PERHITUNGAN NILAI CADANGAN ASURANSI JIWA SEUMUR HIDUP DENGAN METODE ZILLMER DAN FACKLER

(Skripsi)

Oleh

RETNO SAFITRI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PEGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

ABSTRACT

CALCULATION OF LIFE INSURANCE RESERVES WITH ZILLMER AND FACKLER METHOD

By

Retno Safitri

The insured who was agreed with the written agreement (insurance policy) for using product in the insurance company must pay the premium. The fee is through premium will not be sufficient to fund company expenses. Therefore, the insurance company must prepare reserve fund which needs to be adjusted, this is possible to get new funding source to cover the fee of the following years and anticipate claim that will occur when the insured dies. The insurance reserves can be calculated in prospective and retrospective ways. In this study, the calculation of reserves using Zillmer and Fackler methods in insurance product. In Zillmer method, it is needed to calculate gross premium reserves which paid each period with the same calculation. Meanwhile, Fackler method is used in calculating net premium reserves have not been summed to other operating cost for the next years in sequence. From the results obtained that Zillmer reserves have a smaller value than Fackler. The smaller reserve value, the less obligation cost must be paid by the company for the insured to claim, because the reserves are liability or obligation. So, Zillmer's reserves are better for insurance companies that Fackler's reserves.

Keywords : Premium, Prospective reserves, Retrospective reserves, Zillmer method, Fackler method

ABSTRAK

PERHITUNGAN NILAI CADANGAN ASURANSI JIWA SEUMUR HIDUP DENGAN METODE ZILLMER DAN FACKLER

Oleh

Retno Safitri

Nasabah (tertanggung) yang sudah sepakat dengan perjanjian tertulis (polis asuransi) untuk berasuransi di perusahaan asuransi harus membayarkan premi. Biaya yang dibayarkan melalui premi tidak akan cukup untuk membiayai pengeluaran perusahaan asuransi. Oleh karena itu, perusahaan asuransi harus menyiapkan dana cadangan yang perlu disesuaikan, hal ini memungkinkan perusahaan asuransi mendapatkan sumber dana baru untuk menutupi biaya tahun-tahun berikutnya dan mengantisipasi klaim yang akan terjadi pada saat nasabah meninggal dunia. Nilai cadangan asuransi dapat dihitung dengan cara prospektif dan retrospektif. Perhitungan cadangan pada penelitian ini menggunakan metode Zillmer dan metode Fackler pada produk Asuransi Jiwa Seumur Hidup. Perhitungan metode Zillmer ini sangat diperlukan untuk memperhitungkan cadangan premi kotor yang dibayarkan tiap periodenya dengan perhitungan yang sama. Semetara itu, perhitungan metode Fackler digunakan dalam memperhitungkan cadangan premi bersih yang belum dijumlahkan dengan biaya operasional lainnya untuk beberapa tahun kedepan secara berurutan. Dari hasil perhitungan diperoleh bahwa cadangan Zillmer memiliki nilai yang lebih kecil dari cadangan Fackler. Semakin kecil nilai cadangan maka semakin sedikit biaya kewajiban yang dikeluarkan pihak perusahaan asuransi untuk membayarkan klaim kepada nasabah (pemegang polis), karena cadangan merupakan liabilitas atau kewajiban. Sehingga cadangan Zillmer lebih baik digunakan oleh perusahaan asuransi dari pada cadangan Fackler.

Kata kunci: Premi, Cadangan Prospektif, Cadangan Retrospektif, Metode Zillmer, Metode Fackler

PERHITUNGAN NILAI CADANGAN ASURANSI JIWA SEUMUR HIDUP DENGAN METODE ZILLMER DAN FACKLER

Oleh

RETNO SAFITRI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Skripsi : **PERHITUNGAN NILAI CADANGAN ASURANSI JIWA SEUMUR HIDUP DENGAN METODE ZILLMER DAN FACKLER**

Nama Mahasiswa : *Retno Safitri*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1317031069

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Drs. Rudi Ruswandi, S.Si., M.Si
NIP. 19560208 198902 1 001

Drs. Suharsono S, MS, M.Sc., Ph.D
NIP.19620513 198603 1 003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dra.Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Drs. Rudi Ruswandi, S.Si., M.Si** ....

   Sekretaris : **Drs. Suharsono S, MS, M.Sc., Ph.D** ....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Widiarti, S.Si., M.Si** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **15 Agustus 2017**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Retno Safitri
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1317031069
Judul	: Perhitungan Nilai Cadangan Asuransi Jiwa Seumur Hidup Dengan Metode Zilmer dan Fackler
Jurusan	: Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, Oktober 2017
Penulis,

Retno Safitri
NPM. 1317031069

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Teluk Betung pada tanggal 12 Maret 1995. Penulis merupakan anak pertama dari pasangan Bapak Suherman dan Ibu Nyimas Syamsiah Latifah serta kakak dari M. Jamil Zidan.

Penulis memulai pendidikan dari sekolah dasar di SD Al-Kautsar Bandar Lampung tahun 2001. Pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Al-Kautsar Bandar Lampung pada tahun 2007. Pendidikan sekolah menengah atas di SMA Al-Kautsar Bandar Lampung pada tahun 2010.

Penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SBMPTN pada tahun 2013. Pada periode tahun 2013/2014 penulis terdaftar sebagai anggota GEMATIKA Himpunan Mahasiswa Matematika FMIPA Unila. Penulis pernah menjadi anggota bidang Eksternal Himpunan Mahasiswa Matematika FMIPA Unila pada dua periode yaitu pada periode 2014/2015 dan periode 2015/2016.

Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis telah menyelesaikan Kerja Praktik (KP) di kantor Sub Divre III.2 Tanjung Karang selama kurang lebih satu bulan. Penulis juga telah melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2016 selama 40 hari di Desa Negri Katon, Kec. Selagai Lingga, Kab. Lampung Tengah, Provinsi Lampung.

MOTTO

Karena Sesungguhnya Sesudah Kesulitan Ada Kemudahan
(Q.S Al-Insyirah 94:5-6)

Thoughts Give Birth To Actions, Actions Spawned A Habit, Habit Bore The Character, and The Character Created Fate
(Aristoteles)

Jangan pernah mengeluh atas kekuranganmu, karena kekurangan mengingatkanmu untuk terus mencari kekuatan yang ada dalam dirimu
(Anonim)

Jangan takut gagal ketika kamu melibatkan Allah SWT didalam kehidupanmu. Berusahalah, berdoalah, dan serahkan semua kepada-Nya.

(Retno Safitri)

PERSEMBAHAN

Puji dan syukur kepada Allah SWT berkat rahmat dan hidayah-Nya sebuah karya sederhana namun penuh perjuangan telah terselesaikan

Kupersembahkan Skripsi ini untuk :

Kedua orang tuaku tercinta

Papa Suherman & Mama Nyimas Syamsiah

Latifah

Serta

Adikku tersayang

M. Jamil Zidan

Terimakasih atas kebaikan dan pengorbanan yang tak ternilai harganya
Terimakasih atas setiap doa tulus yang kalian panjatkan
Terimakasih atas cinta dan kasih sayang yang kalian berikan

SANWACANA

Puji syukur kehadirat Allah SWT berkat rahmat dan hidayahnya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW, suri tauladan terbaik sepanjang masa.

Pada proses penyusunan skripsi, penulis memperoleh banyak bantuan, dukungan, bimbingan serta kritik dan saran yang membangun sehingga skripsi ini mampu terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Drs. Rudi Ruswandi, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing utama yang telah membimbing penulis dengan setulus hati, menyumbangkan ilmunya, memberikan motivasi serta telah banyak meluangkan waktu ditengah kesibukannya untuk membimbing hingga skripsi ini terselesaikan.
2. Bapak Drs. Suharsono S, MS, M.Sc., P.hD., selaku dosen pembimbing pembantu yang telah banyak membantu, memberi masukan serta dengan sabar memberikan pengarahan dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Ibu Widiarti, S.Si.,M.Si., selaku dosen penguji yang telah memberikan kritikdan saran yang membangun kepada penulis dalam proses penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Agus Sutrisno, S.Si.,M.Si., selaku Pembimbing Akademik.
5. Ibu Dra. Wamiliana, M.A.,Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A, Ph.D., selaku dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA UNILA yang telah memberikan ilmu pengetahuan dan segala bentuk bantuan kepada penulis.
8. Orang tua dan Adik penulis, serta seluruh keluarga yang senantiasa memberikan kasih sayang yang tiada terkira, selalu menjadi penyemangat disaat lemah, selalu memotivasi penulis untuk memberikan yang terbaik, serta tak henti-hentinya mendoakan untuk keberhasilan penulis.
9. Teman-teman seperjuangan Della, Tasya, Cinkia, Shela, Shintia, Yucky, Tiara, Debi, Dian dan teman-teman angkatan 2013 yang telah banyak membantu, mendukung, mendoakan, serta memberikan motivasi dan semangat kepada penulis.
10. Keluarga besar HIMATIKA terimakasih atas pengalaman yang luar biasa.
11. Seluruh pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu atas peran dan dukungannya dalam menyusun skripsi ini.

Bandar lampung,   Oktober 2017
Penulis,

Retno Safitri

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Notasi	Keterangan
X	Waktu sisa hidup nasabah
x	Usia nasabah pada saat polis asuransi ditanda tangani
ω	Perkiraan batas maksimal usia nasabah akan tetap hidup, yaitu 110 tahun
T(x)	Peubah acak waktu sisa hidup nasabah
$F(t)$	Fungsi distribusi dari T(x)
$f(t)$	Fungsi densitas dari T(x)
$s(x)$	Fungsi survival yang menyatakan peluang bayi yang baru lahir dapat hidup mencapai usia x tahun
${}_tq_x$	Peluang orang yang berusia x tahun akan meninggal sebelum usia x+t tahun
${}_tp_x$	Peluang orang yang berusia x tahun akan tetap hidup sampai usia x+t tahun
$\mu(x+t)$	Force of Mortality (laju tingkat kematian), yang menyatakan probabilitas (peluang) sisa umur hidup seseorang yang berusia x tahun antara t dan t+Δt tahun dengan syarat ia masih hidup pada usia x sampai x+t tahun
l_x	Jumlah orang yang diharapkan masih hidup sampai usia x tahun dari sekelompok orang yang jumlahnya l_0 ketika baru lahir
d_x	Banyaknya orang yang berusia x tahun akan meninggal sebelum mencapai usia x+t tahun
i	Rate of interest annually, tingkat suku bunga
b_t	Besarnya santunan (benefit)

v	Nilai tunai (present value)
δ	Laju tingkat suku bunga (force of interest)
Z	Fungsi peubah acak (Actuarial Present Value) pembayarn benefit pada saat polis asuransi dikeluarkan
$\bar{A}_x$	Premi tunggal bersih asuransi seumur hidup untuk nasabah yang berusia x tahun
$\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}$	Anuitas hidup berjangka n tahun untuk nasabah yang berusia x tahun
$\bar{P}(\bar{A}_x)$	Premi bersih datar dari asuransi jiwa seumur hidup yang dibayarkan setiap awal periode untuk nasabah yang berusia x tahun
${}_t\bar{V}_x$	Cadangan asuransi jiwa akhir tahun ke-t untuk nasabah yang berusia x tahun
p^z	Premi untuk perhitungan cadangan asuransi jiwa dengan metode Zillmer
r	Besarnya biaya yang dikeluarkan perusahaan asuransi setiap tahunnya
f	Biaya permulaan yang dinyatakan dengan persentase dari santunan atau premi tunggal asuransi jiwa
${}_t\bar{V}_x{}^z$	Cadangan asuransi jiwa akhir tahun ke-t dengan metode Zillmer untuk nasabah yang berusia x tahun
${}_t\bar{V}^f$	Cadangan asuransi jiwa akhir tahun ke-t dengan metode Fackler

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Era globalisasi saat ini, tidak sedikit manusia yang selalu berusaha mendapatkan jaminan keamanan untuk dirinya sendiri dan orang-orang yang bergantung padanya. Tetapi pada kenyataannya keamanan keuangan tidak bisa dijamin secara pasti, karena sebagian disebabkan oleh masalah atau resiko-resiko yang ada. Masalah-masalah atau resiko-resiko tersebut sangat umum terjadi di kehidupan ini yaitu seperti kematian, kecelakaan, cacat dan sakit yang tentu tidak diinginkan oleh siapapun juga, selalu datang dengan tiba-tiba tanpa seorangpun yang tahu dimana, kapan dan karena apa terjadi. Dalam hal ini banyak sekali perusahaan asuransi yang menawarkan jasanya untuk menjamin keamanan hidup para nasabahnya. Nasabah (tertanggung) yang sudah sepakat dengan perjanjian tertulis (polis asuransi) untuk berasuransi di perusahaan asuransi harus membayarkan premi. Premi adalah uang yang dibayarkan nasabah kepada pihak perusahaan asuransi (penanggung) yang menanggung sejumlah kerugian yang mungkin timbul dimasa yang akan datang sebagai imbalan untuk perusahaan asuransi (penanggung). Imbalan tersebut digunakan perusahaan asuransi untuk membayar benefit atau santunan yang telah disepakati jika tertanggung meninggal dunia.

Premi tersebut dapat dibayarkan dengan pembayaran tunggal atau tetap berkala, dan biasanya yang disajikan oleh perusahaan asuransi yaitu gross premium (premi kotor) yang terdiri dari premi netto (premi bersih) dan biaya. Biaya yang dibayarkan melalui premi tidak akan cukup untuk membiayai pengeluaran perusahaan asuransi pada tahun-tahun permulaan polis. Akan tetapi, kekurangan tesebut akan tertutupi oleh premi pada tahun-tahun akhir polis, karena biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan asuransi pada tahun-tahun terakhir polis lebih kecil dari biaya yang dibayarkan lewat premi. Oleh karena itu, keadaan ini memaksa perusahaan asuransi mencari sumber dana untuk menutupi biaya tahun-tahun permulaan yang kemudian akan dibayar kembali dari premi tahun-tahun berikutnya.

Mengatasi keadaan ini, maka perusahaan asuransi harus menyiapkan dana cadangan yang perlu disesuaikan, hal ini memungkinkan perusahaan asuransi mendapatkan sumber dana baru untuk mengantisipasi klaim tersebut. Nilai cadangan asuransi dapat dihitung dengan cara prospektif dan retrospektif. Cadangan prospektif adalah perhitungan cadangan dengan berdasarkan nilai sekarang dari semua pengeluaran pada waktu yang akan datang dikurangi dengan nilai sekarang total pendapatan pada waktu yang akan datang untuk tiap pemegang polis sedangkan cadangan retrospektif adalah perhitungan cadangan dengan berdasarkan jumlah total pendapatan pada waktu yang lalu sampai saat dilakukan perhitungan cadangan, dikurangi dengan jumlah pengeluaran diwaktu yang lalu untuk tiap pemegang polis.

Perhitungan cadangan pada penelitian ini difokuskan pada produk asuransi jiwa Seumur Hidup pada metode Zillmer dan metode Fackler. Ditinjau dari rumusnya bahwa metode Zillmer mengandung nilai f yang menyatakan selisih antara biaya permulaan dengan biaya lanjutan. Oleh karena itu, perhitungan metode Zillmer ini sangat diperlukan untuk memperhitungkan cadangan premi kotor yang dibayarkan tiap periodenya dengan perhitungan yang sama. Sementara itu dari rumus metode Fackler tidak mengandung nilai f, melainkan mengandung nilai l_x dan d_x. Maka, perhitungan metode Fackler digunakan dalam memperhitungkan cadangan premi bersih yang belum dijumlahkan dengan biaya operasional lainnya untuk beberapa tahun kedepan secara berurutan. Jadi, jelas bahwa metode Zillmer dan Fackler ini sangatlah berbeda ditinjau dari perhitungan cadangannya.

1.2 Perumusan Masalah

Rumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana cara menentukan nilai cadangan asuransi yang dimodifikasi (disesuaikan) dengan menggunakan metode Zillmer dan Fackler melalui studi kasus (simulasi).

1.3 Manfaat Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menentukan nilai cadangan asuransi jiwa dengan metode Zillmer dan Fackler.
2. Mengkaji nilai cadangan dari metode Zillmer dan Fackler melalui studi kasus.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Penelitian ini terdapat teori-teori dasar yang dilakukan untuk dapat menyederhanakan permasalahan dan mempermudah proses perhitungan nilai cadangan asuransi secara umum. Berikut ini dasar teori-teori yang digunakan:

2.1 Fungsi Kelangsungan Hidup (*Survival Function*)

Misalkan (x) adalah seseorang yang berusia x tahun pada saat polis asuransi ditanda tangani, sedangkan jarak waktu antara (x) sampai meninggal dunia (X) akan disebut sisa umur bagi (x), sehingga terdapat peubah acak T(x), yaitu T(x)=X-x untuk x ≥ 0. T(x) menyatakan sisa umur bagi (x).

Fungsi distribusi dari T(x) dinyatakan dengan $F(t)$ dan didefinisikan (Bowers, 1997) dengan:

$$F(t) = P(T(x) \leq t), t \geq 0 \qquad (2.1.1)$$

$F(t)$ menyatakan peluang seseorang yang berusia x tahun akan meninggal sebelum $(x + t)$ tahun.

Secara umum fungsi kelangsungan hidup dapat dinyatakan dengan:

$$s(x + t) = 1 - F_{T(x)}(t) = P(T(x) > t), t > 0 \qquad (2.1.2)$$

$s(x+t)$ adalah peluang orang berusia x tahun akan hidup mencapai usia $x+t$ tahun.

2.2 Peluang Waktu Sisa Hidup

Dalam *Survival Function* untuk kasus kontinu, simbol T(x) menyatakan peubah acak waktu sisa hidup (*future lifetime*) dari seseorang yang berusia x, atau $T(x) = X - x$, dengan fungsi distribusi didefinisikan sebagai berikut (Bowers, 1997):

$$
\begin{aligned}
F_{T(x)}(t) &= P(T(x) \leq t \mid X > x) \\
&= P(X - x \leq t \mid X > x) \\
&= P(x \leq X \leq x + t \mid X > x) \\
&= \frac{F_x(x+t) - F_x(x)}{1 - F_x(x)} \\
&= \frac{\big(1 - s(x+t)\big) - (1 - s(x))}{s(x)} \\
&= \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} \\
&= \frac{s(x)}{s(x)} - \frac{s(x+t)}{s(x)} \\
&= 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} \\
&= {}_tq_x \qquad\qquad (2.2.1)
\end{aligned}
$$

Dalam ilmu aktuaria ${}_tq_x$ dinyatakan sebagai peluang orang yang berusia x tahun akan meninggal sebelum usia $(x+t)$ tahun. Sedangkan fungsi hidupnya, yaitu (Bowers, 1997):

$$P(T(x) > t) = 1 - P(T(x) \leq t)$$

$$= 1 - {}_tq_x$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right)$$

$$= \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

$$= {}_tp_x \qquad (2.2.2)$$

Dapat diartikan bahwa ${}_tp_x$ adalah peluang seseorang yang berusia x tahun akan hidup sampai dengan usia $(x+t)$ tahun. Jika $x = 0$ dan $t = x$, maka ${}_xp_0$ menyatakan peluang bayi yang baru lahir dapat mencapai usia x tahun dan dikenal sebagai fungsi *Survival* yang dinyatakan dengan (Bowers, 1997):

$$s(x) = {}_xp_0 \qquad (2.2.3)$$

Di dalam matematika aktuaria diberikan beberapa definisi peluang bersyarat, antara lain sebuah kondisi yang menyatakan bahwa x akan berlangsung hidup sampai t tahun dan meninggal dalam u tahun, berarti x akan meninggal antara usia $(x+t)$ tahun dan $(x+t+u)$ tahun. Kondisi ini disebut sebagai peluang meninggal yang ditangguhkan dan didefinisikan sebagai berikut (Bowers, 1997):

$${}_{t|u}q_x = P(t < T(x) \leq t+u)$$

$$= P(T(x) \leq t+u) - P(T(x) \leq t)$$

$$= {}_{t+u}q_x - {}_tq_x$$

$$= \frac{\big(1 - s(x+t+u)\big) - (1 - s(x+t))}{s(x)}$$

$$= \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)}$$

$$= {}_tp_x - {}_{t+u}p_x$$

$$= \left[\frac{s(x+t)}{s(x)} \cdot \frac{s(x+t)}{s(x+t)}\right] - \left[\frac{s(x+t)}{s(x+t)} \cdot \frac{s(x+t+u)}{s(x)}\right]$$

$$= \frac{s(x+t)}{s(x)}\left[1 - \frac{s(x+t+u)}{s(x+t)}\right]$$

$$= \ {}_tp_x . (1 - \ {}_up_{x+t})$$

$$= \ {}_tp_x . \ {}_uq_{x+t} \qquad (2.2.4)$$

Jika $u = 1$, maka peluang meninggal yang ditangguhkan dapat dinyatakan dengan ${}_{t|}q_x$, sehingga:

$$ {}_{t|}q_x = \ {}_tp_x . q_{x+t} \qquad (2.2.5)$$

Dalam kasus diskrit, peluang meninggal sering disebut *Curtate Future Lifetime* dengan simbol K(x). Secara teori, definisi dari peubah acak K(x) adalah:

K(x) = [T(x)], dengan simbol [T(x)] yang menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan dari T(x). Adapun secara informal K(x) menyatakan berapa kali lagi ulang tahun yang dapat dinyatakan oleh (x) sebelum ia meninggal dunia atau peubah acak diskrit yang menyatakan lamanya hidup (x).

K(x) adalah variabel acak diskrit dengan fungsi distribusi yang dinyatakan dengan (Bowers, 1997):

$$\begin{aligned} P(K(x) = k) = P(K = k) \\ &= P([T(x)] = k) \\ &= P(k < T(x) \leq k + 1) \\ &= F(k + 1) - F(k) \\ &= {}_{k+1}q_x - {}_kq_x \\ &= {}_kp_x . (1 - {}_{k+1}p_x) \\ &= {}_kp_x . q_{x+k} \end{aligned}$$

$$= {}_{k|}q_x \quad ; k = 0,1,2,3,\ldots \tag{2.2.6}$$

2.3 Laju Tingkat Kematian (*Force of Mortality*)

Laju kematian dari seseorang yang baru lahir dan akan meninggal antara usia x dan $(x + \Delta x)$ dengan syarat hidup pada usia x dapat dinyatakan dengan (Bowers, 1997):

$$P(x < X < x + \Delta x \mid X > x) = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)}$$

Karena $F(x + \Delta x) - F(x)$ dapat dinyatakan sebagai fungsi limit, maka:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} F(x + \Delta x) - F(x).\frac{\Delta x}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} 1 - F(x)}$$

$$= \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\ .\Delta x.}{\lim_{\Delta x \to 0} 1 - F(x)}$$

$$= \frac{F'(x)\Delta x}{1 - F(x)}$$

$$\cong \frac{f(x)\Delta x}{1 - F(x)}$$

Untuk setiap usia x, laju tingkat kematian dari seseorang yang berusia x tahun dapat dinyatakan dengan (Bowers, 1997):

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} \tag{2.3.1}$$

Atau

$$\mu(x + t) = \frac{f(x+t)}{1-F(x+t)} \tag{2.3.2}$$

$\mu(x+t)$ adalah probabilitas (peluang) sisa umur hidup seseorang yang berusia x tahun antara t dan $(t+\Delta x)$ tahun dengan syarat ia masih hidup pada usia x sampai $(x+t)$ tahun.

Karena $s(x) = 1 - F(x)$ atau $F(x) = 1 - s(x)$, maka (Bowers, 1997):

$$F'(x) = f(x) = -s'(x) \tag{2.3.3}$$

Sehingga diperoleh nilai laju kematian pada usia$x$ adalah (Bowers, 1997):

$$\mu(x) = \frac{-s'(x)}{s(x)} = \frac{-1}{s(x)} . \frac{d(s(x))}{d(x)}$$

$$= \frac{-d\ \ln s(x)}{ds(x)} . \frac{d(s(x))}{d(x)}$$

$$= \frac{-d \ln s(x)}{d(x)}$$

$$\mu(x)dx = -d \ln s(x)$$

Dengan mengganti x menjadi y, maka diperoleh:

$$\mu(y)dy = -d \ln s(y)$$

Dengan menggunakan integral tertentu pada batas x sampai $(x+t)$ maka diperoleh:

$$\int_{x}^{x+t} \mu(y)dy = -\int_{x}^{x+t} d \ln s(y)$$

$$= -\ln s(y) \Big|_{x}^{x+t}$$

$$= -\{\ln s(x+t) - \ln s(x)\}$$

$$= -\ln \left(\frac{s(x+t)}{s(x)} \right)$$

$$= -\ln \ {}_tp_x$$

$${}_tp_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu(y)dy} \tag{2.3.4}$$

Jika nilai laju kematiannya konstan $(\mu(x) = \mu)$ untuk semua $x \geq 0$, artinya besarnya nilai dari *Force of Mortality* (laju tingkat kematian) adalah sama untuk semua usia nasabah yang hidup, maka diperoleh:

$$s(x) = {}_{x}p_0 = e^{-\int_0^x \mu(y)dy} = e^{-\mu x} \tag{2.3.5}$$

Diketahui sebelumnya bahwa ${}_{t}q_x$ adalah fungsi distribusi dari T(x), sehingga fungsi kepadatan peluang dari T(x) adalah (Bowers, 1997):

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{d}{dt}\ {}_{t}q_x \\
&= \frac{d}{dt}(1 - {}_{t}p_x) \\
&= \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(-\frac{s(x+t)}{s(x)}\right) \\
&= -\frac{s'(x+t)}{s(x)} \\
&= \frac{s(x+t)}{s(x)} . -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}
\end{aligned}$$

$$f(t) = {}_{t}p_x . \mu(x+t) \tag{2.3.6}$$

2.4 Tabel Mortalitas

Pada tabel mortalita terdapat variabel l_x dan d_x. l_x menyatakan jumlah orang yang diharapkan masih hidup sampai usia x tahun dari sekelompok orang yang jumlahnya l_0 ketika baru lahir. Dalam hal ini, l_0 yang menyatakan banyaknya bayi yang baru dilahirkan diasumsikan mempunyai fungsi survival sama dengan $s(x)$. Misalkan $l_0 = 100000$, lalu diberi indeks $j = 1,2,3, \ldots\ldots, l_0$ (orang ke-1, orang ke-2,……, orang ke-l_0), dan $\mathcal{L}(x)$ menyatakan banyaknya bayi yang hidup sampai dengan usia x tahun, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut (Bowers, 1997):

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j \qquad (2.4.1)$$

Dimana I_j adalah indikator untuk bayi yang bertahan hidup dari j, dan dapat pula dinyatakan dengan:

$$I_j = \begin{cases} 1, & jika\ j\ hidup\ sampai\ dengan\ x \\ 0, & selainnya \end{cases}$$

Karena I_j adalah random variabel, dan berdasarkan asumsi bahwa l_0 mempunyai fungsi survival yang sama dengan $s(x)$, maka akan diperoleh nilai peluangnya sebagai berikut:

$$P(I_j = 1) = s(x) \qquad (2.4.2)$$

$$P(I_j = 0) = 1 - s(x) \qquad (2.4.3)$$

Dari persamaan (2.4.2) dan (2.4.3), diperoleh nilai harapan dari I_j sebagai berikut (Bowers, 1997):

$$E[I_j] = 1.s(x) + 0.(1 - s(x)) = s(x)$$

Sehingga nilai ekspektasi dari $\mathcal{L}(x)$ dapat dinyatakan dengan (Bowers, 1997):

$$E[\mathcal{L}(x)] = E\left[\sum_{j=1}^{l_0} I_j\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{l_0} E[I_j]$$

$$= \frac{s(x) + s(x) + \cdots + s(x)}{sebanyak\ l_0}$$

$$l_x = l_0.s(x) \qquad (2.4.4)$$

$$= l_0 . \ {}_xp_0$$

$$= l_0 . exp\left(\int_0^x \mu_t \, dt\right) \qquad (2.4.5)$$

Selanjutnya variabel d_x menyatakan banyaknya orang yang berusia x tahun akan meninggal sebelum mencapai usia $(x + 1)$ tahun.

Misalkan ${}_nD_x$ menyatakan banyaknya bayi yang meninggal antara usia x tahun sampai dengan usia $(x + n)$ tahun, maka berlaku persamaan berikut (Bowers, 1997):

$$P(x < X < x + n) = s(x) - s(x + n)$$

Selanjutnya indikator yang berlaku adalah sebagai berikut:

$$I_j = \begin{cases} 1, & jika\ j\ meninggal\ antara\ usia\ x\ tahun\ sampai\ x + n\ tahun \\ 0, & selainnya \end{cases}$$

Karena I_j adalah random variabel, maka akan diperoleh nilai peluangnya sebagai berikut:

$$P(I_j = 1) = s(x) - s(x + n) \qquad (2.4.6)$$

$$P(I_j = 0) = 1 - [s(x) - s(x + n)] \qquad (2.4.7)$$

Dari persamaan (2.4.6) dan (2.4.7), diperoleh nilai harapan dari I_j sebagai berikut:

$$E[I_j] = 1. s(x) - s(x + n) + 0. (1 - [s(x) - s(x + n)]) = s(x) - s(x + n)$$

Sehingga nilai ekspektasi dari ${}_nD_x$ dapat dinyatakan dengan (Bowers, 1997):

$$E[\,{}_nD_x] = E\left[\sum_{j=1}^{l_0} I_j\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{l_0} E[I_j]$$

$$= \frac{[\{s(x) - s(x+n)\} + \{s(x) - s(x+n)\} + \cdots + \{s(x) - s(x+n)\}]}{sebanyak\ l_0}$$

$${}_n d_x = l_0.\{s(x) - s(x+n)\}$$

$${}_n d_x = l_0.s(x) - l_0.s(x+n)$$

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n} \qquad (2.4.8)$$

Dimana ${}_n d_x$ menyatakan banyaknya orang yang berusia x tahun yang meninggal sebelum mencapai usia $(x+n)$ tahun.

Berdasarkan persamaan (2.4.4) dan (2.4.8) diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$l_x = l_0.s(x) \Longrightarrow s(x) = \frac{l_x}{l_0}$$

$${}_x p_0 = \frac{l_x}{l_0} \qquad (2.4.9)$$

Dan

$${}_x q_0 = 1 - {}_x p_0 = 1 - \frac{l_x}{l_0} = \frac{l_0 - l_x}{l_0} = \frac{d_x}{l_0} \qquad (2.4.10)$$

Sehingga peluang (x) akan meninggal sebelum mencapai usia $(x+t)$ tahun dapat dinyatakan dengan:

$${}_t q_x = 1 - {}_t p_x$$

$$= 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$= \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}$$

$$= \frac{{}_t d_x}{l_x} \qquad (2.4.11)$$

Sebuah peluang meninggal yang ditangguhkan atau kondisi yang menyatakan bahwa x akan berlangsung hidup sampai t tahun dan meninggal dalan n tahun, didefinisikan sebagai berikut:

$$_{t|u}q_x = 1 - {}_{t|u}p_x$$

Jika $u = 1$, maka berdasarkan (2.2.5) diperoleh:

$$\begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= {}_tp_x . q_{x+t} \\ &= \frac{l_{x+t}}{l_x} . \frac{d_{x+t}}{l_{x+t}} \\ &= \frac{d_{x+t}}{l_x} \end{aligned} \qquad (2.4.12)$$

2.5 Bunga (*Interest*)

Bunga adalah sesuatu pembayaran yang dilakukan karena seseorang meminjam uang sebagai balas jasa atas pemakaian uang yang telah dipinjam. Secara umum cara perhitungan bunga dibagi menjadi dua yaitu bunga sederhana (*simple interest*) dan bunga majemuk (*compound interest*), pada penelitian kali ini menggunakan bunga majemuk (*compound interest*).

2.5.1 Bunga Majemuk (*Compound Interest*)

Bunga majemuk adalah suatu perhitungan bunga dimana besar pokok jangka investasi selanjutnya adalah besar pokok sebelumnya ditambah dengan besar bunga yang diperoleh (Futami, 1993). Besar bunga majemuk dapat dihitung dengan menggunakan rumus:

$$I = P_0 . i^n \qquad (2.5.3)$$

Dengan:

I : *Interest value* (nilai bunga)

P_0 : Pokok investasi

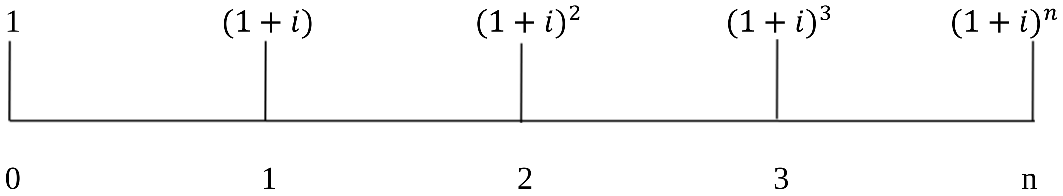
i : *Rate of interest annually* (tingkat suku bunga)

n : *Time* (jangka waktu investasi)

Setelah n tahun nilai total investasinya menjadi (Futami, 1993):

$$P_n = P_0(1+i)^n \tag{2.5.4}$$

Berikut adalah ilustrasi untuk sistem bunga majemuk:



Gambar 1. Sistem Bunga Majemuk

Gambar 2 menunjukkan bahwa pada tahun ke-0 nasabah menginvestasikan uangnya sebesar 1, kemudian mendapatkan bunga sebesar i pada tahun ke-1.Pada tahun ke-2, jumlah uang investasinya beserta bunganya yang ada pada tahun ke-1 dibungakan kembali, dan begitu seterusnya hingga tahun ke-n, investasi menjadi pokok ditambah dengan bunganya, kemudian dibungakan kembali sebanyak n kali.

Dalam bunga majemuk didefinisikan suatu fungsi v sebagai berikut (Futami, 1993):

$$v = \frac{1}{(1+i)} \tag{2.5.5}$$

Persamaan (2.5.4) dapat juga dituliskan sebagai berikut:

$$P_0 = \frac{P_n}{(1+i)^n} = v^n . P_n \tag{2.5.6}$$

Jika $n = 1$ dan $P_1 = 1$, maka $P_0 = v$. v adalah nilai sekarang (*present value*) dari pembayaran sebesar 1 satuan yang dilakukan satu tahun kemudian.

Didefinisikan fungsi tingkat diskon d sebagai berikut (Futami, 1993):

$$d = \frac{i}{(1+i)} = i.v = 1 - \frac{1}{(1+i)} = \frac{(1+i)-1}{(1+i)} = 1 - v \qquad (2.5.7)$$

Karena v adalah nilai sekarang (*present value*) untuk pembayaran sebesar 1 satuan yang akan dibayarkan 1 tahun kemudian, apabila pembayarannya dilakukan 1 tahun lebih cepat, maka besarnya bunga yang hilang adalah $d = 1 - v$ (Futami, 1993).

Tingkat suku bunga selalu dinyatakan pertahun atau per annum (p.a). Tingkat bunga tahunan yang dinyatakan itu apakah diakhiri dengan p.a atau tidak, disebut dengan tingkat bunga nominal (Frensidy, 2010). Simbol untuk tingkat bunga nominal adalah $i^{(k)}$. Untuk suku bunga nominal dengan k kali pembayaran dalam satu tahun dapat dedifinisikan sebagai berikut (Futami, 1993):

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)^k \text{dengan} i^{(k)} = k\left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1\right]$$

$$i^{(k)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{k}} - (1+i)^0}{\frac{1}{k}} \qquad (2.5.8)$$

Misalkan $y = (1+i)^x = f(x)$ maka $f(x + \Delta x) = (1+i)^{x+\Delta x}$ (2.5.9)

Menurut notasi Leibniz (Purcel, 2005) jika $\Delta x \to 0$ maka:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Dengan persamaan (2.5.9) maka diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+i)^{x+\Delta x} - (1+i)^x}{\Delta x}$$

Sehingga: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+i)^{\Delta x}-(1+i)^0}{\Delta x}$

Jika $\Delta x = \frac{1}{k}$, $\Delta x \to 0$ maka $\frac{1}{k} \to 0$

Dengan k adalah banyaknya pembayaran yang dilakukan dalam 1 tahun. Jika $k \to \infty$ maka akan diperoleh definisi laju tingkat suku bunga, yaitu sebagai berikut:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| x = 0 = \lim_{\frac{1}{k}\to 0} \frac{(1+i)^{\frac{1}{k}} - (1+i)^0}{\frac{1}{k}}$$

$$= \lim_{\frac{1}{k}\to 0} \frac{(1+i)^{\frac{1}{k}} - (1+i)^0}{\frac{1}{k}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} i^{(k)}$$

Untuk $y = (1+i)^x$ maka $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \ln(1+i)$

Untuk $k \to \infty$ didapatkan nilai δ dan dinyatakan dalam (Futami, 1993):

$$\lim_{k\to\infty} i^{(k)} = \ln(1+i) = \delta$$

$$\delta = \ln(1+i)$$

$$e^{\delta} = (1+i)^t$$

$$e^{-\delta t} = (1+i)^{-t}$$

$$e^{-\delta t} = (1+i)^{-t} = v^t \qquad (2.5.10)$$

Dan δ disebut dengan laju tingkat suku bunga (*force of interest*)

2.6 Asuransi Jiwa

Asuransi jiwa adalah usaha kerjasama atau koperasi dari sejumlah orang yang sepakat memikul kesulitan keuangan bila terjadi musibah terhadap salah seorang anggotanya (R.K. Sembiring, 1986).

2.6.1 Asuransi Jiwa Seumur Hidup

Pada asuransi dengan perhitungan kontinu, pembayaran benefit kepada ahli waris nasabah dilakukan sesaat setelah nasabah meninggal dunia. Jumlah dan waktu pembayaran benefit pada asuransi jiwa tergantung pada panjang interval dari dikeluarkannya polis sampai tertanggung meninggal dunia. Berdasarkan uraian tersebut, asuransi jiwa terdiri dari fungsi benefit atau santunan (b_t) dan t adalah panjang interval pada saat polis dikeluarkan sampai dengan (x) meninggal dunia. Keduanya membentuk suatu peubah acak yang dilambangkan dengan Z_t yang didefinisikan sebagai berikut (Bowers, 1997):

$$Z_t = b_t . v_t$$

Karena T(x) adalah peubah acak dari sisa waktu hidup nasabah atau waktu dari dikeluarkannya polis sampai waktu meninggalnya nasabah, maka Z_t adalah fungsi peubah acak (*Actuarial Present Value*) pembayaran benefit pada saat polis asuransi dikeluarkan.

Adapun salah satu jenis asuransi yang umum digunakan adalah Asuransi Jiwa Seumur Hidup. Asuransi Jiwa seumur hidup adalah asuransi yang menjamin seumur hidup tertanggung dan akan mendapatkan uang pertanggungan apabila tertanggung tersebut meninggal dunia.

Gambar 2. Sistem Pembayaran Benefit pada asuransi Jiwa Seumur Hidup

Diilustrasikan bahwa besarnya benefit (b_t) sebesar satu satuan dibayarkan sesaat setelah nasabah meninggal dunia, maka (Bowers, 1997):

$$b_t = 1, \qquad t \geq 0$$

Dan

$$v_t = 1, \qquad t \geq 0$$

Sehingga diperoleh:

$$Z_t = b_t . v_t$$

$$Z_t = b_t . v^t$$

$$Z_t = v^t, \qquad t \geq 0$$

Nilai APV dari asuransi seumur hidup ini adalah (Bowers, 1997):

$$E[Z_t] = E[v^t] = \bar{A}_x = \int_0^\infty v^t . f(t) dt \qquad (2.6.1)$$

Berdasarkan (2.5.10) dan (2.3.6), persamaan (2.6.1) dapat diubah menjadi (Bowers, 1997):

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} . \ {}_t p_x . \mu_{(x+t)} dt \qquad (2.6.2)$$

Berdasarkan (2.3.5), maka persamaan (2.6.2) menjadi:

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} . e^{-\mu t} . \mu_{(t)} dt \qquad (2.6.3)$$

Persamaan (2.6.3) adalah nilai APV dari asuransi jiwa seumur hidup dengan santunan atau benefit sebesar 1 satuan

2.7 Anuitas (*Annuity*)

Anuitas didefinisikan sebagai suatu rangkaian pembayaran dengan jumlah tertentu dalam selang dan periode waktu tertentu (R.K. Sembiring, 1997).

2.7.1 Anuitas Tentu (Pembayaran Tahunan)

Anuitas tentu adalah serangkaian pembayaran berkala yang dilakukan selama jangka waktu tertentu dengan syarat dan besarnya pembayaran berkala tidak perlu sama. Anuitas tentu dibagi menjadi dua, yaitu: anuitas tentu yang dibayarkan di awal waktu pembayaran disebut anuitas awal (*dueannuity*) dan anuitas yang dibayarkan diakhir waktu pembayaran disebut anuitas akhir (*immediate annuity*).

Total nilai sekarang dari anuitas akhir diberi notasi $a_{\overline{n}|}$ (*immediate annuity*) adalah (Futami, 1993):

$$PV = a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^n \qquad (2.7.1)$$

Dengan menggunakan rumus geometri, maka diperoleh:

$$a_{\overline{n}|} = v.\left(\frac{1 - v^n}{1 - v}\right)$$

$$= v.\left(\frac{1 - v^n}{i.v}\right) \qquad dengan\, d = \frac{i}{1 + i} = i.v = 1 - v$$

$$= \frac{1 - v^n}{i} \qquad (2.7.2)$$

Sedangkan total nilai sekarang dari anuitas awal (*due annuity*) yang diberi notasi $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ adalah (Futami, 1993):

$$PV = \ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1} \qquad (2.7.3)$$

Dengan cara yang sama maka diperoleh:

$$a_{\overline{n}|} = 1.\left(\frac{1-v^n}{1-v}\right)$$

$$= 1.\left(\frac{1-v^n}{d}\right) \qquad dengan\; d = \frac{i}{1+i} = i.v = 1-v$$

$$= \frac{1-v^n}{i.v} \qquad (2.7.4)$$

2.7.2 Anuitas Tentu (Pembayaran Kontinu)

Suatu anuitas tentu yang pembayarannya dilakukan k kali dalam satu tahun dengan $k \to \infty$, atau dengan kata lain pembayarannya dilakukan setiap saat, dinotasikan dengan $\bar{a}_{\overline{n}|}$ (Futami, 1993):

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \lim_{k\to\infty} \bar{a}_{\overline{n}|}{}^{k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1-v^n}{i^{(k)}}$$

$$= \frac{1-v^n}{\delta} \qquad (2.7.5)$$

2.7.3 Anuitas Hidup Kontinu (*Continous Life Annuity*)

Anuitas hidup adalah serangkaian pembayaran yang sifatnya periodik dan pembayarannya hanya akan dilakukan apabila orang yang ditunjuk masih hidup pada saat pembayaran jatuh tempo.

Anuitas hidup sebesar satu satuan per akhir tahun yang pembayarannya dilakukan secara kontinu atau setiap saat disebut anuitas hidup kontinu. Dengan nilai sekarang (*present value*) dari pembayaran anuitas tersebut dinotasikan dengan peubah acak Y, yaitu: $Y = \bar{a}_T$ dengan T ≥ 0 (Bowers, 1997):

Dari persamaan (2.7.5) diperoleh (Futami, 1997)::

$$\bar{a}_T = \frac{1 - v^T}{\delta} \tag{2.7.6}$$

Actuarial Present Value (APV) dari anuitas tersebut adalah:

$$\bar{a}_x = E[Y] = E[\bar{a}_T] = \int_0^\infty \bar{a}_T . f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{1 - v^T}{\delta} . f(t)dt \tag{2.7.7}$$

Dengan menggunakan pengintegralan parsial tentu:

$$\int_a^b u \ dv = [uv]_a^b - \int_a^b v \, du$$

Misalkan:

- $u = \bar{a}_T$

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1 - v^T}{\delta}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{v^T}{\delta}\right)$$

$$= -\frac{1}{\delta}\frac{dv^t}{dt}$$

$$= -\frac{1}{\delta} . v^t . \ln v = \frac{1}{\delta} . v^t . \ln(1 + i)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\delta} . v^t . \delta$$

$$= v^t$$

$$du = v^t \ dt$$

- $dv = f(t) \ dt$

$$dv = \ {}_tp_x . \mu(x + t)dt$$

$v = - \; {}_tp_x$ (Bowers, 1997)

Sehingga:

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_T . f(t)dt$$

$$\bar{a}_x = \bar{a}_T - \; {}_tp_x \Big]_0^\infty \int_0^\infty - \; {}_tp_x . v^t dt$$

Maka:

$\bar{a}_x = E[\bar{a}_T] = \int_0^\infty v^t . \; {}_tp_x dt$ (2.7.8)

Berdasarkan (2.5.10), persamaan (2.7.8) menjadi:

$\bar{a}_x = E[\bar{a}_T] = \int_0^\infty e^{-\delta t} . \; {}_tp_x dt$ (2.7.9)

Dan berdasarkan persamaan (2.3.5), maka persamaan (2.7.9) menjadi:

$\bar{a}_x = E[\bar{a}_T] = \int_0^\infty e^{-\delta t} . e^{-\mu t} dt$ (2.7.10)

Persamaan (2.7.10) adalah nilai APV dari anuitas seumur hidup. Dengan cara yang sama, akan diperoleh nilai anuitas berjangka-n tahun sebagai berikut:

$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = E[\bar{a}_T] = \int_0^n v^t . \; {}_tp_x dt$ (2.7.11)

Atau (Bowers, 1997)

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = E\left[\frac{1 - v^t}{\delta}\right] = \int_0^n \frac{1 - v^t}{\delta} . f(t)dt$$

$$= \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta} \int_0^n v^t . f(t)dt$$

$$= \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta} A'_{x:\overline{n|}}$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1 - A'_{x:\overline{n|}}}{\delta}$$

Berdasarkan persamaan (2.7.10), maka persamaan (2.7.11) menjadi:

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = E[\bar{a}_T] = \int_0^n e^{-\delta t} . e^{-\mu t} dt \tag{2.7.12}$$

Persamaan (2.7.12) adalah nilai APV dari anuitas berjangka n tahun.

2.8 Premi Asuransi Jiwa

Premi adalah uang yang harus dibayarkan oleh pemegang polis kepada perusahaan asuransi sebagai imbalan persetujuan penanggung untuk membayar benefit dan santunan yang telah disepakati dalam polis asuransi jika orang yang ditanggung meninggal dunia. Ada tiga unsur utama yang menentukan perhitungan premi asuransi jiwa, yaitu:

a. Mortalitas (Harapan Hidup)
b. Suku Bunga
c. *Loading*, yaitu biaya yang dikeluarkan untuk operasional perusahaan asuransi.

(R.K. Sembiring, 1986)

Premi asuransi dapat dibayarkan sekaligus atau secara tetap berkala. Premi yang dibayarkan sekaligus disebut premi tunggal (*Net Single Premium*), sedangkan premi tetap berkala dapat dibayarkan per tahun, per tri wulan dan per bulan serta dilakukan pada permulaan tiap selang waktu.

Premi asuransi terbagi menjadi dua macam, yaitu premi *netto* dan premi *bruto*. Premi *netto* adalah premi yang dibayarkan pemegang polis atau konsumen berdasarkan perkiraan tingkat mortalita dan perkiraan tingkat suku bunga, sedangkan tingkat biaya tidak dipergunakan (Futami, 1993). Premi *netto* dihitung atas dasar prinsip keseimbangan antara pemasukan dan pengeluaran, yaitu nilai tunai dari premi *netto* yang akan diterima oleh perusahaan asuransi di waktu yang akan datang harus sama dengan nilai tunai daribenefit atau santunan yang akan dibayarkan oleh perusahaan asuransi, adapun biaya tersebut seperti: biaya administrasi, biaya penutupan, komisi dan lain-lain.

Akan tetapi, pada umumnya biaya-biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan asuransi yang dibebankan kepada pemegang polis (nasabah). Biaya- biaya tersebut sudah dimasukkan kedalam premi yang dibayarkan oleh pemengang polis. Premi yang mengandung nilai biaya tersebut disebut sebagai premi *bruto* atau *gross premium* (Futami, 1993). Premi *bruto* diperoleh dari nilai premi *netto* ditambah biaya atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$Premi\ Brutto\ (Gross\ Premium) = Premi\ Netto + Biaya$$

(Futami, 1993)

2.8.1 Fungsi Kerugian

Pada saat polis asuransi ditandatangani terdapat dua jenis kewajiban didalamnya, yaitu:

1. Kewajiban pihak perusahaan asuransi adalah membayar santunan yang besarnya sesuai perjanjian yang telah ditetapkan diawal kontrak manakala sewaktu-waktu terjadi klaim.
2. Kewajiban pihak nasabah adalah membayar premi langsung sekaligus diawal kontrak atau secara berkala pada periode yang telah ditentukan.

Kedua jenis kewajiban tersebut membentuk suatu fungsi total kerugian polis asuransi yang disimbolkan dengan L. Untuk penanggung, L adalah perbedaan antara nilai sekarang dari santunan dan nilai sekarang dari pembayaran premi (Bowers, 1997). Nilai kerugian (L) ini merupakan peubah acak dari nilai sekarang dari santunan yang dibayarkan oleh penanggung tak sebanyak premi anuitas yang dibayarkan oleh tertanggung. Besarnya kerugian yang akan ditanggung oleh pihak perusaahan asuransi dihitung dengan:

$$L = L(T) = v^T - P\bar{a}_T$$

atau

$$L = M - P.Q$$

dengan:

L = nilai dari fungsi kerugian

M = premi tunggal asuransi jiwa

P = premi datar asuransi jiwa

Q = nilai APV dari anuitas

Resiko kerugian perusahaan terjadi ketika nilai kerugiannya memberikan nilai positif, dimana nilai santunan yang dibayarkan kepada pihak nasabah lebih besar dari premi yang diterima oleh pihak perusahaan asuransi. Secara teoritis nilai kerugian yang positif terjadi ketika pihak nasabah meninggal dunia pada awal kontrak asuransi.

2.8.2 Prinsip Ekuivalen (*Equivalence Principle*)

Prinsip ekuivalen menyatakan bahwa ekspektasi dari fungsi kerugian adalah sama dengan nol. Prinsip ekuivalen ini digunakan untuk mengantisipasi kerugian yang akan diterima oleh perusahaan asuransi pada periode tertentu, sehingga jumlah benefit/santunan yang akan dikeluarkan oleh perusahaan asuransi akan sebanding dengan besarnya nilai premi yang harus dibayarkan oleh nasabah kepada perusahaan asuransi.

Perusahaan asuransi mempunyai syarat bahwa:

$E(L) = 0$

Maka:

E[Nilai sekarang santunan – Nilai sekarang premi] = 0

E[Nilai sekarang santunan] = E[Nilai sekarang premi]

Berdasarkan fungsi kerugian dan prinsip ekuivalen, maka untuk premi yang dibayarkan kontinu ($\bar{P}$), nilai sekarang dari kerugian untuk penanggung jika meninggal terjadi pada saat t dan jumlah santunan yang harus diberikan kepada nasabah sebesar B satuan adalah:

$$L(T) = B.v^T - \bar{P}\bar{a}_T \qquad (2.8.1)$$

Karena T(x) merupakan peubah acak, maka dengan prinsip ekuivalen diperoleh:

$$E(L) = E[B.v^T - \bar{P}\bar{a}_T] = 0$$

$$B.E[v^T] - \bar{P}.E[\bar{a}_T] = 0$$

$$\bar{P} = \frac{B.E[v^T]}{[\bar{a}_T]} \qquad (2.8.2)$$

Berdasarkan (2.8.2), maka akan diperoleh nilai premi bersih (*net single premium*) dari produk atau jenis asuransi jiwa seumur hidup, yaitu sebagai berikut:

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{B.\bar{A}_x}{\bar{a}_x} \qquad (2.8.3)$$

2.9 Cadangan Asuransi Jiwa

Cadangan dalam asuransi jiwa merupakan liabilitas (kewajiban) perusahaan asuransi terhadap pemegang polis yang berupa sejumlah dana yang harus disiapkan oleh perusahaan asuransi untuk membayar klaim yang akan terjadi di kemudian hari atas polis-polis yang diterbitkan perusahaan asuransi (R.K Sembiring, 1986). Jadi, cadangan bukanlah milik perusahaan melainkan milik pemegang polis. Cadangan diperlukan semata-mata agar perusahaan asuransi dapat berjalan sesuai dengan dasar-dasar yang sudah ditemukan. Besarnya cadangan tergantung kepada perkembangan premi, artinya semakin banyak jumlah pemegang polis semakin besar jumlah cadangan yang dibutuhkan.

Pada awal kontrak (polis asuransi ditandatangani), perusahaan asuransi akan mengalami resiko klaim lebih kecil dari premi tetap tahunan yang dibayarkan oleh nasabah. Dengan kata lain premi tetap tahunan yang diperoleh oleh perusahaan asuransi akan melampaui biaya asuransi tahunannya, sedangkan di akhir kontrak, klaim semakin besar dari premi yang diterima oleh perusahaan asuransi. Hal tersebut dikarenakan laju mortalita yang semakin meningkat (semakin bertambah usia seseorang, maka peluang meninggalnya semakin besar). Sehingga kelebihan dana premi yang diterima oleh perusahaan asuransi pada awal penanggungan tersebut dapat disimpan untuk membayar santunan bagi pemegang polis sampai dibutuhkan kelak.

Oleh karena itu, penting bagi perusahaan asuransi untuk mendapatkan sebuah perkiraan jumlah premi yang akan diterima pada waktu tertentu guna menjamin pembayaran santunan apabila terjadi klaim dalam selang waktu yang telah ditentukan, dan konsep cadangan asuransi pun muncul untuk mengukur kewajiban perusahaan asuransi atas polis yang dikelolanya.

Misalkan seorang yang berusia x menandatangani polis asuransi jiwa seumur hidup dengan P adalah premi tahunan dengan santunan/benefit sebesar 1 satuan. Maka perusahaan asuransi harus menyiapkan dana sebesar 1 satuan di akhir tahun agar sewaktu-waktu terjadi klaim. Benefit atau santunan dapat langsung diberikan kepada ahli waris nasabah. Sedangkan nasabah harus melakukan pembayaran premi setiap tahunnya sebesar P yang dilakukan setiap awal tahun. Perhatikan ilustrasi dibawah ini :

Outflow		$d_x.1$	$d_{x+1}.1$	…..	$d_{\omega-2}.1$	$l_{\omega-1}.1$
	x	$x+1$	$x+2$	…..	$\omega-1$	ω
Inflow	$l_x.P$	$l_{x+1}.P$	$l_{x+2}.P$		$l_{\omega-1}.P$	

Gambar 3. Ilustrasi dari dana yang akan diperoleh dan dikeluarkan oleh perusahaan asuransi

Gambar diatas menunjukkan keseimbangan antara dana yang dikeluarkan dan dana yang diterima oleh perusahaan asuransi akan terjadi apabila jumlah dana yang akan dikeluarkan (benefit/santunan) oleh perusahaan asuransi sama dengan jumlah premi yang dibayarkan nasabah kepada perusahaan asuransi. Sehingga dapat diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$l_x.P + l_{x+1}.P.v + \cdots + l_{\omega-1}.P.v^{\omega-x-1}$$
$$= d_x.1.v + d_{x+1}.1.v^2 + \cdots + d_x.1.v^{\omega-x}$$

Untuk mengetahui dana cadangan yang terkumpul pada saat usia nasabah mencapai $x+t$ tahun dengan santunan sebesar 1 satuan, dapat dilakukan melalui dua cara, yaitu:

2.9.1 Cadangan Retrospektif

Cadangan retrospektif adalah perhitungan cadangan dengan berdasarkan jumlah total pendapatan di waktu yang lalu sampai saat dilakukan perhitungan cadangan dikurangi dengan jumlah pengeluaran di waktu lampau, untuk tiap pemgang polis (Futami, 1993).

Perhitungan cadangan retrospektif ini dimulai dengan mengambil titik tumpu perhitungan dananya dari usia $x+t$ tahun ke x tahun, sehingga dana yang terkumpul pada usia $x+t$ tahun akan menjadi akumulasi. Perhatikan gambar berikut:

Outflow	$d_x.1$	$d_{x+1}.1$	…..	$d_{x+t-2}.1$	$l_{x+t-1}.1$
x	$x+1$	$x+2$	…..	x+t-1	$x+t$
Inflow $l_x.P$	$l_{x+1}.P$	$l_{x+2}.P$		$l_{x+t-1}.P$	

Gambar 4. Ilustrasi dari dana yang terkumpul dengan menggunakan metode retrospektif

Berdasarkan gambar diatas, akan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} Nilai\ Akumulasi \\ Dana \\ Pada\ saat\ usia \\ x+t\ tahun \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Nilai\ Akumulasi \\ Dana\ Inflow \end{pmatrix} - \ (Nilai\ Akumulasi\ Dana\ Outflow)$$

$$= \left(l_x.P.(1+i)^t + l_{x+1}.P.(1+i)^{t-1} + \cdots + l_{x+t-1}.P.(1+i)\right)$$

$$- (d_x.1.(1+i)^{t-1} + d_{x+1}.1.(1+i)^{t-2} + \cdots$$

$$+ d_x.1.(1+i)^0) \qquad (2.9.1)$$

Nilai akumulasi dari dana yang terkumpul tersebut merupakan liabilitas (cadangan asuransi) pada saat nasabah berusia $x+t$ tahun. Berasarkan persamaan (2.4.12) dan (2.4.9), dari (2.9.1) akan didapatkan nilai liabilitas (cadangan asuransi) pada saat $x+t$ sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} Nilai\ Liabilitas \\ (cadangan) \\ Pada\ saat\ usia \\ x+t\ tahun \end{pmatrix}$$

$$= \left[\frac{\left(l_x.P.(1+i)^t + l_{x+1}.P.(1+i)^{t-1} + \cdots + l_{x+t-1}.P.(1+i)\right)}{l_x.(1+i)^t}\right]$$

$$- \left[\frac{(d_x.1.(1+i)^{t-1} + d_{x+1}.1.(1+i)^{t-2} + \cdots + d_x.1.(1+i)^0)}{l_x.(1+i)^t}\right] \qquad (2.9.2)$$

$$= \left[\frac{P}{v^t}(\ {}_0p_x.v^o + \ {}_1p_x.v^1 + \cdots + \ {}_{t-1}p_x.v^{t-1})\right]$$

$$- \left[\frac{({}_{0|}q_x.v^1 + \ {}_{1|}q_x.v^2 + \cdots + \ {}_{t-1|}q_x.v^t)}{v^t}\right]$$

$$= \frac{P}{v^t}.\sum_{k=0}^{t-1} v^k.\ {}_kp_x - \frac{1}{v^t}.\sum_{k=0}^{t-1} v^k.{}_{k|}q_x$$

$$\begin{pmatrix} Nilai\ Liabilitas \\ (cadangan) \\ Pada\ saat\ usia \\ x+t\ tahun \end{pmatrix} = \frac{P.\ddot{a}_{x:t}}{v^t} - \frac{1.A_{x:t}}{v^t} \qquad (2.9.3)$$

Selanjutnya jumlah seluruh dana liabilitas pada akhir tahun dibagi sama rata oleh tertanggung yang masih hidup pada saat $x + t$. Bagian untuk setiap nasabah ini disebut cadangan akhir tahun $x + t$ yang diberi simbol ${}_tV_x$. Sehingga persamaan (2.9.3) menjadi seperti berikut:

$$ {}_tV_x = \frac{P.\ddot{a}_{x:t|}}{v^t.\ {}_tp_x} - \frac{1.A_{x:t}}{v^t.\ {}_tp_x} \qquad (2.9.4)$$

Jika benefit yang dikeluarkan oleh perusahaan asuransi adalah sebesar N satuan, maka diperoleh persamaan (2.9.4) sebagai berikut:

$$ {}_tV_x = \frac{P.\ddot{a}_{x:t}}{v^t.\ {}_tp_x} - \frac{N.A_{x:t}}{v^t.\ {}_tp_x} \qquad (2.9.5)$$

Persamaan (2.9.5) merupakan cadangan asuransi jiwa berjangka t tahun yang dihitung secara retrospektif. Untuk asuransi seumur hidup dengan menggunakan metode retrospektif bisa menyesuaikan.

2.9.2 Cadangan Prospektif

Perhitungan cadangan prospektif yang didefinisikan sebagai selisih antar nilai sekarang (*present value*) dari benefit atau manfaat yang akan diterima dengan nilai sekarang dari premi bersih yang akan datang sesuai dengan anuitas yang telah ditentukan. (Futami,1993).

Pada cadangan prospektif perhitungan dananya dimulai dengan mengambil titik tumpu dari usia$x + t$ tahun sampai $\omega - (x + t)$ tahun. Sehingga dana yang terkumpul pada usia $x + t$ tahun dapat dihitung dengan cara present value, yaitu total nilai sekarang dari dana yang akan dikeluarkan perusahaan asuransi (benefit) dikurangi dengan total nilai dana yang akan diterima oleh perusahaan asuransi (premi). Perhatikan gambar berikut:

Outflow $d_{x+1}.1$ $d_{x+t+1}.1\ldots..$ $d_{\omega-2}.1$ $l_{\omega-1}.1$

$x+t$ $x+t+1$ $x+t+2$ ….. $\omega-1$ ω

Inflow $l_{x+t}.P_x$ $l_{x+1}.P_x$ $l_{x+2}.P_x$ $l_{\omega-1}.P_x$

Gambar 5. Ilustrasi dari dana yang terkumpul dengan menggunakan metode prospektif

Berdasarkan gambar diatas, akan didapat persamaan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} Nilai\ Akumulasi \\ Dana \\ Pada\ saat\ usia \\ x+t\ tahun \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Nilai\ Akumulasi \\ Dana\ Outflow \end{pmatrix} - \ (Nilai\ Akumulasi\ Dana\ Inflow)$$

$$\begin{aligned} &= \left(d_{x+1}.1.v^1 + d_{x+t+1}.1.v^2 + \cdots + d_{\omega-1}.1.v^{\omega-(x-t)}\right) \\ &\quad - (l_{x+t}.P + l_{x+t+1}.P.v^1 + \cdots \\ &\quad + l_{\omega-1}.P.v^{\omega-(x+t)-1}) \qquad (2.9.6) \end{aligned}$$

Didapatkan total nilai sekarang dari dana yang terkumpul tersebut merupakan liabilitas (cadangan asuransi) pada saat nasabah berusia $x+t$ tahun. Berdasarkan persamaan (2.4.12) dan (2.4.9), dari (2.9.6) akan didapat nilai liabilitas (cadangan asuransi) pada saat $x+t$ tahun sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} Nilai\ Liabilitas \\ (cadangan) \\ Pada\ saat\ usia \\ x+t\ tahun \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= {}_{0|}q_{x+t}.v^1 + {}_{1|}q_{x+t}.v^2 + \ldots + {}_{\omega-(x+t)|}q_{x+t}.v^{\omega-(x+t)} - P\,(1 \\ &\quad + {}_{1}p_{x+t}.v^1 + {}_{2}p_{x+t}.v^2 + \ldots) \end{aligned}$$

$$= 1. A_{x+t} - P. \ddot{a}_{x+t} \qquad (2.9.7)$$

Karena jumlah seluruh dana liabilitas tersebut merupakan rata-rata dana untuk tertanggung yang masih hidup pada saat $x + t$, maka nilai dana liabilitas tersebut merupakan cadangan akhir tahun $x + t$ yang diberi simbol ${}_tV_x$. Jika benefit akan diberikan oleh perusahaan asuransi adalah sebesar N satuan, maka persamaan persamaan (2.10.7) menjadi:

$${}_tV_x = N. A_{x+t} - P. \ddot{a}_{x+t} \qquad (2.9.8)$$

Persamaan (2.9.8) merupakan persamaan cadangan asuransi jiwa seumur hidup yang dihitung secara prospektif ketika nasabah berusia $x + t$ tahun

2.10 Cadangan Disesuaikan

Umumnya seseorang yang telah menyatakan untuk mengikuti sebuah perjanjian asuransi harus membayarkan biaya kepada perusahaan asuransi. Biaya tersebut disebut juga dengan premi. Premi yang disajikan oleh perusahaan tidak hanya premi bersih saja melainkan terdapat premi kotor (gross premium). Premi kotor ini terdiri dari premi *netto* dan biaya. Hal ini dikarenakan perusahaan asuransi membutuhkan biaya-biaya lain untuk dapat menyelesaikan tugasnya. Biaya-biaya lain tersebut merupakan biaya pemeriksaan kesehatan bagi orang yang diasuransikan, biaya komisi, dan juga biaya untuk pembuatan dan pemeliharaan polis asuransi.

Bebarapa dari biaya-biaya tersebut harus dibayarkan pada tahun pertama, sehingga biaya pada tahun kedua dan seterusnya jauh lebih kecil dari biaya tahun pertama. Para pemegang polis harus menanggung biaya-biaya tersebut yang dibayarkan melalui premi kepada perusahaan asuransi. Biaya-biaya tersebut tidak akan cukup untuk membiayai pengeluaran perusahaan asuransi pada tahun-tahun permulaan polis, akan tetapi kekurangan tersebut akan tertutupi oleh premi tahun-tahun terakhir polis, karena biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan asuransi pada tahun-tahun terakhir polis lebih kecil dari biaya yang dibayarkan lewat premi. Oleh karena itu keadaan seperti ini mengharuskan perusahaan asuransi mencari sumber dana tambahan untuk menutupi biaya tahun-tahun permulaan yang kemudian akan dibayar kembali dari premi tahun-tahun berikutnya.

Dari masalah tersebut dapat diatasi dengan modifikasi cadangan atau cadangan yang disesuaikan. Hal ini memungkinkan perusahaan mendapatkan sumber dana baru untuk menutupi biaya ditahun-tahun permulaan polis. Dana tersebut dapat dianggap berupa pinjaman yang akan dibayar kemudian dari pembayaran premi kotor di tahun-tahun mendatang.

Misalkan P' menyatakan premi bersih datar untuk suatu jenis asuransi. Premi tersebut akan diganti dengan α pada tahun pertama dan β pada tahun-tahun berikutnya. α dan β adalah premi yang disesuaikan. Sebenarnya pemegang polis hanya membayar premi kotor yang sama besarnya tiap tahun,

yaitu $P + biaya$. Nilai α dan β hanya ada dalam perhitungan para aktuaris dan tidak ada sangkut pautnya dengan pemegang polis. P disatu pihak dan α dan β dipihak lain dihubungkan oleh:

Nilai tunai seluruh P = nilai tunai α + nilai tunai β

Persamaan ini berlaku pada waktu polis dikeluarkan. Bila n menyatakan jangka waktu penyesuaian cadangan, maka hubungan pada persamaan tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\alpha + \beta\, a_{x:\overline{n-1|}} = P\ a_{x:\overline{n|}} \qquad (2.10.1)$$

$\alpha < P$, karena sebagian dari P dipakai untuk biaya tahun pertama yaitu sebesar $P - \alpha$. Jadi, dari premi bersih tahun pertama sebesar P, hanya α yang disediakan untuk membayar santunan ditahun tersebut. Sisanya $P - \alpha$ dipinjam perusahaan dan pinjaman tersebut akan dibayar kelak dari premi-premi tahun berikutnya. Karena itu $\beta > P$. Jadi, $\alpha < P < \beta$.

(R.K. Sembiring, 1986)

2.10.1 Metode Zillmer

Metode Zillmer ditemukan oleh Dr. August Zillmer (1831-1893). Didalam metode ini melibatkan premi kotor dan premi bersih, premi kotor itu sendiri mengandung beberapa biaya yang digunakan oleh perusahaan asuransi. Biaya-biaya ini terdiri dari (R.K. Sembiring, 1986):

1. Biaya permulaan yaitu biaya pada tahun pertama (α), biaya yang harus dikeluarkan pada saat polis dikeluarkan (komisi, pemeriksa kesehatan, alat-alat tulis, dan sebagainya)
2. Biaya lanjutan yaitu biaya tahun-tahun selanjutnya (β), mencakup komisi lanjutan, biaya mengadministrasikan polis, biaya penyelesaian tagihan, dan sebagainya).

Biaya-biaya ini dapat pula dikelompokan menjadi:

1. Kelompok pertama: biaya yang sebanding dengan besar premi

2. Kelompok kedua: biaya yang sebanding dengan besar santunan
3. Kelompok ketiga: biaya yang yang tidak tergantung atas premi maupun santunan.

Dalam hal biaya pada kelompok pertama adalah komisi pada agen atau tenaga lapangan, terutama sekali pada tahun kedua dan seterusnya, Pada kelompok kedua adalah komisi utama pada agen, serta dikelompok ketiga adalah biaya pemeriksaan kesehatan, prangko, alat-alat tulis, dan sebagainya.

Misalkan premi bersih datar untuk asuransi seumur hidup dinyatakan dengan P dan premi kotor dinyatakan dengan P' dan besarnya biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan asuransi dinyatakan dengan y dari premi kotor. Ketiganya membentuk persamaan sebagai berikut:

$P' = P + yP'$, dengan y adalah biaya dalam %

$P' - yP' = P$

$P'(1 - y) = P$

$$P' = \frac{1}{1-y} \, . P \qquad (2.10.2)$$

Misalkan biaya dari santunan adalah b%, maka persamaan (2.10.2) menjadi:

$$P' = \frac{1}{1-y} . (P + b)$$

Misalkan f menyatakan selisih antara biaya permulaan (biaya yang harus dikeluarkan pada saat polis asuransi ditandatangani) dengan biaya lanjutan (biaya tahun-tahun selanjutnya) per 1 rupiah santunan atau sering pula disebut dengan biaya permulaan yang dinyatakan dalam persentase dari santunan. Sehingga yang dibayarkan secara tahunan menjadi:

$$P'.\ddot{a}_x = \frac{(P+b)\ddot{a}_x}{1-y} + f$$

$$P' = \frac{(P+b)}{1-y} + \frac{f}{\ddot{a}_x} \qquad (2.10.3)$$

Telah diketahui sebelumnya bahwa cadangan prospektif dengan santunan sebesar 1 satuan didefinisikan sebagai berikut:

$${}_t\bar{V}_x = A_{x+t} - P\,\ddot{a}_{x+t}$$

Berdasarkan persamaan (2.11.3) diperoleh cadangan asuransi jiwa yang disesuaikan dengan metode Zillmer adalah sebagai berikut:

$${}_t\bar{V}^z = A_{x+t} - (P'.(1-y) - b)\,a_{x+t}$$

$${}_t\bar{V}^z = A_{x+t} - \left(P + \frac{f}{\ddot{a}_x}\right)\ddot{a}_{x+t} \qquad (2.10.4)$$

Berdasarkan persamaan (2.10.4), bila $\frac{f}{\ddot{a}_x}$ kita nyatakan dengan r, maka premi Zillmer dapat dinyatakan dengan:

$$p^z = P + \frac{f}{\ddot{a}_x}$$

$$p^z = P + r$$

p^zmerupakan premi Zillmer, maka persamaan (2.10.4) menjadi:

$${}_t\bar{V}^z = A_{x+t} - (P+r)\ddot{a}_{x+t}$$

$${}_t\bar{V}^z = A_{x+t} - p^z\ddot{a}_{x+t} \qquad (2.10.5)$$

Persamaan (2.10.5) merupakan rumus cadangan dari metode Zillmer

2.10.2 Metode Fackler

Metode Fackler pertama kali diperkenalkan oleh aktuarias Amerika bernama David Parks Fackler. Rumus Fackler merupakan turunan dari rumus cadangan retrosfektif sehingga jelas bahwa metode Fackler adalah metode untuk menghitung nilai cadangan retrospektif.Dari persamaan (2.9.2) diatas diperoleh cadangan secara umum pada akhir tahun ke t adalah:

$$ {}_t\bar{V} = \frac{\left(l_{x+t-1} \cdot {}_{t-1}V + l_{x+t-1}.P\right)(1+i) - d_{x+t-1}}{l_{x+t}} \qquad (2.10.6)$$

dengan:

${}_tV$ = cadangan premi pada akhir tahun ke t

P = premi bersih tahunan

l_{x+t-1} = jumlah orang yang hidup pada usia$x+t-1$ tahun

d_{x+t-1} = jumlah orang meninggal pada usia$x+t-1$ tahun

Berdasarkan asumsi dari metode fackler yaitu nilai cadangan akhir yang ditentukan adalah cadangan akhir tahun berikutnya. Dengan kata lain nilai cadangan yang ditentukan adalah tahun $t+1$, sehingga diperoleh:

$$ {}_{t+1}\bar{V} = \frac{\left(l_{x+(t+1)-1} \cdot {}_{(t+1)-1}V + l_{x+(t+1)-1}.P\right)(1+i) - d_{x+(t+1)-1}}{l_{x+(t+1)}}$$

$$ {}_{t+1}\bar{V}^f = \frac{\left(l_{x+t} \cdot\ {}_tV + l_{x+t}.P\right)(1+i) - d_{x+t}}{l_{x+t+1}} \qquad (2.10.7)$$

Persamaan (2.10.7) diatas merupakan rumus cadangan dari metode Fackler

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun akademik 2016/2017.

3.2 Data Penelitian

Penelitian ini digunakan Tabel Mortalitas Indonesia tahun 2011, untuk laki-laki dan perempuan.

3.3 Metode dan Tahap Penelitian

Umumnya perusahaan asuransi hanya menggunakan salah satu cara perhitungan cadangan yang digunakan untuk membayarkan klaim yang akan terjadi. Yaitu menggunakan perhitungan cadangan Netto (Cadangan Premi). Cadangan Netto ini merupakan sejumlah uang yang dihimpun oleh perusahaan asuransi yang diperoleh dari selisih nilai santunan dengan nilai tunai pembayaran pada suatu waktu pertanggungan sebagai persiapan untuk pembayaran klaim. Salah satu cadangan Netto adalah cadangan prosfektif. Perhitungan cadangan Netto ini sering tidak cocok bagi suatu perusahaan terutama perusahaan kecil yang baru mulai tumbuh. Hal ini dikarenakan perusahaan asuransi memerlukan biaya-biaya lain dalam melaksanakan tugasnya. Seperti pemeriksaan kesehatan bagi orang yang diasuransikan, membayarkan komisi agen, dan juga biaya pembuatan & pemeliharaan polis asuransi.

Sebagian biaya-biaya tersebut harus dibayarkan pada tahun pertama, sehingga biaya pada tahun kedua dan seterusnya lebih kecil dari biaya tahun pertama. Biaya-biaya tersebut tentunya menjadi tanggungan pemegang polis yang dibayarkan melalui premi kepada perusahaan asuransi. Biaya yang dibayarkan melalui premi tidak akan cukup untuk membiayai pengeluaran perusaan asuransi pada tahun permulaan polis. Akan tetapi, kekurangan tersebut akan tertutupi oleh premi pada tahun-tahun terakhir polis, karena biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan asuransi pada tahun-tahun terakhir polis lebih kecil dari biaya yang dibayarkan lewat premi. Keadaan ini memaksa perusahaan asuransi mencari sumber dana tambahan untuk menutupi biaya tahun-tahun permulaan yang kemudian akan dibayar kembali dari premi tahun-tahun berikutnya.

Untuk mengatasi masalah tersebut, maka cadangan asuransi perlu disesuaikan dana penyesuaian ini akan memungkinkan perusahaan untuk mendapatkan sumber dana baru untuk menutupi biaya di tahun-tahun permulaan polis. Dana tersebut dapat dianggap sebagai pinjaman yang akan dibayar kemudian dari pembayaran premi di tahun-tahun mendatang.

Metode yang digunakan pada cadangan disesuaikan ini yaitu metode Zillmer dan metode Fackler. Metode Zillmer melibatkan premi kotor dan premi bersih, premi kotor ini sendiri mengandung beberapa biaya yang digunakan oleh perusahaan asuransi dan metode ini digunakan untuk menghitung nilai cadangan prospektif. Sedangkan, metode Fackler merupakan turunan dari rumus cadangan retrospektif sehingga jelas bahwa metode Fackler adalah metode untuk menghitung nilai cadangan retrospektif.

Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan asumsi-asumsi yang akan digunakan

   Asumsi-asumsi yang digunakanyaitu

   - Jenis Asuransi Jiwa seumur hidup
   - Usia nasabah
   - Masa asuransi, dan benefit yang digunakan
   - Tingkat suku bunga, dan force of interest
   - Menggunakan Life Table Mortalitas Tahun 2011

2. Menentukan premi tunggal dan nilai anuitas

   - Premi tunggal untuk asuransi jiwa seumur hidup
   - Berdasarkan persamaan (2.6.3) premi tunggal untuk asuransi jiwa seumur hidupnya yaitu:

   $$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} \, . \, e^{-\mu t} . \, \mu_{(t)} dt$$

   Berdasarkan asumsi yang digunakan akan diperoleh nilai anuitas hidupnya dari persamaan (2.7.12) sebagai berikut.:

   $$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = E[\bar{a}_T] = \int_0^n e^{-\delta t} . \, e^{-\mu t} dt$$

3. Menentukan premi bersih datar

   Setelah didapatkan nilai anuitasnya berdasarkan prinsip ekuivalen, yaitu prinsip yang digunakan untuk mengantisipasi kerugian yang diterima oleh perusahaan pada periode tertentu maka didapatkan pula premi tahunan/premi bersih datar untuk masing-masing jenis asuransi:

- Premi tahunan asuransi jiwa seumur hidup
- Berdasarkan persamaan (2.8.3) premi tahunannya adalah:

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = (\frac{B.\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{n|}}})$$

4. Menentukan nilai cadangan Netto

   Cadangan biasanya digunakan untuk dana yang disisihkan untuk dipakai dikeadaan darurat. Berdasarkan waktunya perhitungan cadangan dibagi menjadi dua yaitu cadangan retrosfektif (waktu yang telah berlalu) dan cadangan prosfektif (waktu dimasa yang akan datang).

   - Persamaan untuk cadangan retrospektif untuk asuransi jiwa seumur hidup adalah;

$${}_tV_x = \frac{\left(l_{x+t-1} \cdot {}_{t-1}V + l_{x+t-1}.P\right)(1+i) - d_{x+t-1}}{l_{x+t}}$$

   - Persamaan untuk cadangan prospektif untuk asuransi jiwa seumur hidup adalah;

$${}_t\bar{V}_x = B.\bar{A}_x - P\,\bar{a}_{x:\overline{n|}}$$

5. Menentukan premi untuk cadangan Zillmer dan Fackler

   - Premi untuk cadangan Zillmer

     Sebelum menghitung nilai cadangan Zillmer terlebih dahulu kita menentukan premi cadangan Zillmer. Di dalam perhitungan ini terdapat presentase biaya yang harus dikeluarkan yaitu f. Rumus premi pada cadangan Zillmer yaitu:

$$p^z = P + \frac{f}{\ddot{a}_x}$$

- Premi untuk cadangan Fackler

  Premi cadangan fackler untuk asuransi seumur hidup sama dengan premi tahunan untuk asuransi jiwa seumur hidup yaitu:

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \left(\frac{B.\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}\right)$$

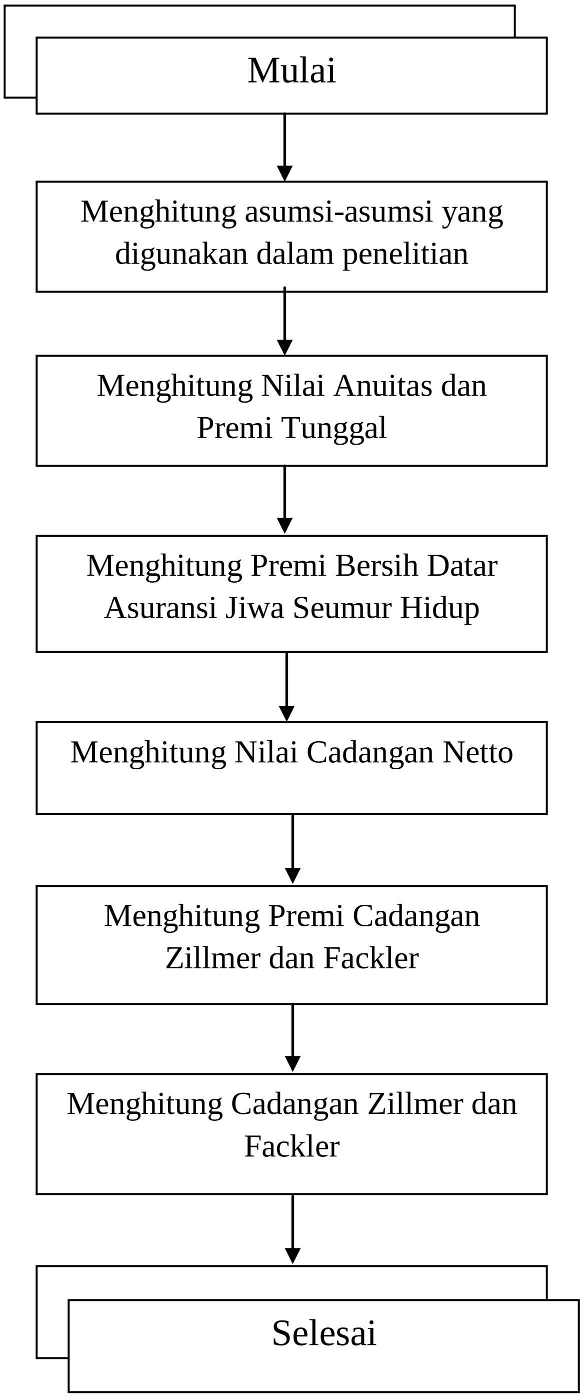
6. Menghitung nilai cadangan Zillmer dan Fackler

   Rumus untuk menghitung cadangan Zillmer adalah sebagai berikut:

$${}_t\bar{V}_x = B.\bar{A}_x - p^z\bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

   Rumus untuk menghitung cadangan Fackler adalah sebagai berikut:

$${}_{t+1}V = \frac{\left(l_{x+t}.\ {}_tV + l_{x+t}.P\right)(1+i) - d_{x+t}}{l_{x+t+1}}$$



Gambar 6. Diagram Alir Penenelitian

V. KESIMPULAN

Cadangan merupakan liabilitas atau kewajiban perusahaan asuransi untuk menyiapkan dana guna memenuhi pembayaran santunan/benefit nasabah asuransi. Dari hasil pembahasan yang telah dilakukan maka dapat ditarik beberapa kesimpulan yang diperoleh, yaitu:

1) Cadangan Zillmer dan cadangan Fackler pada produk asuransi jiwa seumur hidup untuk usia nasabah 30 tahun tidak memiliki nilai yang sama. Untuk tingkat suku bunga yang lebih kecil maupun besar, diperoleh bahwa cadangan Fackler memiliki nilai yang lebih besar dari cadangan Zillmer. Hal ini dikarenakan, pada cadangan Zillmer memasukan nilai biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan asuransi kedalam premi seperti biaya administrasi, komisi agen dan lainnya. Sedangkan pada cadangan Fackler tidak terdapat nilai biaya seperti yang telah disebutkan.
2) Semakin rendah nilai cadangan maka semakin sedikit biaya kewajiban yang dikeluarkan pihak perusahaan asuransi untuk membayarkan klaim kepada nasabah (pemegang polis), karena cadangan merupakan liabilitas.

DAFTAR PUSTAKA

Bowers, Newton L.1997.*Actuarial Mathematics*.The Society of Actuaries

Futami, Takashi. 1993. *Matematika Asuransi Jiwa Bagian I*. Oriental Life Insurance Cultural Development Centre, Inc. Tokyo, Japan

Frensidy, Budi. 2010. *Matematika Kuangan*. Jakarta. Salemba Empat

Purcell, Edwin J. 2005. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid I*. Dale Verberg

Sembiring, R.K. 1986. *Asuransi I Modul 1-9.* Jakarta :Karunika Jakarta