PEMBANDINGAN *MEAN SQUARED ERROR* (MSE)
METODE PRASAD-RAO DAN JIANG-LAHIRI-WAN PADA
***EMPERICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* (EBLUP)**

(Skripsi)

Oleh

RIFA RAHMA PERTIWI

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2017

ABSTRACT

COMPARISON OF MEAN SQUARED ERROR (MSE) PRASAD-RAO AND JIANG-LAHIRI-WAN METHODS IN EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION (EBLUP)

By

Rifa Rahma Pertiwi

EBLUP is one of the methods in small area estimation which used for continues data by substituting the unknown variance of random effects into BLUP estimation. Accuration of an estimator can be known by evaluating it's mean squared error. Several methods have been developed to estimate mean squared error of EBLUP. Prasad-Rao (1990) developed the estimator of MSE $(\hat{\theta}^{EBLUP})$ *with expansion of Taylor series. Jiang-Lahiri-Wan (2002) developed the estimator of MSE* $(\hat{\theta}^{EBLUP})$ *with jackknife method. The aim of this research is to compare the value of mean squared error in EBLUP with that two methods. Comparison is done empirically with the simulation data and helped by R 3.3.3 software. The result showed that estimation of mean squared error EBLUP with Jiang-Lahiri-Wan method is better because the values are smaller than MSE Prasad and Rao.*

Kata kunci: *Small Area Estimation*, *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP), *Mean Squared Error* (MSE).

ABSTRAK

PEMBANDINGAN *MEAN SQUARED ERROR* (MSE) METODE PRASAD-RAO DAN JIANG-LAHIRI-WAN PADA *EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* (EBLUP)

Oleh

Rifa Rahma Pertiwi

Metode EBLUP merupakan salah satu metode pendugaan pada area kecil yang digunakan pada data kontinu dengan mensubstitusikan komponen ragam yang tidak diketahui ke dalam penduga BLUP. Keakuratan penduga dapat diperoleh dengan cara mengukur *mean squared error*-nya. Beberapa metode telah dikembangkan dalam pendugaan MSE EBLUP. Prasad dan Rao (1990) mengembangkan penduga bagi MSE ($\hat{\theta}^{EBLUP}$) dengan menggunakan ekspansi deret Taylor. Jiang-Lahiri-Wan (2002) mengembangkan penduga bagi MSE ($\hat{\theta}^{EBLUP}$) dengan menggunakan metode *jackknife*. Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan nilai dugaan *mean squared error* pada EBLUP dengan kedua metode tersebut. Perbandingan dilakukan secara empiris melalui data simulasi dengan bantuan *software R 3.3.3*. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa metode pendugaan *mean squared error* EBLUP dengan metode Jiang-Lahiri-Wan relatif lebih baik karena menghasilkan nilai yang lebih kecil dibanding MSE Prasad dan Rao.

Kata kunci: Pendugaan Area Kecil, *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP), *Mean Squared Error* (MSE).

PEMBANDINGAN *MEAN SQUARED ERROR* (MSE)
METODE PRASAD-RAO DAN JIANG-LAHIRI-WAN PADA
***EMPERICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* (EBLUP)**

Oleh

Rifa Rahma Pertiwi

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2017

Judul Skripsi	:	**PEMBANDINGAN *MEAN SQUARED ERROR* (MSE) METODE PRASAD-RAO DAN JIANG-LAHIRI-WAN PADA *EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* (EBLUP)**
Nama Mahasiswa	:	Rifa Rahma Pertiwi
Nomor Pokok Mahasiswa	:	1317031070
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Widiarti, S.Si., M.Si.	**Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**
NIP 19800502 200501 2 003	NIP 19700831 199903 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Widiarti, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Utama	: **Drs. Nusyirwan, M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **20 September 2017**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Rifa Rahma Pertiwi

NPM : 1317031070

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul "Pembandingan *Mean Squared Error* (MSE) Metode Prasad-Rao Dan Jiang-Lahiri-Wan Pada *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP)" adalah benar hasil karya saya sendiri. Dalam skripsi ini tidak terdapat keseluruhan atau sebagian tulisan orang lain yang saya akui seolah sebagai tulisan saya.

Bandar Lampung, September 2017

Rifa Rahma Pertiwi

RIWAYAT HIDUP

Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara yang lahir di Kemiling pada tanggal 4 Februari 1996 dari pasangan Bapak M. Yunus dan Ibu Erma Yuni Wati.

Pendidikan penulis dimulai pada tahun 2000 di TK Budaya Bandar Lampung, pada tahun 2001 penulis melanjutkan pendidikan di SD Negeri 2 Sumberejo dan menyelesaikannya pada tahun 2007, sekolah menengah pertama di SMP Negeri 14 Bandar Lampung dan diselesaikan pada tahun 2010 serta dilanjutkan di SMA Persada Bandar Lampung yang diselesaikan tahun 2013. Selanjutnya, penulis terdaftar sebagai mahasiswi Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN) pada tahun 2013. Selama menjadi mahasiswa, penulis terdaftar dalam anggota Biro Kesekretariatan Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) dan ROIS FMIPA UNILA Tahun 2014/2015. Pada tahun 2016 penulis melaksanakan Kerja Praktek di Badan Pusat Statistik Kota Bandar Lampung dan Kuliah Kerja Nyata di Kampung Gunung Agung, Lampung Tengah.

Kini dengan penuh kerja keras, doa dan proses pembelajaran, akhirnya penulis dapat menyelesaikan pendidikan Strata 1 di Jurusan Matematika FMIPA Unila tahun 2017.

This undergraduate thesis is dedicated to

My parents

M. Yunus & Erma Yuni Wati

My dearest brother and sisters

Novia Niki Pertiwi

Shinta Sari Pertiwi (Alm.)

Muhammad Jefri Ar-Raihan

My lecturers

and my friends

For indeed, with hardship [will be] ease.

Indeed, with hardship [will be] ease.

[Quran 94 : 5-6]

SANWACANA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, karena berkat ridho dan rahmat-Nya skripsi ini dapat diselesaikan. Salawat serta salam semoga selalu tercurah kepada suri tauladan kita Nabi Muhammad SAW yang kita nantikan syafaatnya di *yaumil kiyamah* kelak, aamiin. Skripsi dengan judul "Pembandingan *Mean Squared Error* (MSE) Metode Prasad-Rao dan Jiang-Lahiri-Wan Pada *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP)" adalah salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains di Universitas Lampung.

Dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing utama yang telah dengan sabar meluangkan waktu, pikiran, tenaga dan membagi ilmu serta mengarahkan penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
2. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing kedua sekaligus dosen pembimbing akademik yang telah memberi saran dan mengarahkan penulis baik semasa perkuliahan maupun dalam penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Nusyirwan, M.Si., selaku dosen penguji atas saran dan kritik yang telah diberikan.
4. Ibu Wamiliana, M.Sc., P.hD., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

5. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., P.hD., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Kedua orang tua tercinta, Ibu Erma Yuni Wati dan Bapak M. Yunus yang selalu memberikan doa, semangat dan dukungan baik moral maupun materil.
7. Kakak penulis, Mbak Kiki yang selalu memberikan semangat dan menjadi pendengar yang baik selama proses penulisan skripsi ini, juga adik Raihan atas canda tawa yang diberikan.
8. Teman – teman seperjuangan Galuh, Tiyas, Dita, Lia, Nafisah, Nina, Aulianda, Hanifah, Imelda. Teman satu bimbingan Shella, Della, Chaterine juga teman-teman lain seperti Efrizal, Dimas, Dafri, Pranoto, Shintia, teman-teman Matematika 2013, Bang Gerry serta seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu atas bantuan dan semangat dalam penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, akan tetapi semoga skripsi ini dapat berguna serta menjadi bahan evaluasi untuk kedepannya.

Bandar Lampung,   2017
Penulis,

Rifa Rahma Pertiwi

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

y_i : nilai pendugaan langsung

θ_i : parameter *small area* yang ingin diamati

$\boldsymbol{x}_i^T$: peubah penyerta

v_i : pengaruh acak area kecil dimana $v_i \sim N(0, A)$

A : ragam pengaruh acak

$\hat{A}$: dugaan ragam pengaruh acak

$\hat{A}_{-u}$: dugaan ragam pengaruh acak setelah data area ke-u dihapus

$\boldsymbol{\beta}$: vektor parameter berukuran *px1*

$\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$: penduga bagi β dengan mensubstitusikan nilai A

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$: penduga bagi β dengan mensubustitusikan nilai $\hat{A}$

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{-u}$: penduga bagi β setelah data area ke-u dihapus

e_i : *sampling error* dimana $e_i \sim N(0, D_i)$

D_i : ragam *error*

m : banyaknya area

p : banyaknya peubah penyerta

$\mathrm{MSE}^{PR}\left(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}}\right)$: *mean squared error* EBLUP Prasad dan Rao

$\mathrm{MSE}^{\mathrm{JLW}}(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}})$: *mean squared error* EBLUP Jiang-Lahiri-Wan

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Suatu area disebut kecil apabila contoh yang diambil pada area tersebut tidak mencukupi untuk melakukan pendugaan langsung dengan hasil yang akurat. Pendekatan klasik untuk menduga parameter area kecil didasarkan pada aplikasi model desain penarikan sampel (*design-based*) yang dikenal sebagai pendugaan langsung (*direct estimation*). Dalam konteks survei, penduga dikatakan langsung apabila pendugaan terhadap parameter populasi di suatu area hanya didasarkan pada data sampel yang diperoleh dari area tersebut. Pendugaan langsung pada suatu area kecil merupakan penduga tak bias tetapi memiliki ragam yang besar karena diperoleh dari ukuran sampel yang kecil (Rao, 2003).

Pendugaan tidak langsung (*indirect estimation*) merupakan salah satu upaya untuk menekan ragam yang besar pada area kecil yaitu dengan memanfaatkan informasi dari area sekitarnya yang berhubungan dengan parameter yang diamati. Pendugaan tidak langsung tersebut dikenal sebagai pendugaan area kecil atau lebih dikenal dengan *Small Area Estimation* (SAE). Berbagai metode pendugaan area kecil (*small area estimation*) telah dikembangkan khususnya menyangkut metode yang berbasis model (*model-based estimator*). Beberapa metode yang tergolong dalam metode berbasis model adalah metode *Empirical Bayes* (EB), *Hierarchical Bayes* (HB), dan *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP). Metode EB dan HB digunakan untuk data biner atau cacahan sedangkan metode EBLUP digunakan pada data kontinu.

Metode EBLUP merupakan perluasan dari metode BLUP. Pada metode BLUP diasumsikan komponen ragam diketahui. Namun dalam kenyataannya, komponen ragam sulit untuk diketahui sehingga diperlukan pendugaan terhadap komponen ragam melalui data sampel. Metode EBLUP mensubstitusikan komponen ragam yang tidak diketahui ke dalam penduga BLUP.

Keakuratan penduga dapat diperoleh dengan cara mengukur *mean squared error*-nya. Semakin kecil *mean squared error* suatu penduga maka penduga semakin akurat. Beberapa metode telah dikembangkan dalam pendugaan MSE ($\hat{\theta}^{EBLUP}$). Prasad dan Rao (1990) mengembangkan penduga bagi MSE ($\hat{\theta}^{EBLUP}$) dengan menggunakan ekspansi deret Taylor. Jiang-Lahiri-Wan (2002) mengembangkan penduga bagi MSE ($\hat{\theta}^{EBLUP}$) dengan menggunakan metode *jackknife*. *Jackknife* merupakan suatu teknik *resampling* yang secara khusus digunakan untuk menentukan ragam dan bias dugaan. Prinsip metode *Jackknife* adalah dengan cara menghilangkan satu buah data dan mengulanginya sebanyak jumlah sampel data yang ada. Penelitian sebelumnya Jiang, Lahiri dan Wan (2002) dalam Rao (2003) membandingkan MSE EBLUP tersebut namun tanpa peubah penyerta.

Berdasarkan uraian tersebut, pada penelitian ini penulis tertarik untuk membandingkan nilai dugaan *mean squared error* pada penduga EBLUP menggunakan metode yang dikembangkan Prasad dan Rao dengan metode yang dikembangkan Jiang-Lahiri-Wan dengan mengikutsertakan peubah penyerta. Perbandingan akan dilakukan secara empiris melalui data simulasi dengan bantuan *software R 3.3.3*.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah membandingkan nilai dugaan *mean squared error* pada penduga EBLUP menggunakan metode yang dikembangkan Prasad dan Rao dengan metode yang dikembangkan Jiang-Lahiri-Wan.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah menambah informasi mengenai perbandingan nilai dugaan *mean squared error* pada penduga EBLUP menggunakan metode yang dikembangkan Prasad dan Rao dengan metode yang dikembangkan Jiang-Lahiri-Wan.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pendugaan Area Kecil

Suatu area disebut kecil apabila contoh yang diambil pada area tersebut tidak mencukupi untuk melakukan pendugaan langsung dengan hasil dugaan yang akurat. Penaksiran parameter di area kecil dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu penaksiran langsung (*direct estimation*) dan penaksiran tidak langsung (*indirect estimation*). Model desain penarikan sampel digunakan pada penaksiran langsung. Akan tetapi, penaksiran ini tidak dapat menghasilkan ketelitian yang cukup jika ukuran sampel dari *small area* yang diamati sangat kecil. Untuk membuat dugaan yang akurat dalam area kecil, maka digunakan pendugaan tidak langsung, yaitu dengan "meminjam kekuatan" dari peubah pendukung yang berkaitan dengan parameter yang ingin diduga (Rao, 2003).

Pendugaan tidak langsung pada area kecil inilah yang biasa disebut pendugaan area kecil (*small area estimation*). Menurut Longford (2005) pendugaan area kecil merupakan suatu metode yang digunakan untuk menduga parameter pada area kecil dengan memanfaatkan informasi dari luar area, dari dalam area itu sendiri, dan dari luar survei.

2.2 Model Area Kecil

Model area kecil merupakan model dasar dalam pendugaan area kecil. Dalam pendugaan area kecil terdapat dua jenis model dasar yang digunakan (Rao, 2003), yaitu :

2.2.1 *Basic Area Level (Type A) Model*

Basic Area Level Model atau dapat disebut sebagai model berbasis area merupakan model yang didasarkan pada ketersediaan data pendukung yang hanya ada untuk level area tertentu, yaitu $\boldsymbol{x}_i^T = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi})$. Parameter *small area* yang ingin diamati adalah θ_i. Parameter *small area* ini berhubungan linear dengan $\boldsymbol{x}_i^T$ mengikuti model linear berikut :

$$\theta_i = \boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + b_i v_i \qquad i = 1, 2, \dots, m \qquad (2.1)$$

dengan $v_i \sim N(0, A)$ sebagai pengaruh acak yang diasumsikan menyebar normal, sedangkan b_i merupakan konstanta positif yang diketahui dan $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ adalah vektor koefisien regresi berukuran $p \times 1$. Kesimpulan mengenai θ_i dapat diketahui dengan mengasumsikan bahwa model penduga langsung y_i telah tersedia, yaitu :

$$y_i = \theta_i + e_i \qquad i = 1, 2, \dots, m \qquad (2.2)$$

dengan *sampling error* $e_i \sim N(0, D_i)$ dan D_i diketahui. Dari kombinasi persamaan (2.1) dan (2.2) didapatkan model gabungan :

$$y_i = \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + b_i v_i + e_i \qquad i = 1, 2, ..., m \qquad (2.3)$$

dengan asumsi v_i dan e_i saling bebas. Rao (2003) menyatakan bahwa model tersebut merupakan bentuk khusus dari model linear campuran.

2.2.2 *Basic Unit Level (Type B) Model*

Basic Unit Level Model atau model berbasis unit merupakan suatu model dimana data pendukung yang tersedia bersesuaian secara individu dengan data respon, misal $\boldsymbol{x}_{ij} = (x_{ij1}, \dots, x_{ijp})^T$ artinya untuk masing-masing anggota populasi *j* dalam masing-masing area kecil *i,* namun terkadang cukup dengan rata-rata populasi $\overline{X_i}$ diketahui saja.

2.3 Model Fay-Herriot

Model ini diperkenalkan oleh Fay dan Herriot (1979) sebagai model dasar untuk menaksir pendapatan per kapita pada *small area* (dengan populasi yang kurang dari 1.000 jiwa penduduk) di Amerika Serikat menggunakan model dua level berikut :

Level 1 : $y_i|\theta_i \sim N(\theta_i, D_i)$

Level 2 : $\theta_i \sim N(x_i^T \beta, A)$

Model dua level diatas dapat dituliskan sebagai model linear campuran :

$$y_i = \theta_i + e_i = \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + v_i + e_i \qquad i = 1, 2, \dots, m \qquad (2.4)$$

Model Fay-Herriot ini merupakan kasus model area level seperti pada persamaan (2.3) dengan $b_i = 1$, sementara $v_i \sim N(0, A)$ dan $e_i \sim N(0, D_i)$.

2.4 Metode *Empirical Best Linear Unbiased Predictions* (EBLUP)

Asumsi dasar dalam pengembangan untuk model pendugaan area kecil adalah keragaman di dalam area kecil peubah respon dapat diterangkan oleh hubungan keragaman yang bersesuaian pada informasi tambahan yang disebut pengaruh tetap. Asumsi lainnya yaitu bahwa keragaman spesifik area kecil tidak dapat diterangkan oleh informasi tambahan dan merupakan pengaruh acak area kecil. Gabungan dari dua asumsi tersebut membentuk model pengaruh campuran. Salah satu sifat yang menarik dalam model campuran adalah kemampuan dalam hal menduga kombinasi linear dari pengaruh tetap dan pengaruh acak. Henderson mengembangkan teknik penyelesaian model pengaruh campuran untuk memperoleh prediksi tak-bias linear terbaik (*best linear unbiased prediction* / BLUP). Menurut Rao (2003), BLUP merupakan suatu pendugaan parameter yang meminimumkan *mean squared error* (MSE) diantara kelas-kelas pendugaan parameter linear tak bias lainnya. BLUP dihasilkan dengan asumsi bahwa komponen ragam diketahui. Namun faktanya, komponen ragam sulit bahkan tidak diketahui. Oleh karena itu, diperlukan pendugaan komponen ragam tersebut melalui data sampel. Model dasar dalam pengembangan pendugaan area kecil didasarkan pada bentuk model linier campuran sebagai berikut :

$$y_i = \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + v_i + e_i$$

Dimana

y_i : nilai pendugaan langsung berdasarkan rancangan survei

$\boldsymbol{x}_i$: vektor variabel pendukung yang elemen-elemennya diketahui

$\boldsymbol{\beta}$: vektor parameter berukuran *px1*

v_i : pengaruh acak area kecil dengan asumsi $v_i \sim N(0, A)$

e_i : *sampling error* yang tidak terobservasi dengan asumsi $e_i \sim N(0, D_i)$

Menurut Rao (2003) penduga BLUP yang terbentuk bagi $\theta_i = \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + v_i$ adalah :

$$\hat{\theta}_i^{BLUP} = \boldsymbol{x}_i^T \widetilde{\boldsymbol{\beta}} + \hat{v}_i = \boldsymbol{x}_i^T \widetilde{\boldsymbol{\beta}} + \gamma_i (y_i - \boldsymbol{x}_i^T \widetilde{\boldsymbol{\beta}}) \tag{2.5}$$

Sementara penduga bagi pengaruh acak ($\hat{v}_i$) dari penduga BLUP menurut McCulloh dan Searle diacu dalam Nissinen (2009) dihasilkan dari :

$$\begin{aligned} \hat{v}_i = E(v_i|y_i) &= E(v_i) + cov(v_i, y_i)[var(y_i)]^{-1}[y_i - E(y_i)] \\ &= 0 + A[A + D_i]^{-1}\left[y_i - \boldsymbol{x}_i^T \widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right] \\ &= \frac{A}{A + D_i}\left(y_i - \boldsymbol{x}_i^T \widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right) = \gamma_i\left(y_i - \boldsymbol{x}_i^T \widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Sedangkan $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ merupakan penduga bagi $\boldsymbol{\beta}$ yang dapat diperoleh dengan metode *generalized least square* dengan mendiferensialkan $(y - \boldsymbol{X\beta})^T V^{-1}(y - \boldsymbol{X\beta})$ terhadap $\boldsymbol{\beta}$ dimana $y = y_i$, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}_i^T$ dan $V = D_i + A$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left((y - \boldsymbol{X\beta})^T V^{-1}(y - \boldsymbol{X\beta})\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= \frac{\partial(y^T V^{-1} y - 2\boldsymbol{X}^T V^{-1} \boldsymbol{\beta}^T y + X^T \boldsymbol{\beta}^T V^{-1} \boldsymbol{X\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \\ &= -2\boldsymbol{X}^T V^{-1} y + 2\boldsymbol{X}^T V^{-1} \boldsymbol{X\beta} \end{aligned}$$

Untuk memperoleh nilai penduga bagi $\boldsymbol{\beta}$, hasil tersebut disamakan dengan nol, sehingga

$$-2\boldsymbol{X}^T V^{-1} y + 2\boldsymbol{X}^T V^{-1} \boldsymbol{X\beta} = 0$$

$$2\boldsymbol{X}^T V^{-1} \boldsymbol{X\beta} = 2\boldsymbol{X}^T V^{-1} y$$

$$\boldsymbol{X}^T V^{-1} \boldsymbol{X\beta} = \boldsymbol{X}^T V^{-1} y$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^T V^{-1} \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^T V^{-1} y$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T}{(D_i + A)}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\boldsymbol{x}_i y_i}{(D_i + A)}\right) \tag{2.7}$$

Sehingga persamaan (2.5) menjadi

$$\hat{\theta}_i^{BLUP} = \boldsymbol{x}_i^T \widetilde{\boldsymbol{\beta}} + \gamma_i \left(y_i - \boldsymbol{x}_i^T \widetilde{\boldsymbol{\beta}}\right)$$

$$= \boldsymbol{x}_i^T \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T}{(D_i + A)}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\boldsymbol{x}_i y_i}{(D_i + A)}\right) +$$

$$\frac{A}{A + D_i} \left(y_i - \boldsymbol{x}_i^T \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T}{(D_i + A)}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\boldsymbol{x}_i y_i}{(D_i + A)}\right) \right) \tag{2.8}$$

Penduga BLUP pada persamaan (2.8) masih bergantung pada komponen ragam A yang pada prakteknya tidak diketahui nilainya, sehingga harus ditaksir dari data. Dengan mensubstitusi $\hat{A}$ ke A pada persamaan (2.8) diperoleh penduga EBLUP bagi $\theta_i = \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + v_i$ sebagai berikut :

$$\hat{\theta}_i^{EBLUP} = \boldsymbol{x}_i^T \widehat{\boldsymbol{\beta}} + \widehat{\gamma}_i (y_i - \boldsymbol{x}_i^T \widehat{\boldsymbol{\beta}}) \tag{2.9}$$

Dengan

$$\widehat{\gamma}_i = \frac{\hat{A}}{\hat{A} + D_i}, \quad \text{untuk } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Dan

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T}{(D_i + \hat{A})}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\boldsymbol{x}_i y_i}{(D_i + \hat{A})}\right) \tag{2.10}$$

Dimana $\widehat{\gamma}_i$ dan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ merupakan nilai γ_i dan $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ saat A disubstitusikan dengan nilai dugaannya $\hat{A}$.

Menurut Wan (1999) nilai $\hat{A}$ tersebut dapat diperoleh dengan metode *moment* yaitu $\hat{A} = \max(0, \hat{A})$

Dimana

$$\hat{A} = \frac{1}{m-p} \sum_{i=1}^{m} \left[\left(y_i - \boldsymbol{x}_i^T \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} \right)^2 - D_i (1 - h_i) \right] \tag{2.11}$$

Dengan

$$h_i = \boldsymbol{x}_i^T \left(\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T \right)^{-1} \boldsymbol{x}_i$$

Dan

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = \left(\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_i y_i \right)$$

2.5 *Mean Squared Error* (MSE) Pada EBLUP

Misalkan θ merupakan suatu parameter dan $\hat{\theta}$ merupakan taksiran dari parameter θ. MSE dari $\hat{\theta}$ didefinisikan sebagai berikut :

Misalkan $\mathrm{E}[\hat{\theta}\,]$ = a, yang belum tentu θ,

$$\begin{aligned}
\mathrm{MSE}[\hat{\theta}\,] &= \mathrm{E}\left[(\hat{\theta} - \theta)^2 \right] \\
&= \mathrm{E}\left[(\hat{\theta} - \mathrm{a} + \mathrm{a} - \theta)^2 \right] \\
&= \mathrm{E}\left[(\hat{\theta} - a)^2 + 2(\hat{\theta} - a)(a - \theta) + (a - \theta)^2 \right] \\
&= \mathrm{E}\left[(\hat{\theta} - a)^2 \right] + 2\mathrm{E}[(\hat{\theta} - a)](a - \theta) + \mathrm{E}[(a - \theta)^2] \\
&= \mathrm{E}\left[(\hat{\theta} - a)^2 \right] + \underbrace{2\mathrm{E}[(\hat{\theta} - a)]}_{=0} (a - \theta) + \mathrm{E}(a - \theta)^2
\end{aligned}$$

$\mathrm{MSE}[\hat{\theta}\,] = var[\hat{\theta}\,] + [bias(\hat{\theta})^2]$; karena $2\mathrm{E}[(\hat{\theta} - a)] = 0$

Berdasarkan definisi MSE tersebut, jika $\hat{\theta}$ yang diperoleh *unbiased,* maka MSE dari $\hat{\theta}$ akan sama dengan variansi dari $\hat{\theta}$. Sedangkan *standar error* dari $\hat{\theta}$ didefinisikan sebagai akar kuadrat positif dari MSE$\left[\hat{\theta}\ \right]$.

Nilai MSE dari suatu taksiran parameter memiliki peranan penting untuk diketahui, diantaranya adalah untuk mengukur seberapa baik taksiran parameter yang diperoleh.

2.5.1 MSE EBLUP Prasad dan Rao

Prasad dan Rao (1990) mendefinisakan MSE $(\hat{\theta}_i^{\text{EBLUP}})$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\text{MSE}\left(\hat{\theta}_i^{\text{EBLUP}}\right) &= \text{E}\,(\hat{\theta}_i^{\text{EBLUP}} - \theta_i)^2 \\ &= \text{MSE}(\hat{\theta}_i^{\text{BLUP}}) + \text{E}[(\hat{\theta}_i^{\text{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\text{BLUP}})]^2 \qquad (2.12)\end{aligned}$$

Dimana MSE$(\hat{\theta}_i^{\text{BLUP}})$ dijabarkan sebagai berikut :

$$\text{MSE}\left(\hat{\theta}_i^{\text{BLUP}}\right) = \text{E}\,(\hat{\theta}_i^{\text{BLUP}} - \theta_i)^2$$

$$= \text{E}\left[\hat{\theta}_i^{\text{BLUP}} - \left(\boldsymbol{x_i^T\beta} + v_i\right)\right]^2$$

$$= \text{E}\left[\left(\boldsymbol{x_i^T\tilde{\beta}} + \frac{A}{A+D_i}(y_i - \boldsymbol{x_i^T\tilde{\beta}})\right) - \left(\boldsymbol{x_i^T\beta} + v_i\right)\right]^2$$

$$= \text{E}\left[\left(\boldsymbol{x_i^T\tilde{\beta}} + \frac{A}{A+D_i}y_i - \frac{A}{A+D_i}\boldsymbol{x_i^T\tilde{\beta}}\right) - \left(\boldsymbol{x_i^T\beta} + v_i\right)\right]^2$$

$$= \text{E}\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{x_i^T\tilde{\beta}} + \frac{A}{A+D_i}y_i - \frac{A}{A+D_i}\boldsymbol{x_i^T\tilde{\beta}} + \boldsymbol{x_i^T\beta} - \boldsymbol{x_i^T\beta} + \\ \frac{A}{A+D_i}\boldsymbol{x_i^T\beta} - \frac{A}{A+D_i}\boldsymbol{x_i^T\beta}\end{pmatrix} - \left(\boldsymbol{x_i^T\beta} + v_i\right)\right]^2$$

$$= \mathrm{E}\ \left[\left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + \frac{A}{A+D_i}y_i - \frac{A}{A+D_i}\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{x}_i^T\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} - \frac{A}{A+D_i}\boldsymbol{x}_i^T\widetilde{\boldsymbol{\beta}} + \frac{A}{A+D_i}\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right) - \left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + v_i\right)\right]^2$$

$$= \mathrm{E}\ \left[\left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + \frac{A}{A+D_i}(y_i - \boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{x}_i^T(\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) - \frac{A}{A+D_i}\boldsymbol{x}_i^T(\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})\right) - \left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + v_i\right)\right]^2$$

$$= \mathrm{E}\ \left[\left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + \frac{A}{A+D_i}(y_i - \boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta}) + \left(\boldsymbol{x}_i^T - \frac{A}{A+D_i}\boldsymbol{x}_i^T\right)(\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})\right) - \left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + v_i\right)\right]^2$$

$$= \mathrm{E}\left[\underbrace{\left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + \frac{A}{A+D_i}(y_i - \boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta}) - \left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + v_i\right)\right)}_{(i)} + \underbrace{\left(\boldsymbol{x}_i^T - \frac{A}{A+D_i}\boldsymbol{x}_i^T\right)(\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})}_{(ii)}\right]^2$$

$$= \mathrm{E}\left[\left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + \frac{A}{A+D_i}(y_i - \boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta}) - \left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + v_i\right)\right)\right]^2 +\ \mathrm{E}\ \left[\left(\boldsymbol{x}_i^T - \frac{A}{A+D_i}\boldsymbol{x}_i^T\right)(\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})\right]^2 + 2cov[(i),(ii)]$$

$$= \mathrm{E}\left[\left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + \frac{A}{A+D_i}(y_i - \boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta}) - \left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + v_i\right)\right)\right]^2 + \mathrm{E}\ \left[\left(\boldsymbol{x}_i^T - \frac{A}{A+D_i}\boldsymbol{x}_i^T\right)(\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})\right]^2 \qquad (2.13)$$

Dengan

$$\mathrm{E}\ \left[\left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + \frac{A}{A+D_i}(y_i - \boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta}) - \left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + v_i\right)\right)\right]^2$$

$$= \mathrm{E}\ \left[\left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + \frac{A}{A+D_i}(v_i + e_i) - \left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + v_i\right)\right)\right]^2$$

$$= \mathrm{E}\ \left[\frac{A}{A+D_i}(v_i + e_i) - v_i\right]^2$$

$$= \mathrm{E}\ \left[\left(\frac{A}{A+D_i}(v_i + e_i) - v_i\right).\left(\frac{A}{A+D_i}(v_i + e_i) - v_i\right)^T\right]$$

$$= \mathrm{E}\ \left[\left(\frac{A}{A+D_i}(v_i + e_i) - v_i\right).\ \left(\frac{A}{A+D_i}(v_i + e_i)^T - {v_i}^T\right)\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\left(\frac{A}{A+D_i}(v_i+e_i)-v_i\right).\ \left(\frac{A}{A+D_i}({v_i}^T+{e_i}^T)-{v_i}^T\right)\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\left(\frac{A}{A+D_i}(v_i+e_i)\right).\ \left(\frac{A}{A+D_i}({v_i}^T+{e_i}^T)\right)\right]-\mathrm{E}\left(\frac{A}{A+D_i}(v_i+e_i)\,{v_i}^T\right)-$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{A}{A+D_i}(v_i+e_i)\,v_i\right)+\mathrm{E}\left(v_i{v_i}^T\right)$$

$$=\left(\frac{A}{A+D_i}\right)^2\mathrm{E}\left(v_i{v_i}^T-v_i{e_i}^T-{v_i}^Te_i+e_i{e_i}^T\right)-\left(\frac{A}{A+D_i}\right)\mathrm{E}\left(v_i{v_i}^T-e_i{v_i}^T\right)-$$

$$\left(\frac{A}{A+D_i}\right)\mathrm{E}\left(v_i{v_i}^T-v_i{e_i}^T\right)+\ \mathrm{E}\left(v_i{v_i}^T\right)$$

$$=\left(\frac{A}{A+D_i}\right)^2\left[\mathrm{E}\ (v_i{v_i}^T)-\mathrm{E}(v_i{e_i}^T)-\mathrm{E}({v_i}^Te_i)+\mathrm{E}(e_i{e_i}^T)\right]-$$

$$\left(\frac{A}{A+D_i}\right)[\mathrm{E}\,(v_i{v_i}^T)-\mathrm{E}(e_i{v_i}^T)]-\left(\frac{A}{A+D_i}\right)[\mathrm{E}\,(v_i{v_i}^T)-\mathrm{E}(v_i{e_i}^T)]+\ \mathrm{E}\left(v_i{v_i}^T\right)$$

$$=\ \left(\frac{A}{A+D_i}\right)^2(A-0-0+D_i)-\left(\frac{A}{A+D_i}\right)(A-0)-\left(\frac{A}{A+D_i}\right)(A-0)+\ A$$

$$=\ \left(\frac{A}{A+D_i}\right)^2(A+D_i)-\left(\frac{A}{A+D_i}\right)(A)-\left(\frac{A}{A+D_i}\right)(A)+\ A$$

$$=\ \left(\frac{(A)^2}{A+D_i}\right)-2\left(\frac{A}{A+D_i}\right)(A)+\ A$$

$$=\ \left(\frac{(A)^2}{A+D_i}\right)-2\left(\frac{(A)^2}{A+D_i}\right)+\ A$$

$$=\ A-\left(\frac{(A)^2}{A+D_i}\right)$$

$$=\ \left(\frac{A(A+D_i)-(A)^2}{A+D_i}\right)$$

$$=\ \frac{(A)^2+(A\,D_i)-(A)^2}{A+D_i}$$

$$=\frac{AD_i}{A+D_i}=g1i(A) \tag{2.14}$$

Dan

$$\mathrm{E}\left[\left(\boldsymbol{x}_i^T - \frac{A}{A+D_i}\boldsymbol{x}_i^T\right)(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})\right]^2 = \mathrm{E}\left[\left(1-\frac{A}{A+D_i}\right)\boldsymbol{x}_i^T(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})\right]^2$$

$$= \left(1-\frac{A}{A+D_i}\right)^2 \mathrm{E}\left[\boldsymbol{x}_i^T(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})\right]^2$$

$$= \left(1-\frac{A}{A+D_i}\right)^2 \mathrm{E}\left[(\boldsymbol{x}_i^T(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})).((\widetilde{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{x}_i^T)^T\right]$$

$$= \left(1-\frac{A}{A+D_i}\right)^2 \mathrm{E}\left[\boldsymbol{x}_i^T(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})\,(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})^T\boldsymbol{x}_i\right]$$

$$= \left(1-\frac{A}{A+D_i}\right)^2 \boldsymbol{x}_i^T\,\mathrm{E}\left[(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})\,(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})^T\right]\,\boldsymbol{x}_i \qquad (2.15)$$

$$(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}) = \left(\frac{\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T}{(D_i+A)}\right)^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{x}_i y_i}{(D_i+A)}\right) - \frac{y_i - v_i - e_i}{\boldsymbol{x}_i^T}$$

$$= \frac{\boldsymbol{x}_i y_i}{\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T} - \left(\frac{\boldsymbol{x}_i}{\boldsymbol{x}_i}.\frac{y_i - v_i - e_i}{\boldsymbol{x}_i^T}\right) = \frac{\boldsymbol{x}_i y_i}{\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T} - \frac{\boldsymbol{x}_i y_i - \boldsymbol{x}_i v_i - \boldsymbol{x}_i e_i}{\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T}$$

$$= \frac{\boldsymbol{x}_i v_i + \boldsymbol{x}_i e_i}{\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T} = \frac{\boldsymbol{x}_i(v_i + e_i)}{\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T} \qquad (2.16)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.16) ke persamaan (2.15) diperoleh :

$$= \left(1-\frac{A}{A+D_i}\right)^2 \boldsymbol{x}_i^T\,\mathrm{E}\left[(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})\,(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})^T\right]\,\boldsymbol{x}_i$$

$$= \left(1-\frac{A}{A+D_i}\right)^2 \boldsymbol{x}_i^T\,\mathrm{E}\left[\left(\frac{\boldsymbol{x}_i(v_i+e_i)}{\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T}\right)\left(\frac{(v_i+e_i)^T}{\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{x}_i}\right)\right]\boldsymbol{x}_i$$

$$= \left(1-\frac{A}{A+D_i}\right)^2 \boldsymbol{x}_i^T\,\boldsymbol{x}_i\,\mathrm{E}\left[\frac{(v_i+e_i)(v_i+e_i)^T}{\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T\,\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{x}_i}\right]\boldsymbol{x}_i^T\,\boldsymbol{x}_i$$

$$= \left(1-\frac{A}{A+D_i}\right)^2 \boldsymbol{x}_i^T\,\boldsymbol{x}_i\left[\frac{\mathrm{E}\;(v_i{v_i}^T) + \mathrm{E}(v_i{e_i}^T) + \mathrm{E}({v_i}^Te_i) + \mathrm{E}(e_i{e_i}^T)}{\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T\,\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{x}_i}\right]\boldsymbol{x}_i^T\,\boldsymbol{x}_i$$

$$= \left(1-\frac{A}{A+D_i}\right)^2 \boldsymbol{x}_i^T\,\boldsymbol{x}_i\left[\frac{A+0+0+D_i}{\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^T\,\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{x}_i}\right]\boldsymbol{x}_i^T\,\boldsymbol{x}_i$$

$$= \left(1 - \frac{A}{A + D_i}\right)^2 \frac{\boldsymbol{x_i^T}\ \boldsymbol{x_i}}{\boldsymbol{x_i}\boldsymbol{x_i^T}}\ (A + D_i)\ \frac{\boldsymbol{x_i^T}\ \boldsymbol{x_i}}{\boldsymbol{x_i^T}\ \boldsymbol{x_i}}$$

$$= \left(1 - \frac{A}{A + D_i}\right)^2 \frac{\boldsymbol{x_i^T}\ \boldsymbol{x_i}}{\boldsymbol{x_i}\boldsymbol{x_i^T}}\ (A + D_i)$$

$$= \left(1 - \frac{A}{A + D_i}\right)^2 \boldsymbol{x_i^T} \left(\frac{A + D_i}{\boldsymbol{x_i}\boldsymbol{x_i^T}}\right)\ \boldsymbol{x_i} = \ g2i(A) \qquad (2.17)$$

(Amaliana, 2012)

Sehingga, dengan mensubstitusikan persamaan (2.14) dan (2.17) ke persamaan (2.13), diperoleh

$$\mathrm{MSE}\left(\hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}}\right) = g1i(A) + \ g2i(A)$$

$$= \frac{AD_i}{A + D_i} + \left(1 - \frac{A}{A + D_i}\right)^2 \boldsymbol{x_i^T} \left(\frac{A + D_i}{\boldsymbol{x_i}\boldsymbol{x_i^T}}\right)\ \boldsymbol{x_i} \qquad (2.18)$$

Oleh karena itu persamaan (2.12) menjadi :

$$\mathrm{MSE}\ \left(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}}\right) = \mathrm{MSE}\left(\hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}}\right) + \mathrm{E}[(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}})]^2$$

$$= g1i(A) + \ g2i(A) + \mathrm{E}[(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}})]^2 \qquad (2.19)$$

Prasad dan Rao (1990) menggunakan aproksimasi deret Taylor untuk menghitung $\mathrm{E}[(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}})]^2$ sebagai berikut :

$\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}} = \widehat{\theta}_i(\hat{A})$ dan $\hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}} = \widehat{\theta}_i(A)$

Dengan menggunakan aproksimasi deret Taylor orde pertama dari $\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}}$ disekitar A, maka

$$\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}} \approx \hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}} + \frac{\partial\left(\hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}}\right)}{\partial A}\left(\hat{A} - A\right)$$

$$\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}} \approx \frac{\partial\left(\hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}}\right)}{\partial A}\left(\hat{A} - A\right)$$

$$\left[\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}}\right]^2 \approx \left[\frac{\partial\left(\hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}}\right)}{\partial A}\left(\hat{A} - A\right)\right]^2$$

$$\frac{\partial\left(\hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}}\right)}{\partial A} \approx \frac{\partial\left(\left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + \frac{A}{A+D_i}(y_i - \boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta}) + \left(\boldsymbol{x}_i^T - \frac{A}{A+D_i}\boldsymbol{x}_i^T\right)(\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})\right)\right)}{\partial A}$$

$$\approx \frac{\partial\left(\left(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta} + \frac{A}{A+D_i}(y_i - \boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta}) + \left(1 - \frac{A}{A+D_i}\right)\boldsymbol{x}_i^T(\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})\right)\right)}{\partial A}$$

$$\approx \frac{\partial(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta})}{\partial A} + \frac{\partial\left(\frac{A}{A+D_i}(y_i - \boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta})\right)}{\partial A} + \frac{\partial\left(\left(1 - \frac{A}{A+D_i}\right)\boldsymbol{x}_i^T(\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})\right)}{\partial A}$$

Dengan asumsi $\frac{\partial\left(\left(1-\frac{A}{A+D_i}\right)\boldsymbol{x}_i^T(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})\right)}{\partial A} \approx 0$, maka diperoleh

$$\frac{\partial\left(\hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}}\right)}{\partial A} \approx \frac{\partial\left(\frac{A}{A+D_i}(y_i - \boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta})\right)}{\partial A}$$

Sehingga

$$\left[\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}}\right]^2 \approx \left[\left(\frac{\partial\left(\frac{A}{A+D_i}(y_i - \boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta})\right)}{\partial A}\right)(\hat{A} - A)\right]^2$$

$$\mathrm{E}\left[\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}}\right]^2 \approx \mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial\left(\frac{A}{A+D_i}(y_i - \boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta})\right)}{\partial A}\right)(\hat{A} - A)\right]^2$$

$$\approx \mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial\left(\frac{A}{A+D_i}\right)}{\partial A}(v_i + e_i)\right)\left(\frac{\partial\left(\frac{A}{A+D_i}\right)}{\partial A}(v_i + e_i)\right)^T\right]\mathrm{E}\left[(\hat{A} - A)(\hat{A} - A)^T\right]$$

$$\approx \mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial\left(\frac{A}{A+D_i}\right)}{\partial A}\right)(v_i + e_i)(v_i + e_i)^T\left(\frac{\partial\left(\frac{A}{A+D_i}\right)}{\partial A}\right)^T\right] var(\hat{A})$$

$$\approx \left(\frac{\partial\left(\frac{A}{A+D_i}\right)}{\partial A}\right)\mathrm{E}[(v_i + e_i)({e_i}^T + {v_i}^T)]\left(\frac{\partial\left(\frac{A}{A+D_i}\right)}{\partial A}\right)^T var(\hat{A})$$

$$\approx \left(\frac{\partial\left(\frac{A}{A+D_i}\right)}{\partial A}\right) \mathrm{E}[v_i {e_i}^T + v_i {v_i}^T + e_i {e_i}^T + e_i {v_i}^T] \left(\frac{\partial\left(\frac{A}{A+D_i}\right)}{\partial A}\right)^T var(\hat{A})$$

$$\approx \left(\frac{\partial\left(\frac{A}{A+D_i}\right)}{\partial A}\right) [0 + A + D_i + 0] \left(\frac{\partial\left(\frac{A}{A+D_i}\right)}{\partial A}\right)^T var(\hat{A})$$

$$\approx \left(\frac{\partial\left(\frac{A}{A+D_i}\right)}{\partial A}\right) (A + D_i) \left(\frac{\partial\left(\frac{A}{A+D_i}\right)}{\partial A}\right)^T var(\hat{A})$$

dengan

$$\left(\frac{\partial\left(\frac{A}{A+D_i}\right)}{\partial A}\right) = \frac{\partial}{\partial A}\left((A)(A+D_i)^{-1}\right)$$

$$= 1.(A+D_i)^{-1} + (-1(A+D_i)^{-2}).1.A$$

$$= \frac{(A+D_i)}{(A+D_i)^2} - \frac{A}{(A+D_i)^2} = \frac{D_i}{(A+D_i)^2}$$

Sehingga diperoleh :

$$\mathrm{E}[(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}})]^2$$

$$\approx \frac{D_i}{(A+D_i)^2} (A+D_i) \left(\frac{D_i}{(A+D_i)^2}\right)^T var(\hat{A})$$

$$= \frac{{D_i}^2}{(A+D_i)^3} var(\hat{A})$$

$$= \frac{{D_i}^2}{(A+D_i)^3} 2m^{-1}((A+D_i)^2)$$

$$= \frac{2{D_i}^2}{m\ (A+D_i)} = g3i(A) \qquad (2.20)$$

Sehingga persamaan (2.19) menjadi :

$$\mathrm{MSE}\left(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}}\right) = \mathrm{MSE}\left(\hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}}\right) + \mathrm{E}[(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}})]^2$$

$$= g1i(A) + g2i(A) + g3i(A) \qquad (2.21)$$

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, bahwa pada EBLUP nilai yang digunakan adalah dugaan pengaruh acak ($\hat{A}$). Dengan mensubstitusikan $\hat{A}$ ke persamaan (2.11) maka diperoleh :

$$\mathrm{MSE}\left(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}}\right) = \mathrm{MSE}\left(\hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}}\right) + \mathrm{E}[(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\mathrm{BLUP}})]^2$$

$$= g1i(\hat{A}) + g2i(\hat{A}) + g3i(\hat{A}) \qquad (2.22)$$

Namun, $g1i(\hat{A})$ tersebut bersifat bias terhadap $g1i(A)$ sehingga perlu dicari nilai $g1i(\hat{A})$ yang tak bias. Prasad dan Rao (1990) memperoleh nilai $g1i(\hat{A})$ yang tak bias dengan menggunakan ekspansi deret Taylor dari $g1i(\hat{A})$disekitar A dan selanjutnya menghitung ekspektasinya. Sehingga diperoleh bahwa $g1i(A) = g1i(\hat{A}) + g3i(\hat{A})$.

Sehingga MSE EBLUP yang diperoleh sebagai berikut :

$$\mathrm{MSE}^{PR}\left(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}}\right) = g1i(\hat{A}) + g2i(\hat{A}) + 2g3i(\hat{A}) \qquad (2.23)$$

Dengan

$$g1i(\hat{A}) = \frac{\hat{A}D_i}{\hat{A} + D_i},$$

$$g2i(\hat{A}) = \left(1 - \frac{\hat{A}}{\hat{A} + D_i}\right)^2 \boldsymbol{x}_i^T \left(\frac{\hat{A} + D_i}{\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^T}\right) \boldsymbol{x}_i \, ,$$

$$g3i(\hat{A}) = \frac{2{D_i}^2}{m\left(\hat{A} + D_i\right)}$$

(Prasad dan Rao, 1990)

2.5.2 MSE EBLUP Dengan Metode *Jackknife* Jiang-Lahiri-Wan

Jiang, Lahiri dan Wan (2002) mengembangkan penduga *jackknife* untuk MSE EBLUP sebagai berikut :

$$\mathrm{MSE}\,(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}}) = \mathrm{E}\,(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}} - \theta_i)^2$$

$$= \mathrm{E}\,[(\hat{\theta}_i^{\mathrm{BP}} - \theta_i)]^2 + \mathrm{E}[(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\mathrm{BP}})]^2$$

Dimana $\mathrm{E}\left[\left(\hat{\theta}_i^{\mathrm{BP}} - \theta_i\right)\right]^2$ merupakan $\mathrm{MSE}\left(\hat{\theta}_i^{\mathrm{BP}}\right) = g1i(A) = \frac{AD_i}{A+D_i}$

(persamaan (2.14)), sehingga

$$\mathrm{MSE}\,(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}}) = \mathrm{E}\,[(\hat{\theta}_i^{\mathrm{BP}} - \theta_i)]^2 + \mathrm{E}[(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\mathrm{BP}})]^2$$

$$= \mathrm{MSE}\left(\hat{\theta}_i^{\mathrm{BP}}\right) + \mathrm{E}[(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\mathrm{BP}})]^2$$

$$= g1i(A) + \mathrm{E}[(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\mathrm{BP}})]^2 \tag{2.24}$$

Karena pada EBLUP nilai A tidak diketahui sehingga perlu dilakukan pendugaan terhadap nilai A tersebut dengan persamaan (2.10). Dengan mensubstitusikan nilai $\hat{A}$ ke A maka diperoleh :

$$\mathrm{MSE}\,(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}}) = g1i(\hat{A}) + \mathrm{E}[(\hat{\theta}_i^{\mathrm{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\mathrm{BP}})]^2 \tag{2.25}$$

Dimana

$$g1i(\hat{A}\,) = \frac{\hat{A}\,D_i}{\hat{A}\,+D_i},$$

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, bahwa $g1i(\hat{A}\,) = \frac{\hat{A}\,D_i}{\hat{A}\,+D_i}$ bersifat bias, berbeda dengan Prasad dan Rao yang medapatkan nilai tersebut dengan ekspansi deret Taylor, Jiang-Lahiri-Wan menggunakan konsep jackknife untuk mengoreksi bias $g1i(\hat{A}\,)$ sebagai berikut :

$$\text{MSE }(\hat{\theta}_i^{\text{EBLUP}}) = g1i(\hat{A}) + \text{E}[(\hat{\theta}_i^{\text{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\text{BP}})]^2 + \text{E}[(\hat{\theta}_i^{\text{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\text{BP}})]^2$$

$$= g1i(\hat{A}) \underbrace{- \frac{m-1}{m} \sum_{u=1}^{m} \left(g1i(\hat{A}_{-u}) - g1i(\hat{A}) \right)}_{\text{Bias koreksi bagi } g1i(\hat{A})} + \text{E}[(\hat{\theta}_i^{\text{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\text{BP}})]^2$$

Selanjutnya menggunakan konsep *jackknife* untuk mengestimasi bias

$$\text{E}[(\hat{\theta}_i^{\text{EBLUP}} - \hat{\theta}_i^{\text{BP}})]^2 = \frac{m-1}{m} \sum_{u=1}^{m} \left(\hat{\theta}(y_i; \hat{A}_{-u}) - \hat{\theta}(y_i; \hat{A}) \right)^2$$

Sehingga diperoleh *mean squared error* Jiang-Lahiri-Wan sebagai berikut :

$$MSE^{JLW}(\hat{\theta}_i^{EBLUP}) = g1i(\hat{A}) - \frac{m-1}{m} \sum_{u=1}^{m} \left(g1i(\hat{A}_{-u}) - g1i(\hat{A}) \right) + \frac{m-1}{m} \sum_{u=1}^{m} \left(\hat{\theta}(y_i; \hat{A}_{-u}) - \hat{\theta}(y_i; \hat{A}) \right)^2 \quad (2.26)$$

Dimana

$$\hat{\theta}(y_i; \hat{A}) = \hat{\theta}_i^{\,EBLUP} = \boldsymbol{x_i^T} \boldsymbol{\widehat{\beta}} + \frac{\widehat{A}}{\hat{A} + D_i} (y_i - \boldsymbol{x_i^T} \boldsymbol{\widehat{\beta}})$$

$$\hat{\theta}(y_i; \hat{A}_{-u}) = \boldsymbol{x_i^T} \boldsymbol{\widehat{\beta}_{-u}} + \frac{\hat{A}_{-u}}{\hat{A}_{-u} + D_i} (y_i - \boldsymbol{x_i^T} \boldsymbol{\widehat{\beta}_{-u}})$$

$$g1i(\hat{A}) = \frac{\hat{A}\, D_i}{\hat{A} + D_i}$$

$$g1i(\hat{A}_{-u}) = \frac{\hat{A}_{-u}\, D_i}{\hat{A}_{-u} + D_i}$$

$\hat{A}_{-u}$ dan $\boldsymbol{\widehat{\beta}}_{-u}$ merupakan penduga $\hat{A}$ dan $\boldsymbol{\widehat{\beta}}$ setelah menghapus data area ke-u. Sehingga pada $MSE^{JLW}(\hat{\theta}_i^{EBLUP})$ ini, untuk mendapatkan nilai $\hat{\theta}(y_i; \hat{A}_{-u})$ harus dilakukan pendugaan ulang terhadap $\hat{A}_{-u}$ dan $\boldsymbol{\widehat{\beta}}_{-u}$ untuk setiap area ke-u yang dihapus sejumlah banyaknya area.

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun akademik 2016/2017, bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung, Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam kajian skripsi ini adalah berupa data simulasi dengan bantuan *software R 3.3.3* dan sebaran data berdistribusi normal. Pada kajian ini penulis menetapkan nilai A dan $\mathrm{D_i}$ serta banyaknya area m berdasarkan penelitian sebelumnya dimana Jiang, Lahiri dan Wan (2002) dalam Rao (2003) menetapkan nilai $A = \mathrm{D_i} = 1$ dan banyaknya area m = 30, 60 dan 90.

3.3 Metode Penelitian

Metode pendugaan MSE yang digunakan dalam penelitian ini yaitu *mean squared error* Prasad dan Rao (1990) yang dikembangkan dengan aproksimasi deret Taylor serta Jiang-Lahiri-Wan (2002) dengan konsep *jackknife.*

Model dasar yang digunakan dalam penelitian ini adalah model dua tahap Fay Herriot, dimana Model Fay-Herriot ini merupakan kasus model area level.

Level 1 : $y_i|\theta_i \sim N(\theta_i, \mathrm{D_i})$

Level 2 : $\theta_i \sim N(\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{\beta},\ A)$

Model dua level ini dapat ditulis sebagai model linear campuran seperti pada persamaan (2.4).

Simulasi pada *software R*

1. Membangkitkan peubah acak x_i sebagai peubah penyerta bagi variabel respon y_i , digunakan empat peubah penyerta sebagai berikut :

   $x_1 \sim N(1480, 387158)$, $x_2 \sim N(721.8, 69525.7)$, $x_3 \sim N(14691, 53264948)$, $x_4 \sim N(20.76, 40.69)$

   Nilai tengah dan ragan masing masing variabel x tersebut diambil dari nilai tengah dan ragam variabel penyerta yang memengaruhi pengeluaran per kapita setiap kecamatan di Kabupaten Brebes tahun 2013 dimana pada penelitian sebelumnya Ningtyas *et al* (2015) menggunakan data jumlah kelahiran penduduk (X1), jumlah kematian penduduk (X2), jumlah penduduk yang memiliki kendaraan roda 2 (X3) dan jumlah sarana kesehatan (puskesmas, poliklinik kesehatan desa, balai pengobatan, rumah sakit khusus, rumah bersalin dan rumah sakit umum) (X4).

   Masing masing dibangkitkan sejumlah banyaknya area yaitu 30, 60 dan 90.

2. Membangkitkan data $e_i = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ sebagai *sampling error* dengan $e_i \sim N(0,1)$

3. Menetapkan nilai $\boldsymbol{\beta}$, pada penelitian ini digunakan empat nilai $\boldsymbol{\beta}$ yaitu

-0.000380 , 0.001278 , 0.000122 , -0.022920 yang diperoleh dari penelitian sebelumnya oleh Ningtyas *et al* (2015) menggunakan data pengeluaran per kapita setiap kecamatan di Kabupaten Brebes tahun 2013.

4. Membangkitkan data $\theta_i \sim N(\boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta}, 1)$ sejumlah banyaknya area yaitu 30, 60 dan 90.
5. Memperoleh data y_i sebagai nilai pendugaan langsung dimana $y_i = \theta_i + e_i$
6. Menghitung nilai dugaan ragam pengaruh acak $(\hat{A})$
7. Menghitung nilai dugaan *mean squared error* Prasad dan Rao (1990) $MSE^{PR}(\hat{\theta}_i^{EBLUP})$ dengan mensubstitusikan hasil dugaan ragam pengaruh acak $(\hat{A})$ (langkah 6) ke persamaan (2.23)
8. Menghitung nilai dugaan *mean squared error* Jiang-Lahiri-Wan (2002) $MSE^{JLW}(\hat{\theta}_i^{EBLUP})$ dengan persamaan (2.26) dengan langkah sebagai berikut :
   a. Menghitung $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ dengan persamaan (2.10)
   b. Menghitung $\hat{\theta}(y_i; \hat{A}) = \hat{\theta}_i^{EBLUP}$ dengan mensubstitusikan hasil $\hat{A}$ dan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ pada langkah (6) dan (8.a) ke persamaan (2.9)
   c. Menghitung nilai dugaan ragam pengaruh acak untuk setiap area ke-u yang dihapus $(\hat{A}_{-u})$
   d. Menghitung $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ untuk setiap area ke-u yang dihapus $(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{-u})$
   e. Menghitung $\hat{\theta}(y_i; \hat{A}_{-u})$ dengan mensubsstitusikan hasil $\hat{A}_{-u}$ dan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{-u}$
   f. Mensubstitusikan hasil $\hat{A}$, $\hat{A}_{-u}$, $\hat{\theta}(y_i; \hat{A})$ dan $\hat{\theta}(y_i; \hat{A}_{-u})$ ke persamaan (2.26) sehingga diperoleh hasil dugaan *mean squared error* Jiang-Lahiri-Wan (2002) $MSE^{JLW}(\hat{\theta}_i^{EBLUP})$
9. Membandingkan hasil (7) dan (8)

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil perolehan dan perbandingan MSE EBLUP dengan metode Prasad dan Rao yang dikembangkan dengan deret Taylor juga metode Jiang-Lahiri-Wan dengan metode *jackknife*, dapat disimpulkan bahwa metode pendugaan *mean squared error* EBLUP dengan metode Jiang-Lahiri-Wan lebih baik karena menghasilkan nilai yang lebih kecil dibanding MSE Prasad dan Rao. Selain itu, semakin besar jumlah area (m) nilai MSE EBLUP keduanya relatif semakin kecil.

DAFTAR PUSTAKA

Amaliana, L. 2012. Penaksiran Mean Squared Error (MSE) Empirical Best Linier Unbiased Prediction (EBLUP) Pada Model Fay-Herriot. (Skripsi). Universitas Indonesia. Depok.

Fay, R.E., and Herriot, R.A. 1979. Estimates of Income for Small Places: an Application of James-Stein Procedure to Cencus Data. *Journal of American Statistical Association.* **74**, 269-277.

Jiang, J., Lahiri, P., and Wan, S. 2002. A Unified Jackknife Method. *Annals of Statistics.* **30**, 1782-1810.

Longford, N.T. 2005. *Missing Data and Small Area Estimation : Modern Analytical Equipment for the Survey Statistician.* Springer Science + Business Media, Inc., New York.

Ningtyas, R., Rahmawati, R., dan Wilandari, Y. 2015. Penerapan Metode Empirical Best Linear Unbiased Prediction (EBLUP) Pada Model Penduga Area Kecil Dalam Pendugaan Pengeluaran Per Kapita Di Kabupaten Brebes. *Jurnal Gaussian.* **4**, 977-986.

Nissinen, K. 2009. *Small Area Estimation with Linear Mix Models from Unit-Level Panel and Rotating Panel Data.* University Printing House Jyvaskyla. University of Jayvaskyla Finland.

Prasad, N.G.N., and Rao, J.N.K. 1990. The Estimation of Mean Squared Errors of Small Area. Estimators. *Journal of the American Statistical Association* . **85**, 163-171.

Rao, J.N.K. 2003. *Small Area Estimation.* John Willey and Sons, Inc., New York.

Wan, S. M. 1999. Jackknife Methods in Small Area Estimation and Related Problems. (Dissertation). University of Nebraska. Lincoln.