kompetisi intraspesifik (antara jenis yang sama) pada suatu populasi.

## 2.6 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Misalkan suatu sistem persamaan diferensial dinyatakan sebagai berikut :

$$\dot{x} = f'(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Titik $x \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan (titik equilibrium) jika $f'(x) = 0$ (Perko, 1991).

Titik ekuilibrium $x \in \mathbb{R}^n$ dikatakan ,

(1) Stabil lokal jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$sedemikian hingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - x\| < \delta$ berlaku $\|x(t) - x\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.

(2) Stabil asimtotik lokal jika titik ekuilibrium $x \in \mathbb{R}^n$ stabil dan terdapat $\delta_0 > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - x\| < \delta_0$ berlaku $\lim_{t\to\infty} x(t) = x$.

(3) Tidak stabil jika titik ekuilibrium $x \in \mathbb{R}^n$ tidak memenuhi (1)

(Wiggins, 2003).

# III. METODOLOGI PENELITIAN

## 3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada semester genap tahun akademik 2016-2017.

## 3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian literatur yaitu buku-buku dan jurnal *online* matematika sebagai penunjang berkaitan dengan persamaan logistik pertumbuhan populasi (model Verhulst).

Dalam menyelesaikan tugas akhir ini, dilakukan dengan beberapa langkah, sebagai berikut :

1. Menentukan model yang akan digunakan dalam penelitian ini.
2. Melakukan penurunan rumus untuk memperoleh solusi analitik dari model yang dipilih.
3. Meng-aplikasikan model yang dipilih ke pertumbuhan populasi ikan lele.
4. Menyajikan model pertumbuhan Verhulst ke dalam bentuk grafik.
5. Menganalisis kestabilan pertumbuhan populasi ikan lele dengan model Verhulst.

# V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan, maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Dari model logistik pada pemanenan ikan diperoleh solusi analitik yaitu

$$N(t) = \frac{P_2 - P_1\left(\frac{N_0 - P_2}{N_0 - P_1}\right)e^{a(P_2 - P_1)t}}{1 - \left(\frac{N_0 - P_2}{N_0 - P_1}\right)e^{a(P_2 - P_1)t}}$$

2. Apabila solusi analitik dari model logistik dengan konstanta panen kita limitkan menuju tak hingga, maka diperoleh *carrying capacity* atau kapasitas maksimum populasi pada saat $P_2$ .
3. Titik infleksi atau titik belok dari pertumbuhan populasi ikan lele ketika populasi awal 1450 kg adalah setengah dari *carrying capacity* yaitu 1250 kg.
4. Pada model pertumbuhan populasi Verhulst dengan konstanta panen diperoleh dua titik tetap. Tetapi hanya satu titik yang stabil yaitu pada saat jumlah populasi sama dengan daya dukung lingkungannya. Hal ini berarti bahwa populasi akan selalu menuju daya dukung lingkungannya. Ketika populasi awalnya sama dengan daya dukung lingkungannya, maka populasi akan tetap konstan

   Ketika populasi awalnya kurang dari daya dukung lingkungannya, maka populasi akan meningkat menuju daya dukung lingkungannya. Dan ketika populasi awalnya lebih daya dukung lingkunganya, maka populasi akan semakin menurun dan menuju daya dukung lingkungannya

5. Apabila jumlah populasi awal lebih kecil dari ambang batas , maka pemanenan tidak dapat dilakukan.

# DAFTAR PUSTAKA


Bacaer, N. 1977. A Short History of Mathematical Population Dynamics. Verlag Berlin Heidelberg, New York.

Bambang S, 1989. *Pengantar Model Matematika.* Universitas Gajah Mada. Yogyakarta.

Banks, R.B. 1994. Growth and Diffusion Phenomena: Mathematical Frameworks and Applications. Verlag Berlin Heidelberg, New York.

Bronson, Richard dan Gabriel B.Costa. 2007. *Persamaan Diferensial Edisi ketiga.* Erlangga . Jakarta.

Degeng, I..W.2007. *Kalkulus Lanjut Persamaan Diferensial dan Aplikasinya* Graha Ilmu. Yogyakarta.

Giordano, F.R.,Weir, M.D. , and Foox, W.P,. 1977, A First Course in Mathematical Modelling . Thomson Books/Cole. Australia.

Khairuman dan Khairul Amri. 2008. *Budiddaya Lele Lokal Secara Intensif.* Agromedia Pustaka. Jakarta.

Lestari, Dwi. 2013. *Diktat Persamaan Diferensial dan Aplikasinya.* Graha Ilmu. Yogyakarta.

Nasrudin.2010. *Jurus Sukses Beternak Lele Sangkuriang.* Agromedia Pustaka. Jakarta.

Perko, L. 1991. Differential Equation and Dynamical System. Verlag Berlin Heidelberg .New York.

Prihartono,R.E., Juansyah Rasyidik dan Usni Arie.2003. *Mengatasi Permasalahan Budidaya Lele Dumbo.* Penebar Swadaya. Jakarta.

Sutimin, Fitria Rakhmawati. 2006. *Model Pemanenan Logistik dengan Daya Dukung Bergantung Pada Waktu pada Budidaya Rumput Laut.* Hlm.43-49. Prosiding SPMIPA. Universitas Diponegoro

Sutrisno. 2007. *Budidaya Lele Kampung dan Lele Dumbo.* Ganeca Exact. Bandung.

Suyanto, R. 2006. *Budidaya Ikan Lele.* Penebar Swadaya. Jakarta.

Widowati dan Sutimin. 2007. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Universitas Diponegoro. Semarang.

Wiggin, S. 2003. Introduction to Applied Non Linear Dynamical System and Chaos. Second Edition. Verlag Berlin Heidelberg. New York.

Zulkarnaen, D. 2014. *Proyeksi Populasi Penduduk Kota Bandung Menggunakan Model Pertumbuhan Populasi Verhulst dengan Memvariasikan Interval Pengambilan Sampel.* Universitas Islam Negeri Sunan Gunung Jati, Bandung. Volume VIII No. 1.