PENDEKATAN DISTRIBUSI *GENERALIZED BETA II* TERHADAP DISTRIBUSI PARETO MELALUI DISTRIBUSI *SINGH-MADDALA*, DAGUM, *FISK* DAN LOG NORMAL

(Skripsi)

Oleh

SUDESTI VINDI PRATIWI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

ABSTRACT

APPROXIMATION OF GENERALIZED BETA II DISTRIBUTION TOWARD PARETO DISTRIBUTION BY SINGH-MADDALA DISTRIBUTION, DAGUM, FISK AND LOG NORMAL

By

Sudesti Vindi Pratiwi

The generalized distribution of beta II (GB2) is an announcement of the beta distribution by adding two new parameters. The GB2 distribution has four parameters that is a, p, q as the shape parameter and b as the scale parameter. The specific form of GB2 distribution that are Singh-Maddala distribution (a, b, q), Dagum (a, b, p) and Fisk (a, b). In this study, we will check the relationship between generalized beta II distribution (a, b, p, q) toward Pareto distribution (α) through Singh-Maddala distribution (a, b, q), Dagum (a, b, p), Fisk (a, b) and log normal (μ, σ^2). The method that use in this study is the moment generating function approach. The result obtained can be proven which is then applied to graph simulations to determine the effect of parameters from each distribution either using probability desnsity function and moment generating function.

Key words: Generalized Distribution of Beta II, Singh-Maddala Distribution, Dagum Distribution, Fisk Distribution, Log Normal Distribution, Pareto Distribution

ABSTRAK

PENDEKATAN DISTRIBUSI *GENERALIZED BETA II* TERHADAP DISTRIBUSI PARETO MELALUI DISTRIBUSI *SINGH-MADDALA*, DAGUM, *FISK* DAN LOG NORMAL

Oleh

Sudesti Vindi Pratiwi

Distribusi *generalized beta II* merupakan bentuk perumuman dari distribusi beta dengan menambahkan dua parameter baru. Distribusi GB2 memiliki 4 parameter yaitu a, p, q sebagai parameter bentuk dan b sebagai parameter skala. Bentuk khusus dari GB2 antara lain distribusi *Singh-Maddala* $p = 1$, Dagum $q = 1$ dan *Fisk* $p = q = 1$. Pada penelitian ini akan dikaji hubungan antara distribusi *generalized beta II* (a, b, p, q) terhadap distribusi Pareto (α) melalui distribusi *Singh-Maddala* (a, b, q), Dagum (a, b, p), *Fisk* *(a,b)* dan log normal (μ, σ^2) menggunakan metode pendekatan berdasarkan fungsi pembangkit momen. Hasil penelitian diperoleh bahwa distribusi *generalized beta II* (a, b, p, q) dapat didekatkan dengan distribusi Pareto (α) melalui distribusi *Singh-Maddala* (a, b, q), Dagum (a, b, p), *Fisk* (a, b) dan log normal (μ, σ^2) menggunakan fungsi pembangkit momen yang dibentuk. Kemudian dilakukan simulasi grafik terhadap fungsi kepekatan peluang dan fungsi pembangkit momen untuk melihat pengaruh parameter dari setiap distribusi sehingga dari grafik yang terbentuk akan menunjukkan pendekatan yang dihasilkan dari masing-masing distribusi.

Kata Kunci : Distribusi *generalized beta II*, Distribusi *Singh-Maddala*, Distribusi Dagum, Distribusi *Fisk*, Distribusi log normal, Distribusi Pareto

PENDEKATAN DISTRIBUSI *GENERALIZED BETA II* TERHADAP DISTRIBUSI PARETO MELALUI DISTRIBUSI *SINGH-MADDALA*, DAGUM, *FISK* DAN LOG NORMAL

Oleh

SUDESTI VINDI PRATIWI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Skripsi	: **PENDEKATAN DISTRIBUSI *GENERALIZED BETA II* TERHADAP DISTRIBUSI PARETO MELALUI DISTRIBUSI *SINGH-MADDALA*, DAGUM, *FISK* DAN LOG NORMAL**
Nama Mahasiswa	: Sudesti Vindi Pratiwi
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1317031082
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.
NIP. 19690305 199603 2 001

Amanto, S.Si., M.Sc.
NIP. 19730314 200012 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Dra.Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.** ……………

   Sekretaris : **Amanto, S.Si., M.Si.** ……………

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Drs. Eri Setiawan, M.Si.** ……………

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **08 Agustus 2017**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Sudesti Vindi Pratiwi
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1317031082
Judul	: Pendekatan Distribusi *Generalized Beta II* Terhadap Distribusi Pareto Melalui Distribusi *Singh-Maddala*, Dagum, *Fisk* dan Log Normal
Jurusan	: Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, Agustus 2017

Penulis

Sudesti Vindi Pratiwi

NPM. 1317031082

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bumiemas pada tanggal 22 Desember 1995. Penulis merupakan anak pertama dari pasangan Bapak Suhadi dan Ibu Puji Ningsih serta kakak dari Debi Tuning Ulfasih.

Penulis memulai pendidikan dari Taman Kanak-kanak Pertiwi 3 pada tahun 2000. Pendidikan sekolah dasar di SD Negeri 1 Sumberrejo pada tahun 2001. Pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 1 Metro pada tahun 2007. Pendidikan sekolah menengah atas di SMA Negeri 1 Metro pada tahun 2011.

Penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN pada tahun 2013. Pada periode tahun 2013/2014 penulis terdaftar sebagai anggota GEMATIKA Himpunan Mahasiswa Matematika Unila juga sebagai anggota KOPMA (Koperasi Mahasiswa). Penulis pernah menjadi anggota bidang Kaderisasi Himpunan Mahasiswa Matematika Unila dan anggota departemen HLPM Badan Eksekutif Mahasiswa FMIPA Unila selama periode 2014/2015 dan sebagai anggota biro Kesekretariatan Himpunan Mahasiswa matematika FMIPA Unila tahun 2015/2016.

Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis telah menyelesaikan Kerja Praktik (KP) di Kantor Pelayanan Pajak Pratama Metro dan ditempatkan di bagian seksi PDI (Pengolahan Data dan Informasi) selama kurang lebih satu bulan. Penulis juga telah melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) Tematik pada tahun 2016 selama 40 hari di Desa Endang Rejo Kecamatan Seputih Agung, Lampung Tengah.

MOTTO

Don't be sad, indeed Allah is with us
(Al-Qur'an Surat At taubah 9:40)

Rahasia untuk bisa maju adalah dengan memulai
(Mark Twin)

Kesabaran, kegigihan, dan kerja keras menciptakan sebuah kombinasi yang tidak terkalahkan untuk kesuksesan

(Napoleon Hill)

Usaha dan keberanian tidaklah cukup tanpa tujuan dan arahan

(John F. Kennedy)

"Nikmatilah proses menuju kecapaian karena akan terasa lebih nikmat saat sudah tercapai"

(Sudesti Vindi Pratiwi)

PERSEMBAHAN

Puji dan syukur kepada Allah SWT berkat rahmat dan hidayah-Nya
sebuah karya sederhana namun penuh perjuangan telah terselesaikan

Kupersembahkan Skripsi ini untuk :

Kedua orang tuaku tercinta

Ayahanda Suhadi & Ibunda Puji Ningsih

Serta

Adikku tersayang

Debi Tuning Ulfasih

Terimakasih atas jasa-jasa yang tak bisa ternilai harganya
Terimakasih atas setiap doa tulus yang kalian panjatkan
Terimakasih atas cinta dan kasih sayang yang kalian berikan

SANWACANA

Puji syukur kehadirat Allah SWT berkat rahmat dan hidayahnya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW, suri tauladan terbaik sepanjang masa.

Pada proses penyusunan skripsi, penulis memperoleh banyak bantuan, dukungan, bimbingan serta kritik dan saran yang membangun sehingga skripsi ini mampu terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.,selaku dosen pembimbing utama yang telah membimbing penulis dengan setulus hati, menyumbangkan ilmunya, memberikan motivasi serta telah banyak meluangkan waktu ditengah kesibukannya untuk membimbing hingga skripsi ini terselesaikan.
2. Bapak Amanto, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing pembantu yang telah banyak membantu, memberi masukan serta dengan sabar memberikan pengarahan dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Eri Setiawan, M.Si., selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun kepada penulis dalam proses penyelesaian skripsi ini.
4. Ibu Widiarti, M.Si.,selaku Pembimbing Akademik.
5. Ibu Dra. Wamiliana, M.A.,Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A, Ph.D selaku dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA UNILA yang telah memberikan ilmu pengetahuan dan segala bentuk bantuan kepada penulis.
8. Orang tuaku tercinta dan adikku tersayang Debi, serta seluruh keluarga yang senantiasa memberikan kasih sayang yang tiada terkira, selalu menjadi penyemangat disaat lemah, selalu memotivasi penulis untuk memberikan yang terbaik, serta tak henti-hentinya mendoakan untuk keberhasilan penulis.
9. Teman-teman terbaik di kampus, Karina, Suri, Maimuri, Citra, Shintia, Suci, Siti, Septina, Artha, Rio, Onal, Atuy, yang telah banyak membantu, memberikan perhatian dan dukungan mental kepada penulis.
10. Untuk sahabat cantikku, Rani, Atus, Bunga, Tria, Baba, Vresti, Buli, Siti, Melinda, Maning, Yayas, Denti dan Nia terimakasih telah mendengarkan keluh kesah dan menghibur penulis disaat lemah.
11. Teman-teman satu bimbingan Eka, Yucky, Nafisah, dan Dimas yang selalu membantu penulis, berjuang bersama serta saling mendukung dalam menyelesaikan skripsi ini.
12. Fedri Rizki Ramadan yang rela meluangkan waktunya untuk menemani, membantu dan memberikan perhatian yang menjadi semangat tersendiri bagi penulis.
13. Keluarga besar HIMATIKA terima kasih atas pengalaman yang luar biasa.
14. Teman-teman seperjuangan Matematika 2013 yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu, terimakasih atas empat tahun kebersamaan yang bermakna dan kisah-kisah indah yang takkan terlupakan.

15. Seluruh pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu atas peran dan dukungannya dalam menyusun skripsi ini.

Bandar lampung,   Agustus 2017
Penulis,

Sudesti Vindi Pratiwi

DAFTAR ISI

Halaman

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Distribusi peluang merupakan suatu daftar atau persamaan yang menunjukkan hasil-hasil yang mungkin terjadi dari sebuah percobaan (Lind dkk, 2007). Distribusi peluang memberikan seluruh jangkauan nilai yang dapat terjadi berdasarkan sebuah percobaan. Distribusi peluang dikenal dalam dua kasus yang berbeda, yaitu distribusi peluang untuk peubah acak diskrit dan distribusi peluang untuk peubah acak kontinu.

Distribusi *generalized beta II* adalah keluarga distribusi peluang dengan peubah acak kontinu, yang merupakan bentuk perumuman dari distribusi beta dengan menambahkan dua parameter baru. Distribusi GB2 telah digunakan dalam berbagai bidang, diantaranya pada bidang matematika ekonomi dan asuransi, kesehatan dan industri serta prinsip ekonomi mikro (model neoklasik mengoptimalkan perilaku perusahaan). Ada beberapa bentuk khusus dari distribusi GB2 diantaranya adalah distribusi Dagum dengan parameter $q = 1$, distribusi *Singh-Maddala* dengan parameter $p = 1$ dan distribusi *Fisk* yang merupakan bentuk khusus dari distribusi GB2 yang paling sederhana dengan parameter $p = q = 1$.

Dalam teori probabilitas, distribusi log normal merupakan distribusi peluang sebuah peubah acak yang logaritmanya tersebar secara normal. Penemu distribusi log normal adalah Francis Galton. Distribusi ini sering disebut juga distribusi Galton. Sebuah peubah acak X dengan distribusi normal, maka $Y = \ln\ (X)$ memiliki distribusi log normal $\left(X \sim LN(\mu, \sigma^2)\right)$.

Menurut Kleiber dan Kotz (2003), distribusi Pareto berasal dari nama seorang ekonom yaitu Vilfredo Pareto (1848-1923). Distribusi Pareto merupakan model probabilitas dengan variabel kontinu. Distribusi Pareto umumnya digunakan dalam bidang sosial, ekonomi, bisnis, asuransi, maupun politik, sehingga memberikan beberapa alasan mengapa distribusi tersebut dapat diamati.

Dalam sebuah distribusi, karakterisasi distribusi dapat dilihat melalui hubungan antara suatu distribusi terhadap distribusi lainnya dengan menggunakan konsep-konsep dan teori yang mendukung. Konsep-konsep atau metode yang dapat digunakan untuk melakukan pendekatan distribusi adalah dengan menyamakan fungsi pembangkit momen, fungsi kumulatif distribusi, fungsi karakteristik dan dengan teori dalil limit pusat.

Berdasarkan uraian di atas peneliti tertarik untuk mengakaji hubungan antara distribusi *generalized beta II* (GB2) terhadap distribusi Pareto (α) melalui distribusi *Singh-Maddala* (a, b, q), Dagum (a, b, p), *Fisk (a,b)* dan log normal (μ, σ^2)

menggunakan metode pendekatan pada nilai fungsi pembangkit momen. Sehingga, teorema hubungan antara distribusi yang bersangkutan dengan distribusi yang sudah dikenal luas dapat dikaji secara lebih lanjut.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah melakukan pendekatan distribusi *generalized beta II* (a, b, p, q) terhadap distribusi Pareto (α) melalui distribusi *Singh-Maddala* (a, b, q), Dagum (a, b, p), *Fisk* (a, b) dan log normal (μ, σ^2) berdasarkan fungsi pembangkit momen.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memahami bahwa suatu distribusi dapat didekati dengan distribusi lainnya berdasarkan fungsi pembangkit momen yang dibentuk oleh masing-masing distribusi.
2. Memberikan pengetahuan lebih luas tentang distribusi *generalized beta II*, distribusi *Singh-Maddala*, distribusi Dagum, distribusi *Fisk*, distribusi log normal dan distribusi Pareto.

3. Memberikan referensi bagi peneliti lain yang akan melakukan penelitian lebih lanjut.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam mengkaji kasus khusus hubungan suatu distribusi dengan distribusi lainnya berdasarkan fungsi pembangkit momen yang dibentuk, digunakan beberapa definisi dan teorema yang mendukung dalam penelitian ini. Adapun penjabaran definisi dan teorema yang digunakan adalah sebagai berikut:

2.1 Distribusi *Generalized BetaII* (GB2)

Distribusi g*eneralized beta II* (GB2), awalnya diusulkan oleh Majumder dan Chakravarty (1990) sebagai reparameterisasi, pada (1993, 1995) McDonald dan Mantrala mengamati bahwa model Majumder-Chakravarty adalah setara dengan distribusi GB2 dengan empat parameter yaitu (a, b, p, q) dimana (a, p, q) adalah parameter bentuk yaitu suatu parameter numerik yang menunjukkan bentuk dari kurva dan (b) merupakan parameter skala yaitu suatu parameter numerik yang menunjukkan besarnya keragaman data serta $B(p, q)$ sebagai fungsi Beta.

Definisi 2.1

Menurut Kleiber dan Kotz (2003) suatu variabel acak dikatakan memiliki distribusi *generalized beta II* (GB2) dengan parameter (a, b, p, q) jika fungsi kepekatan peluangnya adalah:

$$f(x) = \frac{ax^{ap-1}}{b^{ap}B(p,q)\left(1+\left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right)^{p+q}}, x > 0 \tag{2.1}$$

dengan:

a, b, p, q adalah bilangan positif

$B(p, q)$ adalah fungsi Beta

b adalah parameter skala

a, p, q adalah parameter bentuk

Adapun nilai harapan distribusi GB2 sebagai berikut:

$$E(X) = \frac{b\Gamma\left(p+\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(q-\frac{1}{a}\right)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \tag{2.2}$$

dan

$$E(X^2) = \frac{b^2\Gamma\left(p+\frac{2}{a}\right)\Gamma\left(q-\frac{2}{a}\right)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \tag{2.3}$$

Diperoleh nilai ragam dari distribusi GB2 sebagai berikut:

$$Var\ (X) = b^2 \left[\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma\left(p+\frac{2}{a}\right)\Gamma\left(q-\frac{2}{a}\right)-\Gamma^2\left(p+\frac{1}{a}\right)\Gamma^2\left(q-\frac{1}{a}\right)}{\Gamma^2(p)\Gamma^2(q)} \right] \quad (2.4)$$

2.2 Distribusi *Singh-Maddala*

Distribusi *Singh-Maddala* diperkenalkan oleh Singh dan Maddala pada tahun 1975 dan pada tahun 1976 dianggap sebagai model distribusi pendapatan pribadi. Distribusi *Singh-Maddala* dengan tiga parameter (a, b, q) dimana parameter (a, q) adalah parameter bentuk dan (b) adalah parameter skala. Distribusi *Singh-Maddala* merupakan kasus khusus dari distribusi GB2 dengan parameter $p = 1$.

Definisi 2.2

Menurut Kleiber dan Kotz (2003) jika X adalah sebuah peubah acak dengan distribusi *Singh-Maddala* (a, b, q), maka fungsi kepekatan peluang dari X dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{aqx^{a-1}}{b^a\left[1+\left(\frac{x}{b}\right)^a\right]^{1+q}}\ , \ x > 0 \quad (2.5)$$

Momen ke-k untuk $-a < k < aq$ dinyatakan sebagai berikut:

$$E(X^k) = \frac{b^k B\left(1+\frac{k}{a}, q-\frac{k}{a}\right)}{B(1,q)} = \frac{b^k \Gamma\left(1+\frac{k}{a}\right)\Gamma\left(q-\frac{k}{a}\right)}{\Gamma(q)} \tag{2.6}$$

Nilai harapan dari X,

$$E(X) = \frac{bB\left(1+\frac{1}{a}, q-\frac{1}{a}\right)}{B(1,q)} = \frac{b\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(q-\frac{1}{a}\right)}{\Gamma(q)} \tag{2.7}$$

dan

$$Var(X) = \frac{b^2\left[\Gamma(q)\Gamma\left(1+\frac{2}{a}\right)\Gamma\left(q-\frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{a}\right)\Gamma^2\left(q-\frac{1}{a}\right)\right]}{\Gamma^2(q)} \tag{2.8}$$

2.3 Distribusi Dagum

Menurut Kleiber dan Kotz (2003) distribusi Dagum adalah distribusi dengan tiga parameter yaitu (a, b, p) dimana (b) adalah parameter skala dan (a, p) adalah parameter bentuk. Distribusi Dagum dikembangkan oleh Camilo Dagum pada tahun 1977 dan dianggap sebagai model distribusi pendapatan. Ditribusi Dagum merupakan bentuk khusus dari distribusi GB2 dengan parameter $q = 1$ sehingga dapat dinotasikan,

$$X \sim D(a, b, p) \leftrightarrow X \sim GB2(a, b, p, q = 1)$$

Definisi 2.3

Misalkan X adalah suatu variabel acak dari distribusi Dagum dengan parameter (a, b, p) maka fungsi densitas peluang dari X adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{apx^{ap-1}}{b^{ap}\left[1+\left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right]^{p+1}} \text{ , } x > 0 \tag{2.9}$$

Dalam hal ini diperoleh nilai harapan dari X yaitu:

$$E(X) = \frac{b\Gamma\left(p+\frac{1}{a}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{a}\right)}{\Gamma(p)} \tag{2.10}$$

dan

$$Var(X) = \frac{b^2\left[\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{2}{a}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{a}\right)-\Gamma^2\left(p+\frac{1}{a}\right)\Gamma^2\left(1-\frac{1}{a}\right)\right]}{\Gamma^2(p)} \tag{2.11}$$

2.4 Distribusi *Fisk*

Distribusi *Fisk* merupakan kasus khusus dari distribusi GB2 yang paling sederhana dimana parameter $p = q = 1$. Distribusi *Fisk* juga dianggap sebagai kasus khusus dari distribusi Dagum dengan parameter $p = 1$ dan kasus khusus dari distribusi *Singh-Maddala* dengan parameter $q = 1$. Distribusi *Fisk* memiliki dua parameter yaitu (a) dan (b). Parameter (b) adalah parameter skala dan merupakan satu-satunya parameter bentuk.

Definisi 2.4

Menurut Kleiber dan Kotz (2003) suatu variabel acak dikatakan memiliki distribusi *Fisk* dengan parameter (a, b) jika fungsi kepekatannya adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{ax^{a-1}}{b^a\left[1+\left(\frac{x}{b}\right)^a\right]^2}, x > 0 \tag{2.12}$$

Dimana $a, b > 0$

Nilai harapan dari X,

$$E(X) = b\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{a}\right) \tag{2.13}$$

dan

$$E(X^2) = b^2\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right)\Gamma\left(1 - \frac{2}{a}\right) \tag{2.14}$$

Adapun nilai ragam dari distribusi *Fisk* sebagai berikut:

$$Var(X) = b^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right)\Gamma\left(1 - \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)\Gamma^2\left(1 - \frac{1}{a}\right)\right] \tag{2.15}$$

2.5 Distribusi Log Normal

Distribusi log normal dalam bentuk sederhana adalah fungsi densitas dari sebuah peubah acak yang logaritmanya tersebar mengikuti distribusi normal dengan parameter μ dan σ^2. Adapun definisi dari distribusi log normal sebagai berikut:

Definisi 2.5

Menurut Kleiber dan Kotz (2003) misalkan sebuah peubah acak X berdistribusi normal maka $Y = \ln x$ merupakan distribusi normal dengan rata-rata μ dan ragam σ^2. $X = e^y$ merupakan distribusi log normal atau dapat ditulis $Y \approx N(\mu, \sigma^2)$. Karena X dan Y dihubungkan oleh relasi $Y = \ln x$, maka fungsi densitas log normal sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2}, x > 0 \tag{2.16}$$

Dengan nilai harapan X adalah

$$E(X) = exp\left(\frac{\mu + \sigma^2}{2}\right) \tag{2.17}$$

dan

$$E(X^2) = exp(2\mu + 2\sigma^2) \tag{2.18}$$

Adapun nilai ragam distribusi log normal sebagai berikut:

$$Var(X) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right) \tag{2.19}$$

2.6 Distribusi Pareto

Distribusi Pareto atau disebut juga dengan distribusi *power law* merupakan model probabilitas dengan variabel kontinu. $k > 0$ adalah salah satu parameter yang disebut parameter skala dan $\alpha > 0$ adalah parameter lain yang disebut parameter bentuk. Adapun definisi dari distribusi Pareto sebagai berikut:

Definisi 2.6

Menurut Miller dan Miller (1999) misalkan X adalah suatu variabel acak dari distribusi Pareto dimana $\alpha > 0$ adalah parameter bentuk dan $k > 0$ adalah parameter skala, maka fungsi densitas peluang dari X adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, x \geq k, \alpha > 0, k > 0 \tag{2.20}$$

Diperoleh nilai harapan dari X,

$$E(X) = \frac{\alpha k}{\alpha-1} \tag{2.21}$$

dan

$$E(X^2) = \frac{\alpha k^2}{\alpha - 2} \tag{2.22}$$

Adapun variansi dari distribusi Pareto diperoleh sebagai berikut:

$$Var(X) = \frac{\alpha k^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} \tag{2.23}$$

2.7 Deret Maclaurin

Pada penelitian ini deret Maclaurin digunakan untuk mengaproksimasi fungsi e^{tx} dalam menentukan fungsi pembangkit momen dari distribusi *generalized beta II*, *Singh-Maddala*, Dagum, *Fisk*, log normal dan Pareto.

Teorema 2.7

Misalkan *f* adalah fungsi dimana turunan ke (n+1), $f^{(n+1)}$, ada untuk setiap x pada suatu selang terbuka I yang memuat a. Jadi untuk setiap x di dalam I berlaku:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \tag{2.24}$$

Persamaan di atas disebut sebagai ekspansi deret Taylor bagi fungsi $f(x)$. Jika $a = 0$, maka bentuk deret pada persamaan di atas menjadi:

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots \tag{2.25}$$

Dan bentuk deret pada persamaan di atas disebut sebagai ekspansi deret Maclaurin bagi fungsi $f(x)$. Dengan menggunakan persamaan di atas maka fungsi $f(x) = e^{tx}$ dapat diuraikan menjadi bentuk deret sebagai berikut:

$f(x) = e^{tx}$ $\qquad$ $f(0) = e^{t(0)} = 1$

$f'^{(x)} = te^{tx}$ $\qquad$ $f'^{(0)} = te^{t(0)} = t$

$f"^{(x)} = t^2 e^{tx}$ $\qquad$ $f"^{(0)} = t^2 e^{t(0)} = t^2$

dst.

Sehingga diperoleh:

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!} \qquad (2.26)$$

(Purcell, Varberg, danRigdon, 2003)

2.8 Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen dari suatu peubah acak digunakan sebagai salah satu cara untuk mendapatkan nilai momen dari suatu distribusi. Fungsi pembangkit momen memiliki bentuk yang sederhana. Namun, tidak semua distribusi peubah acak memiliki fungsi pembangkit momen.

Definisi 2.8

MenurutHerryantodanGantini (2009) jika$X$ adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka fungsi pembangkit momen dari X (dinotasikan dengan $M_x(t)$) didefinisikan sebagai berikut:

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

untuk $-h < t < h$ dan $h > 0$.

Dari definisi di atas dapat diuraikan dalam 2 kasus yang berbeda, yaitu untuk peubah acak diskrit dan peubah acak kontinu.

a. Fungsi pembangkit momen untuk peubah acak diskrit

   Jika X adalah peubah acak diskrit dan $p(x)$ adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka fungsi pembangkit momen dari X adalah

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x \in X} e^{tx} p(x)$$

b. Fungsi pembangkit momen untuk peubah acak kontinu

   Jika X adalah peubah acak kontinu dan $f(x)$ adalah nilai fungsi densitas dari X di x, maka fungsi pembangkit momen dari X adalah

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

2.9 Ketunggalan untuk Fungsi Pembangkit Momen

Teorema 2.9

i. Bila dua fungsi pembangkit momen dari dua peubah acak ada dan sama, maka kedua peubah acak tersebut mempunyai fungsi distribusi yang sama.
ii. Bila dua peubah acak mempunyai fungsi distribusi yang sama, maka (bila ada) fungsi pembangkit momennya juga sama (Dudewiczdan Mishra, 1995).

2.10 Limiting Fungsi Pembangkit Momen

Teorema 2.10

Misalkan peubah acak Y_n memiliki fungsi distribusi $F_n(y)$ dan fungsi pembangkit momennya $M(t;n)$ ada pada selang $-h < t < h$ dan untuk semua n. Jika ada fungsi distribusi $F(y)$, yang berkorespondensi dengan fungsi pembangkit momennya $M(t)$, terdefinisi untuk $|t| \leq h_1 < h$, sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} M(t;n) = M(t)$, maka Y_n memiliki distribusi limit dengan fungsi distribusi $F(y)$ (Hogg & Craig, 1995).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2016/2017 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan untuk mengkaji hubungan distribusi *generalized beta II* (a, b, p, q) terhadap distribusi Pareto (α) melalui distribusi *Singh-Maddala* (a, b, q), Dagum (a, b, p), *Fisk* (a, b) dan distribusi log normal (μ, σ^2) dengan menggunakan metode pendekatan pada nilai fungsi pembangkit momen yang dibentuk dari suatu peubah acak yang ditentukan besaran parameternya.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan fungsi pembangkit momen dari distribusi GB2 (a, b, p, q), distribusi *Singh-Maddala* (a, b, q), distribusi Dagum (a, b, p), distribusi *Fisk (a,b)*, distribusi log normal (μ, σ^2) dan distribusi Pareto (α).

2. Membuat kombinasi kemungkinan yang terjadi dari setiap distribusi.

a. Kombinasi I

i. Membuktikan bahwa distribusi *Singh-Maddala* (a, b, q) merupakan bentuk khusus dari distribusi GB2 (a, b, p, q) untuk $p = 1$ dengan menunjukkan bahwa:

$$fpm\ Singh - Maddala\ (a, b, q) = fpm\ GB2\ (a, b, p = 1, q)$$

ii. Membuktikan bahwa distribusi *Fisk* (a, b) merupakan kasus limiting atau distribusi limit dari distribusi *Singh-Maddala* untuk $a = a, b = b$, $q = 1$dan $q \to \infty$ dengan menunjukkan bahwa:

$$fpm\ Fisk(a, b) = fpm\ Singh - Maddala\ (a = a, b = b, q = 1, q \to \infty)$$

iii. Membuktikan bahwa distribusi Pareto (α) merupakan kasus limiting atau distribusi limit dari distribusi *Fisk* untuk $a \to \infty$ dan $b = \frac{\alpha^{\frac{1}{n}} k}{(\alpha - n)^{\frac{1}{n}}}$ dengan menunjukkan bahwa:

$$fpm\ Pareto\ (\alpha) = fpm\ Fisk\ (a \to \infty, b = \frac{\alpha^{\frac{1}{n}} k}{(\alpha - n)^{\frac{1}{n}}})$$

b. Kombinasi II

i. Membuktikan bahwa distribusi *Singh-Maddala* (a, b, q) merupakan bentuk khusus dari distribusi GB2 (a, b, p, q) untuk $p = 1$ dengan menunjukkan bahwa:

$$fpm\ Singh - Maddala\ (a, b, q) = fpm\ GB2\ (a, b, p = 1, q)$$

ii. Membuktikan bahwa distribusi log normal (μ, σ^2) merupakan kasus limiting atau distribusi limit dari distribusi *Singh-Maddala* untuk $a \to \infty, b = e^{n\mu + \frac{1}{2}(n\sigma)^{\frac{2}{n}}}, q = 1$ dengan menunjukkan bahwa: $fpm \log normal\ (\mu, \sigma^2) = fpm\ Singh - Maddala\ (a \to \infty,$ $b = e^{n\mu + \frac{1}{2}(n\sigma)^{\frac{2}{n}}}, q = 1)$.

iii. Membuktikan bahwa distribusi Pareto (α) merupakan kasus limiting atau distribusi limit dari distribusi log normal untuk $\mu = ln\ \frac{\alpha^{\frac{1}{n}}k}{\alpha - n}, \sigma^2 = 1, n \to \infty$ dengan menunjukkan bahwa:

$$fpm\ Pareto\ (\alpha) = fpm \log normal\ (\mu = ln\ \frac{\alpha^{\frac{1}{n}}k}{\alpha - n}, \sigma^2 = 1, n \to \infty)$$

c. Kombinasi III

i. Membuktikan bahwa distribusi Dagum (a, b, p) merupakan bentuk khusus dari distribusi GB2 (a, b, p, q) untuk $q = 1$ dengan menunjukkan bahwa:

$$fpm\ Dagum\ (a, b, p) = fpm\ GB2\ (a, b, p, q = 1)$$

ii. Membuktikan bahwa distribusi log normal (μ, σ^2) merupakan kasus limiting atau distribusi limit dari distribusi Dagum untuk

$a \to \infty, b = e^{n\mu + \frac{1}{2}(n\sigma)^{\frac{2}{n}}}, p = 1$ dengan menunjukkan bahwa:

$$fpm \log normal\,(\mu,\sigma^2) = fpm\ Dagum(a \to \infty, b = e^{n\mu+\frac{1}{2}(n\sigma)^{\frac{2}{n}}}, p = 1)$$

iii. Membuktikan bahwa distribusi Pareto (α) merupakan kasus limiting atau distribusi limit dari distribusi log normal untuk $\mu = ln\ \frac{\alpha^{\frac{1}{n}}k}{\alpha-n}$, $\sigma^2 = 1, n \to \infty$ dengan menunjukkan bahwa:

$$fpm\ Pareto\ (\alpha) = fpm\ lognormal\ (\mu = ln\ \frac{\alpha^{\frac{1}{n}}k}{\alpha-n}\ , \sigma^2 = 1, n \to \infty)$$

d. Kombinasi IV

i. Membuktikan bahwa distribusi Dagum (a, b, p) merupakan bentuk khusus dari distribusi GB2 (a, b, p, q) untuk $q = 1$ dengan menunjukkan bahwa:

$$fpm\ Dagum\ (a, b, p) = fpm\ GB2\ (a, b, p, q = 1)$$

ii. Membuktikan bahwa distribusi *Fisk* (a, b) merupakan kasus limiting atau distribusi limit dari distribusi Dagum untuk$a = a, b = b, p = 1$ dan $p \to \infty$ dengan menunjukkan bahwa:

$$fpm\ Fisk\ (a, b) = fpm\ Dagum\ (a = a, b = b, p = 1, p \to \infty)$$

iii. Membuktikan bahwa distribusi Pareto (α) merupakan kasus limiting atau distribusi limit dari distribusi *Fisk* untuk $a \to \infty$ dan $b = \frac{\alpha^{\frac{1}{n}}k}{(\alpha-n)^{\frac{1}{n}}}$ dengan menunjukkan bahwa:

$$fpm\ Pareto\ (\alpha) = fpm\ Fisk\ (a \rightarrow \infty, b = \frac{\alpha^{\frac{1}{n}}k}{(\alpha-n)^{\frac{1}{n}}})$$

3. Membuktikan bahwa distribusi Pareto (α) merupakan kasus limiting atau distribusi limit dari distribusi GB2 untuk $a \rightarrow \infty, b = \frac{\alpha^{\frac{1}{n}}k}{(\alpha-n)^{\frac{1}{n}}}\ p = 1, q = 1$ dengan menunjukkan bahwa:

$$fpm\ Pareto\ (\alpha) = fpm\ GB2\ (a \rightarrow \infty, b = \frac{\alpha^{\frac{1}{n}}k}{(\alpha-n)^{\frac{1}{n}}}\ p = 1, q = 1)$$

4. Membuat grafik pendekatan berdasarkan fungsi kepekatan peluang dan fungsi pembangkit momen dari distribusi *generalized beta II*, *Singh-Maddala*, Dagum, *Fisk*, log normal dan Pareto dengan parameter berbeda menggunakan *software* R.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Fungsi pembangkit momen dari setiap distribusi yaitu:

    1.1. Distribusi *Generalized Beta II* (a, b, p, q)

    $$M_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{b^n \Gamma\left(p + \frac{n}{a}\right) \Gamma\left(q - \frac{n}{a}\right)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}$$

    1.2. Distribusi *Singh-Maddala* (a, b, q)

    $$M_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{b^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{a}\right) \Gamma\left(q - \frac{n}{a}\right)}{\Gamma(q)}$$

    1.3. Distribusi Dagum (a, b, p)

    $$M_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{b^n \Gamma\left(p + \frac{n}{a}\right) \Gamma\left(1 - \frac{n}{a}\right)}{\Gamma(p)}$$

    1.4. Distribusi *Fisk* (a, b)

    $$M_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} b^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{a}\right) \Gamma\left(1 - \frac{n}{a}\right)$$

1.5. Distribusi Log Normal (μ, σ^2)

$$M_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} e^{n\mu + \frac{1}{2}(n\sigma)^2}$$

1.6. Distribusi Pareto (α)

$$M_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{\alpha k^n}{\alpha - n}$$

2. Distribusi *Singh-Maddala* (a, b, q) merupakan bentuk khusus dari distribusi *generalized beta II* (a, b, p, q) untuk parameter $p = 1$.
3. Distribusi Dagum (a, b, p) merupakan bentuk khusus dari distribusi *generalized beta II* (a, b, p, q) untuk $q = 1$.
4. Distribusi *Fisk* (a, b) merupakan kasus limiting atau distribusi limit dari distribusi *Singh-Maddala* (a, b, q) untuk $a = a, b = b,\ q = 1$ dan $q \to \infty$.
5. Distribusi Pareto (α) merupakan kasus limiting atau distribusi limit dari distribusi *Fisk* (a, b) untuk $a \to \infty$ dan $= \frac{\alpha^{\frac{1}{n}} k}{(\alpha - n)^{\frac{1}{n}}}$.
6. Distribusi log normal (μ, σ^2) merupakan kasus limiting atau distribusi limit dari distribusi *Singh-Maddala* (a, b, q) untuk $a \to \infty, b = e^{n\mu + \frac{1}{2}(n\sigma)^{\frac{2}{n}}}, q = 1$.
7. Pareto (α) merupakan kasus limiting atau distribusi limit dari distribusi log normal (μ, σ^2) untuk $\mu = ln \frac{\alpha^{\frac{1}{n}} k}{\alpha - 1}$, $\sigma^2 = 1$ dan $n \to \infty$.

8. Distribusi log normal (μ, σ^2) merupakan kasus limiting atau distribusi limit dari distribusi Dagum(a, b, p) untuk $a \to \infty, b = e^{n\mu + \frac{1}{2}(n\sigma)^{\frac{2}{n}}}, p = 1$.
9. Distribusi Pareto (α) merupakan kasus limiting atau distribusi limit dari distribusi log normal (μ, σ^2) untuk $\mu = ln \frac{\alpha^{\frac{1}{n}} k}{\alpha - 1}$ $, \sigma^2 = 1$ dan $n \to \infty$.
10. Distribusi *Fisk* (a, b) merupakan kasus limiting atau distribusi limit dari distribusi Dagum (a, b, p) untuk $a = a,\ b = b,\ p = 1$ dan $p \to \infty$.
11. Distribusi Pareto (α) merupakan kasus limiting atau distribusi limit dari distribusi *Fisk* (a, b) untuk $a \to \infty$ dan $= \frac{\alpha^{\frac{1}{n}} k}{(\alpha - n)^{\frac{1}{n}}}$.
12. Distribusi Pareto (α) merupakan kasus limiting atau distribusi limit dari distribusi GB2 (a, b, p, q) untuk $a \to \infty, b = \frac{\alpha^{\frac{1}{n}} k}{(\alpha - n)^{\frac{1}{n}}}$ $p = 1, q = 1$.
13. Distribusi *generalized beta II* dengan parameter (a, b, p, q) dapat didekatkan dengan distribusi Pareto (α) melalui distribusi *Singh-Maddala* (a, b, q), Dagum (a, b, p), *Fisk (a,b)* dan log normal (μ, σ^2) dengan menggunakan fungsi pembangkit momen yang dibentuk oleh masing-masing distribusi tersebut.
14. Dari grafik yang telah dibuat berdasarkan fungsi kepekatan peluang dan fungsi pembangkit momen dari setiap distribusi dengan beberapa kombinasi kemungkinan, maka diperoleh adanya hubungan antara distribusi *generalized beta II* dengan distribusi Pareto melalui distribusi *Singh-Madddala*, Dagum, *Fisk* dan log normal.

DAFTAR PUSTAKA

Dudewicz, E.J., dan Mishra, S.N. 1995. *Statistika Matematika Modern*. ITB, Bandung.

Herryanto, N., dan Gantini, T. 2009. *Pengantar Statistika Matematis*. Yrama Widya, Bandung.

Hogg, R.V., dan Craig, AT. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics.* Prentice-Hall Inc, New Jersey.

Kleiber, C. dan Kotz, S. 2003. *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Lind, D.A., Marchal, W.G., dan Wathen, S.A. 2009. *Teknik-Teknik Statistika dalam Bisnis dan Ekonomi Menggunakan Kelompok Data Global*. Salemba Empat, Jakarta.

McClave, James T. and Sincich, Terry. 2000. *Statistics Eighth Edition.* Prentice-Hall Inc. New Jersey.

Miller, Irwin., dan Miller, Maryless. 1999. Jhon E. *Freun's Mathematical Statistics*. Sixth Edition. Upper Saddle River., New Jersey.

Purcell, E.J., Varberg, D., dan Ringdon, S.E. 2003. *Kalkulus Jilid 2 Edisi Kedelapan*. Erlangga, Jakarta.