REPRESENTASI OPERATOR LINIER PADA RUANG BARISAN l_4

Oleh

ARTHA KURNIA ALAM

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2017

ABSTRACT

REPRESENTATION OF LINEAR OPERATOR IN FINITE SEQUENCE SPACE l_4

by

Artha Kurnia Alam

The mapping of vector space especially on norm space is called operator. There are many cases in linear operator from sequence space into sequence space can be represented by an infinite matrices. For example, a matrices $A : l_4 \to l_4$ where $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ and $l_4 = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^4)^{\frac{1}{4}} < \infty \right\}$ is a sequence real numbers. Furthermore, it can be constructed an operator A from sequence space l_4 to sequence space l_4 by using a standard basis (e_k) and it can be proven that the collection all the operators become Banach space.

Key Words : *Operator, finite sequence space*

ABSTRAK

REPRESENTASI OPERATOR LINIER PADA RUANG BARISAN l_4

oleh

Artha Kurnia Alam

Suatu pemetaan pada ruang vektor khususnya ruang bernorma disebut operator. Banyak kasus pada operator linier dari ruang barisan ke ruang barisan dapat diwakili oleh suatu matriks tak hingga. Sebagai contoh, suatu matriks $A : l_4 \to l_4$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ and $l_4 = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^4)^{\frac{1}{4}} < \infty \right\}$ merupakan barisan bilangan real. Selanjutnya, dikonstruksikan operator A dari ruang barisan l_4 ke ruang barisan l_4 dengan basis standar (e_k) dan ditunjukan bahwa koleksi semua operator membentuk ruang Banach.

Kata Kunci : *Operator, Ruang Barisan Terbatas*

REPRESENTASI OPERATOR LINIER PADA RUANG BARISAN l_4

Oleh

ARTHA KURNIA ALAM

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Skripsi : **REPRESENTASI OPERATOR LINIER PADA RUANG BARISAN l_4**

Nama Mahasiswa : *Artha Kurnia Alam*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1317031010

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.	**Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**
NIP 19720227 199802 1 001	NIP 19610128 198811 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dra. Wamiliana, M.A, Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** .....

Sekretaris : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.** .....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Amanto, S.Si, M.Si.** .....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **18 Agustus 2017**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"Representasi Operator Linier Pada Ruang Barisan l_4"** merupakan hasil karya saya sendiri dan bukan hasil karya orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Agustus 2017

Penulis

METERAI TEMPEL D6FA4ADF625673864 6000 ENAM RIBU RUPIAH

Artha Kurnia Alam

NPM. 1317031010

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Artha Kurnia Alam, anak pertama dari lima bersaudara yang dilahirkan di Kotabumi pada tanggal 6 Maret 1995 oleh pasangan Bapak Mukaddam dan Ibu Ernawati.

Penulis menempuh pendidikan di Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SD Islam Ibnurusyd Kotabumi pada tahun 2001 - 2007, kemudian bersekolah di SMP Negeri 1 Kotabumi pada tahun 2007 - 2010, dan bersekolah di SMA Negeri 3 Kotabumi pada tahun 2010 - 2013.

Pada tahun 2013 penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN.

Pada tahun 2014 - 2015 penulis dipercaya menjadi Ketua Bidang Kaderisasi dan Kepemimpinan Himatika Unila, dan pada tahun 2015 - 2016 penulis dipercaya menjadi Ketua Umum Himatika Unila.

Pada tahun 2016 penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di UPT Laboratorium Dinas Bina Marga Provinsi Lampung, dan pada tahun yang sama penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) Kebangsaan di Desa Selat Mendaun, Kabupaten Karimun, Provinsi Kepulauan Riau.

Kata Inspirasi

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"
(QS. Alam Nasyroh : 5-6)

"tidak ada hal yang "tidak mungkin" untuk diwujudkan,
yang ada hanyalah "tidak ingin"."

"Orang yang paling bahagia di dunia ini adalah orang yang
senantiasa bersyukur dalam segala keadaan,
dan menyadari betapa berharganya hidup yang diberikan padanya."

"Anda mungkin bisa menunda, tapi waktu tidak akan menunggu"
(Benjamin Franklin)

Jangan Dulu Lelah, Karena Kita Baru Melangkah
(Artha Kurnia Alam)

Dengan mengucapkan Alhamdulillah,
Puji dan syukur kepada Allah Subhanahu Wata'ala atas segala nikmat dan karunia-Nya, dan suri tauladan Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam yang menjadi contoh dan panutan untuk kita semua.

Kupersembahkan sebuah karya sederhana ini untuk:

Ayahanda Mukaddam dan Ibunda Ernawati
Terimakasih atas limpahan kasih sayang, pengorbanan, doa, dan seluruh motivasi di setiap langkahku. Karena atas doa dan ridho kalian, Allah memudahkan tiap perjalanan hidup ini.
Terimalah bukti kecil ini sebagai kado keseriusanku untuk membalas semua pengorbanan, keikhlasan, dan jerih payah yang selama ini kalian lakukan.

Adik-adikku Tercinta
Agata Cahyati Aini
Anandipa Muhaimin
Adipa Mukromin (Alm)
Tsarwah Intinan Is'ad Putri
Semoga apa yang telah abangmu lakukan selalu bisa menjadi contoh dan motivasi untuk kalian.

Adikku Annisa'ul Mufidah
Terimakasih karena selalu mendukung dan memotivasi setiap perjuangan yang kulakukan.

Almamaterku Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan atas kehadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga dapat terselesaikannya skripsi dengan judul **"Representasi Operator Linier Pada Ruang Barisan l_4"**.

Terselesaikannya skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, kerjasama, dan dukungan berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si., selaku pembimbing I yang telah memberikan arahan, bimbingan, ide, kritik dan saran kepada penulis selama proses pembuatan skripsi ini.
2. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si., selaku pembimbing II yang telah memberikan arahan, dukungan, serta semangat kepada penulis.
3. Bapak Amanto, S.Si, M.Si., selaku penguji yang telah memberikan ide, kritik dan saran sehingga terselesainya skripsi ini.
4. Bapak Drs. Mustofa Usman, M.A., Ph.D., selaku Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis dalam menyelesaikan permasalahan seputar akademik.
5. Ibu Dra. Wamiliana, M.A, Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

7. Seluruh Dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
8. Papah, Mamah dan keluarga yang selalu mengiringi langkah penulis dengan do'a dan nasihat untuk selalu berjuang setiap harinya.
9. Teman-teman Matematika 2013, Adik-adik Matematika 2014 serta Abang dan Yunda Matematika 2012 yang selalu memberikan semangat, ide dan saran kepada penulis.
10. Keluarga besar HIMATIKA FMIPA UNILA.
11. Annisaul Mufidah yang selalu memberi semangat, motivasi, dan doa serta tak pernah bosan mendengar keluh kesah penulis.
12. Rekan-rekan seperjuangan sampah kontrakan.
13. Sahabat-sahabat penulis Rio, Onal, Suri, Tiwi, Karina, Erlina, Putri, Rahma, Meta, Ani, Bintang, Rieo, Mardiah, Yuriska yang senantiasa menemani suka duka penulis.
14. Rekan-rekan tangguh Citra, Irfan, Nando, Young, Wahid, Apredi, Yuki, Risa, Shintia, Tina, Dela, Suci, Retno, Eka, Hanifah, Nafisah yang selalu membantu penulis dalam segala keadaan.
15. Rekan-rekan tim Penikmat Traveling Yuda, Nando, Aldo, Iqbal, Fandi, Fajar yang telah menjadi partner kerja yang baik.
16. Teman-teman KKN Kebangsaan 2016 Desa Selat Mendaun.
17. Semua pihak yang terlibat dalam penyelesaian skripsi ini.

Tentunya, Penulis menyadari bahwa masih ada kekurangan dari skripsi ini, akan tetapi besar harapan semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Sekian dan terimakasih.

Bandar Lampung, Agusutus 2017
Penulis

Artha Kurnia Alam

DAFTAR ISI

Halaman

I. PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang dan Masalah 1
1.2 Tujuan 2
1.3 Manfaat 2

II. TINJAUAN PUSTAKA
2.1 Operator 4
2.2 Ruang Vektor 12
2.3 Ruang Bernorma..... 13
2.4 Ruang Banach..... 14
2.5 Barisan..... 14
2.6 Basis 20

III. METODOLOGI PENELITIAN
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 22
3.2 Metode Penelitian 22

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN
Definisi 4.1.4..... 25
Teorema 4.1.5 25
Teorema 4.1.6 30
Contoh 4.1.7..... 31

V. KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Salah satu kajian tentang operator, dalam hal ini operator linear, merupakan suatu operator yang bekerja pada ruang barisan. Banyak kasus pada operator linear dari ruang barisan ke ruang barisan dapat diwakili oleh suatu matriks tak hingga. Matriks tak hingga yaitu suatu matriks berukuran tak hingga kali tak hingga.

Suatu barisan yang mempunyai limit dinamakan barisan konvergen dan barisan yang tak konvergen dinamakan barisan divergen. Untuk setiap bilangan *real p* dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l_p = \left\{ x \in \{x_j\} \in \omega : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}$$

Sebagai contoh, suatu matriks $A : l_4 \to l_4$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ dan

$l_4 = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^4)^{\frac{1}{4}} < \infty \right\}$ merupakan barisan bilangan real.

Jika $x = (x_i) \square l_4$ maka

$$A(x) = Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Sehingga timbul permasalahan, syarat apa yang harus dipenuhi supaya $A(x) \in l_4$. Berdasarkan penelitian-penelitian yang sejenis, sebelumnya telah diteliti oleh peneliti lain tentang repesentasi operator linear pada ruang barisan berbatas l_2 dan l_3 namun untuk l_4 belum diteliti. Oleh karena itu, penelitian ini akan mencari syarat apa yang harus dipenuhi supaya $A(x) \in l_4$.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini diantaranya :

1. Mengkaji dan mempelajari ruang barisan terbatas l_4 beserta sifat-sifat operator linear yang bekerja pada ruang barisan terbatas l_4.
2. Mencari representasi operator linear pada ruang barisan terbatas l_4.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian tentang representasi operator linear pada ruang barisan l_4 ini, diantaranya :

1. Memahami sifat dan masalah operator linear pada ruang barisan terbatas l_4.
2. Mengetahui aplikasi dari operator linear pada ruang barisan terbatas l_4.
3. Dapat memberi ide bagi penulis lain yang ingin meneliti lebih lanjut tentang operator.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Operator

Definisi 2.1.1

Operator adalah suatu pemetaan pada ruang vektor khususnya ruang bernorma. (Kreyszig, 1989)

Definisi 2.1.2

Diberikan ruang Bernorm X dan Y atas *field* yang sama. (Kreyszig, 1989)

a. Pemetaan dari X dan Y disebut operator.
b. Operator A : X → Y dikatakan linear jika untuk setiap x, y □ X dan setiap skalar α berlaku A(αx) = αAx dan A(x + y) = Ax + Ay.

Definisi 2.1.3

Diberikan $(X, \|.\|)$ dan $(Y, \|.\|)$ masing-masing ruang bernorm. (Kreyszig, 1989)

a. Operaror A : X → Y dikatakan terbatas jika ada bilangan M □ R dengan M ≥ 0 sehingga untuk setiap x □ X berlaku $\|Ax\| \geq M\|x\|$.
b. Operator A dikatakan kontinu di x □ X jika diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$sehingga untuk setiap y □ X dengan $\|x - y\| \leq \delta$ berlaku $\|Ax - Ay\| \leq \varepsilon$.

c. Jika A kontinu di setiap $x \in X$, A disebut kontinu pada X.

Teorema 2.1.4

Jika X dan Y masing-masing ruang Bernorm atas *field* yang sama maka $l_c(X, Y)$ merupakan ruang *linear*. (Ruckle, 1991)

Bukti :

Diambil sebarang $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$ dan sebarang α, β, a, b untuk setiap $x, y \in X$ diperoleh

$$(\alpha A + \beta B)(ax + by) = \alpha A(ax + by) + \beta B(ax + by)$$

$$= \alpha Aax + \alpha Aby + \beta Bax + \beta Bby$$

$$= \alpha aAx\ \alpha bAy + \beta aBx + \beta bBy$$

$$= \alpha aAx + a\beta Bx + b\alpha Ay + b\beta By$$

$$= a(\alpha A + \beta B)x + b(\alpha A + \beta B)y$$

Jadi, $(\alpha A + \beta B)$ merupakan operator linear.

Karena A dan B terbatas maka ada bilangan real $M_1, M_2 \geq 0$ sehingga,

$$\|(\alpha A + \beta B)x\| = \|\alpha Ax + \beta Bx\|$$

$$\leq \|\alpha Ax\| + \|\beta Bx\|$$

$$= |\alpha|\|Ax\| + |\beta|\|Bx\|$$

$$\leq |\alpha|M_1\|x\| + |\beta|M_2\|x\|$$

$$= (|\alpha|M_1 + |\beta|M_2)\|x\|$$

Dengan demikian, $\alpha A + \beta B$ terbatas (kontinu).

Jadi $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$

Telah dibuktikan bahwa untuk setiap $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$ dan sebarang skalar α, β berlaku $A, B \in \mathcal{L}_c(X, Y)$. Jadi $\mathcal{L}_c(X, Y)$ linear.

Teorema 2.1.5

Jika Y ruang Banach maka $\mathcal{L}_c((X, Y), \|.\|)$ ruang Banach. (Maddox, 1970)

Bukti :

Diambil sebarang barisan Cauchy $\{A_i\} \subset \mathcal{L}_c((X, Y), \|.\|)$.

Jadi untuk setiap bilangan ε_0 terdapat $n_0 \in N$ sehingga jika $m, n \in N$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku $\|A_m - A_n\| < \varepsilon_0$.

Misal, untuk setiap $x \in X$ dan $m, n \geq n_0$ diperoleh

$$\|A_m x - A_n x\| = \|(A_m - A_n)x\|$$

$$\leq \|A_m - A_n\|\|x\| < \varepsilon_0\|x\|$$

Jelas untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (dapat dipilh bilangan $\varepsilon_0 > 0$ sehingga $\varepsilon_0 \|x\| < \varepsilon$ ada $n_0 \in N$ sehingga untuk setiap $m, n \in N$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku $\|A_m x - A_n x\| < \varepsilon_0\|x\| < \varepsilon$.

Dengan demikian diperoleh barisan Cauchy $\{A_i x\} \subset Y$ dan Y lengkap, dengan kata lain $\{A_i x\}$ konvergen ke $y_x \in Y$.

Jadi, $\lim_{n\to\infty} A_n x = y_x$ dan x menentukan suatu operator A sehingga $A_x = y_x$.

Proses di atas dapat diulang untuk $z \in X$ tetap, dengan $z \neq x$. Jadi diperoleh $\lim_{n\to\infty} A_n z = y_z$ dan z menentukan suatu operator A sehingga $A_z = y_z$.

Untuk setiap skalar a dan b, diperoleh $ax + bz \in X$,

$\lim_{n\to\infty} A_n(ax + bz) = y_{ax+bz}$ dan $ax + bz$ menentukan suatu operator A sehingga $A_n(ax + bz) = y_{ax+bz}$.

Jadi$A(ax + bz) = lim_{n\to\infty} A_n(ax + bz)$

$$= \lim_{n\to\infty} (aA_n x + bA_n z)$$

$$= \lim_{n\to\infty} aA_n x + \lim_{n\to\infty} bA_n z$$

$$= a \lim_{n\to\infty} A_n x + b \lim_{n\to\infty} A_n z$$

$$= ay_x + by_z$$

$$= aAx + bAz$$

Jadi operator A bersifat linear.

Untuk $n \to \infty$ diperoleh

$$\|(A_m - A_n)x\| = \|A_m x - Ax \quad \|$$

$$= \|(A_m x - Ax)\|$$

$$= \|(A_m - A)x\| < \varepsilon_0 \|x\|$$

Jadi operator $(A_m - A)$ dengan $m \geq n_0$ bersifat linear terbatas.

Karena A_m dan $A_m - A$ masing-masing terbatas, serta $A = A_m - (A_m - A)$ maka A terbatas (kontinu).

Jadi $A \in \mathcal{L}_c((X, Y), \|.\|)$ dengan kata lain $\mathcal{L}_c((X, Y), \|.\|)$ ruang Banach.

Definisi 2.1.6

Diberikan ruang Bernorm X dengan *field* $\mathbb{R}$. (Kreyszig, 1989)

a. Pemetaan $f: X \to \mathbb{R}$ disebut fungsi.
b. Himpunan semua fungsi *linear* kontinu pada X disebut ruang dual X, biasanya ditulis $X^* \in l_c(X, Y)$.

Teorema 2.1.7

Misal X dan Y ruang BK (Banach lengkap). Jika A matriks tak hingga yang memetakan X ke Y maka A kontinu. (Ruckle, 1991)

Bukti :

Misal A = (a_{ij})

X = $(x_j) \in X$

y = (y_i) □ Y dapat dinyatakan

$$y_i = \sum_{j=i}^{\infty} a_{ij} x_j$$

Mendefinisikan suatu fungsi linear kontinu pada X. Jelas bahwa untuk setiap :

$$f_m(x) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j$$

Misal $s = (s_j)$, $t = (t_j)$ dan $\alpha \in R$

$$f_m(s) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}s_j \; f_m(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}t_j$$

$$(i) f_m(s) + f_m(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}s_j + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}t_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (a_{ij}s_j + a_{ij}t_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(s_j + t_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(s + t)_j$$

$$= f_m(s + t)$$

$$(ii)(f_m)(ax) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(a_{xj})$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a\left(a_{ij}x_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j$$

$$= a(f_m(x))$$

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti f_m merupakan fungsi linear pada X.

Selanjutnya akan ditunjukkan f_m kontinu pada X.

Hal ini sama saja membuktikan f_m terbatas pada X.

Diketahui X ruang BK maka terdapat M > 0 sehingga $|P(x)| = |x_k| \leq M$

Oleh karena itu :

$$|f_m(x)| = \left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}||x_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|M$$

Berdasarkan pembuktian di atas, f_m mendefinisikan fungsi linear kontinu pada *x*

$$f_m(x) = \lim_{n \to \infty} f_m(x)$$

Maka *f* juga kontinu pada *x*.

Karena *y* ruang BK diperoleh

$$y_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j^{(n)}$$

Atau

$$Ax^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{2} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} x_j^{(n)} \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} x_j^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$y_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j^{(n)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} f\left(x^{(n)}\right)$$

$$= f(x)$$

$$A(x)_i \, , \square_i$$

Jika $y = Ax$ maka bukti lengkap

Definisi 2.1.8

a. Matriks takhingga $A = (a_{ij})$ adalah matriks dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$ dan elemen pada baris dan kolom sebanyak takhingga. (Berberian, 1996)

b. Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ masing-masing matriks takhingga dan α skalar maka $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right), \alpha A = \left(\alpha a_{ij}\right)$, dan $AB = (\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj})$ dengan $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj} \in R$, (Cooke, 1955)

Definisi 2.1.9

Diketahui suatu operator $T \in B(H_1, H_2)$ maka $T^* \in B(H_1, H_2)$ disebut operator adjoint operator T jika untuk setiap $x \in H_1$ dan $y \in H_2$ berlaku $(Tx, y) = (x, T^*y)$. (Fuhrmann, 1987)

2.2 Ruang Vektor

Definisi 2.2.1

Ruang vektor adalah suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi dengan fungsi penjumlahan $(+): X \times X \to X$ dan fungsi perkalian skalar $(\cdot): F \times X \to X$ sehingga untuk setiap skalar λ, μ dengan elemen $x, y, z \in X$ berlaku :

i. $x + y = y + x$

ii. $(x + y) + z = x + (y + z)$

iii. ada $\theta \in X$ sehingga $x + \theta = x$

iv. ada $-x \in x$ sehingga $x + (-x) = \theta$

v. $1 \cdot x = x$

vi. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda x$

vii. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

viii. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$. (Maddox, 1970)

2.3 Ruang Bernorma

Definisi 2.3.1

Diberikan ruang linear X. Fungsi $x \in X \rightarrow \|x\| \square R$ yang mempunyai sifat-sifat :

i. $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \square X$

ii. $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)

iii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \square \|x\|$ untuk setiap skalar α dan $x \in X$.

iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \square X$

disebut norma(*norm*) pada X dan bilangan nonnegatif $\|x\|$ disebut norma vektor x. Ruang linear X yang dilengkapi dengan suatu norma $\|\cdot\|$ disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $X, \|\cdot\|$ atau X saja asalkan normanya telah diketahui. (Darmawijaya, 1970)

Lemma 2.3.2

Dalam ruang linier bernorm X berlaku $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ untuk setiap $x, y \square X$. (Maddox, 1970)

Bukti :

untuk setiap $x, y \in X$ diperoleh :

$$\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \leq \|x - y\| + \|y\| - \|y\| = \|x - y\|.$$

2.4 Ruang Banach

Definisi 2.4.1

Ruang Banach (*Banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap) jika dalam suatu ruang bernorm X berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di X adalah konvergen. (Darmawijaya, 2007)

2.5 Barisan

Definisi 2.5.1

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan bulat positif. Misal terdapat bilangan bulat positif 1, 2, 3,...,n,... yang bersesuaian dengan bilangan real x_n tertentu, maka x_1, x_2,...,x_n,... dikatakan barisan. (Mizrahi dan Sulivan, 1982)

Definisi 2.5.2

Bilangan-bilangan $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ disebut barisan bilangan tak hingga c_n disebut suku umum dari barisan. Bilangan n, (n = 1, 2, 3,...) adalah nomor urut atau indeks yang menunjukkan letak bilangan tersebut dalam barisan. (Yahya, Suryadi, Agus, 1990)

Definisi 2.5.3

Misal L adalah suatu bilangan real dan $\{x_n\}$ suatu barisan, $\{x_n\}$ konvergen ke L jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan asli N, sehingga $|x_n - L| < \varepsilon$ untuk setiap $n > N$

Suatu bilangan L dikatakan limit dari suatu barisan takhingga $x_1, x_2, \ldots$ jika ada bilangan real positif ε sehingga dapat ditemukan bilangan asli N yang tergantung pada ε sehingga $|x_n - L| < \varepsilon$ untuk setiap $n > N$, daan suatu barisan dikatakan konvergen jika ia mempunyai nilai limit. (Mizrahi dan Sulivan, 1982)

Teorema 2.5.4

Setiap barisan bilangan real yang konvergen selalu terbatas. (Martono, 1984)

Bukti :

Misalkan barisan bilangan real $\{a_n\}$ konvergen ke a, akan ditunjukkan terdapat suatu bilangan real $M > 0$ sehinga $|a_n| \leq M$ untuk setiap $n \in N$. Karena $\{a_n\}$ konvergen ke a, maka terapat suatu $n_0 \in N$ sehingga $n > n_0 \Longrightarrow |a_n - a| < 1$. Akibatnya $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ untuk setiap $n > n_0$.

Ambillah $M = maks(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |a| + 1)$, maka setiap $n \in M$ berlaku $|a_n| \leq M$, yang berarti bahwa barisan bilangan real $\{a_n\}$ terbatas.

Definisi 2.5.5

Suatu barisan $x = (x_n)$ dikatakan terbatas jika dan hanya jika terdapat suatu bilangan $M \geq 0$ sehingga $|x_n| \leq M \; \forall n \in N$. Himpunan dari semua barisan terbatas dilambangkan dengan l_∞. (Maddox, 1970)

Definisi 2.5.6

Suatu barisan $\{x_n\}$ dikatakan mempunyai limit L bila untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dapat dicari suatu nomor indeks n_0 sedemikian sehingga untuk $n \geq n_0$ berlaku

$L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$ (atau $|x_n - L| < \varepsilon$) artinya jika L adalah limit dari $\{x_n\}$ maka x_n mendekati L jika n mendekati takhingga. (Yahya, Suryadi, Agus, 1990)

Definisi 2.5.7

Suatu barisan yang mempunyai limit dinamakan barisan konvergen dan barisan yang tak konvergen dinamakan barisan divergen. (Martono, 1984)

Definisi 2.5.8

Diberikan ω yaitu koleksi semua barisan bilangan *real*. (Soeparna, 2007)

jadi :

$$\omega = \{\bar{x} = \{x_k\}: x_k \in \mathbb{R}\}$$

a. Untuk setiap bilangan *real* p dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l_p = \left\{ x \in \{x_j\} \subset \omega: \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}$$

dan norm pada l_p yaitu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

b. Untuk $p = \infty$ didefinisikan

$$l_\infty = \left\{ \bar{x} = \{x_k\} \subset \omega: \sup_{k \geq 1} |x_k| < \infty \right\}$$

dan norm pada l_∞ yaitu

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x_k|.$$

Definisi 2.5.9

Misal $p, q \in (1, \infty)$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q konjugat p), untuk $x \square l_p$ dan $y \square l_p$

$(x_j y_j)_{j \in N} \in l_\infty$ dan $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|x\|^p \|y\|^q$. (Darmawijaya, 2007)

Teorema 2.5.10

$l_p (1 \leq p \leq \infty)$ merupakan ruang bernorma terhadap norm $\|.\|_p$.

(Darmawijaya, 2007)

Bukti :

a) Akan dibuktikan bahwa l_∞ merupakan ruang bernorm terhadap $\|.\|_\infty$. Untuk setiap skalar α dan $\bar{x} = \{x_k\}, \{y_k\} \square l_\infty$ diperoleh

i) $\|\tilde{x}\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x_k| \geq 0$ karena $|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$\|\tilde{x}\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x_k| = 0 \Leftrightarrow |x_k| = 0$ untuk setiap $k \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$

ii) $\|\alpha\tilde{x}\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |\alpha x_k| . \sup_{k \geq 1} |x_k| = \alpha \|x\|_\infty$.

karena $\sup_{k \geq 1} |x_k| < \infty$ maka $\|\alpha\tilde{x}\|_\infty = \alpha \|x\|_\infty < \infty$ atau $\alpha\tilde{x} \in l_\infty$

iii) $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_\infty \leq \|\tilde{x}\|_\infty + \|\tilde{y}\|_\infty$ dan $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_\infty \leq \infty$ yaitu $\tilde{x} + \tilde{y} \square l_\infty$

berdasarkan i), ii) dan iii) terbukti bahwa l^∞ merupakan ruang linear dan $\|.\|_\infty$ norm pada l_∞. Dengan kata lain $(l_\infty, \|.\|_\infty)$ ruang bernorma.

b) Untuk $1 \leq p < \infty$ diambil sebarang $\tilde{x} = \{x_k\}, \tilde{y} = \{y_k\} \square\, l_p$dan skalar α.

Diperoleh :

iv) $\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \geq 0$ karena $|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$$\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |x_k| \geq 0 \text{ untuk setiap } k \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$$

v) $\|\alpha\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\|x\|_p$

jelas bahwa $\|\alpha x\|_\infty < \infty$

vi) $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$

Berdasarkan iv), v) dan vi) terbukti bahwa l_p merupakan ruang linear dan $\|.\|_p$ norm pada l_p. Dengan kata lain $(l_p, \|.\|_p)$ ruang bernorm.

Teorema 2.5.11

Jika bilangan *real* p dengan $1 \leq p \leq \infty$, maka $(l_p, \|.\|_p)$ merupakan ruang banach. (Darmawijaya, 2007)

Bukti :

Telah dibuktikan bahwa $(l_p, \|.\|_p)$ merupakan ruang bernorm

Jadi tinggal membuktikan bahwa ruang bernorm itu lengkap.

Dibuktikan dahulu untuk $1 \leq p \leq \infty$ diambil sebarang barisan Cauchy $\{\tilde{x}^{(n)}\} \square\, l_p$ dengan

a) $\tilde{x}^{(n)} = \{\tilde{x}^{(n)}\} = (\tilde{x}_1{}^{(n)}, \tilde{x}_2{}^{(n)}, \tilde{x}_3{}^{(n)}, \ldots)$

Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ berlaku

b) $\left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\|_p < \frac{\varepsilon}{4}$ atau $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right|^p < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p$.

Hal ini berakibat untuk setiap dua bilangan asli $m, n > 0$ diperoleh $\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$ untuk setiap k. Dengan kata lain diperoleh barisan Cauchy $x_k^{(n)}$ untuk setiap k. Jadi terdapat bilangan x_k sehingga $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ atau $\lim_{n\to\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = 0$. Berdasarkan b) diperoleh untuk $n \geq n_0$ berlaku $\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Selanjutnya dibentuk barisan $\tilde{x} = \{x_k\}$. Menurut ketidaksamaan minkowski,

c) $\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Yang berarti $\tilde{x} = \{x_k\} \square l_p$. Berdasarkan pertidaksamaan a) diperoleh untuk $n \geq n_0$ berlaku

d) $\left\|\tilde{x} - \tilde{x}^{(n)}\right\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4}$

Maka barisan $\{\tilde{x}^{(n)}\}$ konvergen ke $\tilde{x}$. Berdasarkan hasil c) dan d), terbukti bahwa barisan Cauchy $\{\tilde{x}^{(n)}\} \sqsubset l_p$ konvergen ke $\tilde{x} = \{x_k\} \square l_p$ atau terbukti bahwa $(l_p, \|.\|_p)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ merupakan ruang Banach.

Definisi 2.5.12

Misalkan X merupakan ruang barisan, X dikatakan ruang BK (banach lengkap) jika X merupakan ruang banach dan pemetaan koordinatnya $P_n(x) = x_n, x = (x_k) \square X$ kontinu. (Ruckle, 1991)

Contoh ruang BK (Banach lengkap) adalah ruang barisan l_p, $1 \leq p \leq \infty$.

2.6 Basis

Definisi 2.6.1

Ruang vektor V dikatakan terbangkitkan secara hingga (*finitely generated*) jika ada vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \square V$ sehingga $V = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. Dalam keadaan seperti itu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ disebut pembangkit (*generator*) ruang vektor V. (Darmawijaya, 2007)

Menurut definisi di atas, ruang vektor V terbangkitkan secara hingga jika dan hanya jika ada vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \square V$ sehingga untuk setiap vektor $x \square V$ ada skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

Secara umum, jika $B \subset V$ dan V terbangkitkan oleh B, jadi $|B| = V$ atau B pembangkit V, maka untuk setiap $x \square V$ terdapat vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \square B$ dan skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$$

Definisi 2.6.2

Diberikan ruang vektor V. Himpunan $B \subset V$ dikatakan bebas linearjika setiap himpunan bagian hingga di dalam B bebas linear. (Darmawijaya, 2007)

Definisi 2.6.3

Diberikan ruang vektor V atas lapangan $\mathcal{F}$. Himpunan $B \subset V$ disebut basis (*base*) V jika B bebas linear dan $|V| = B$. (Darmawijaya, 2007)

Contoh :

Himpunan $\{\check{e}_1, \check{e}_2, \dots, \check{e}_n\}$, dengan $\tilde{e}_k$ vektor di dalam R^n yang komponen ke-k sama dengan 1 dan semua komponen lainnya sama dengan 0, merupakan basis ruang vektor R^n.

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2016/2017 di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini antara lain :

1. Mengkonstruksikan operator A dari ruang barisan l_4 ke ruang barisan l_4 dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = (0,0, \dots, 1_{(k)}, \dots)$.
2. Mengkonstruksikan norma operator A
3. Menyelidiki apakah koleksi semua operator A membentuk ruang Banach
4. Merepresentasikan operator A sebagai matriks takhingga yang dikerja pada barisan l_4 ke ruang barisan l_4 dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = (0,0, \dots, 1_{(k)}, \dots)$.

V. KESIMPULAN

Operator Linier dan kontinu $A: l_4 \to l_4$ merupakan operator-SM jika dan hanya jika terdapat suatu matriks $A = (a_{ij})$ yang memenuhi :

1. $Ax = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j\right\} \in l_4$ untuk setiap $x = (x_i) \in l_4$

2. $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left|a_{ij}\right|^4 < \infty$

3. $\sum_{i=1}^{\infty} \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right| < \infty$

Koleksi semua operator SM $A: l_4 \to l_4$ yang dinotasikan dengan SM (l_4, l_4) membentuk ruang Banach .

DAFTAR PUSTAKA

Berberian, S. K. 1996. *Fundamentals of Real Analysis*. Springer, Texas.

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Fuhrmannn, P. A. 1981. *Linear Syatem and Operator in Hilbert Space*. Mc Graw Hill and Sons, New York.

Kreyszig, E. 1989.*Introductory Function Analysis with Application*.Willey Classic Library, New York.

Maddox,I.J. 1970. *Element of Functional Analysis*.Cambridge Univercity Press, London.

Martono, K. 1984. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik 2*. Angkasa, Bandung.

Mizrahi, A. dan Sullivan, M. 1982.*Calculus and Analytic Geometry*. Wadsworth Publishing Company Belmont, California.

Parzynski and Zipse. 1987. *Introduction to Mathematical Analysis*. Mc Graw Hill International Edition, Singapore.

Ruckle, W. H. 1991. *Modern Analysis*. PWS-KENT Publishing Company, Boston.

Yahya, dkk. 1990. *Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi*. Ghalia Indonesia, Jakarta.