

**PERAMALAN BERDASARKAN ALGORITMA *KALMAN*
FILTER MODEL MULTIVARIAT *STRUCTURAL TIME*
SERIES DALAM REPRESENTASI *STATE SPACE***

(Skripsi)

Oleh

EFRIZAL



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017**

ABSTRAK

PERAMALAN BERDASARKAN ALGORITMA *KALMAN FILTER* MODEL MULTIVARIAT *STRUCTURAL TIME SERIES* DALAM REPRESENTASI *STATE SPACE*

Oleh

Efrizal

Algoritma *kalman filter* mendeskripsikan solusi rekursif untuk masalah pemfilteran linear dari data diskrit. Dalam prosesnya, model *structural time series* yang telah ditransformasikan ke dalam representasi *state space*, dimana sebelumnya telah dilakukan analisis terhadap data. penelitian hingga terbentuk model yang layak. Setelah itu, perhitungan kembali dilakukan berdasarkan algoritma *kalman filter* untuk mendapatkan prediksi dari data deret waktu. Pada akhirnya diperoleh kesimpulan bahwa metode *kalman filter* memiliki ketepatan peramalan yang lebih tinggi apabila dibandingkan dengan metode lainnya, khususnya dalam peramalan jangka pendek

Kata Kunci: *Kalman filter*, *Structural time series*, *State space*, produk domestik bruto.

ABSTRACT

FORECASTING BASED KALMAN FILTER ALGORITHM FOR MULTIVARIATE STRUCTURAL TIME SERIES MODEL IN STATE SPACE REPRESENTATION

By

Efrizal

Kalman filter algorithm describe recursive solution for linear filtering from discrete data. By its procces, the structural time series model have transformed into state space representation, which have analyzed toward research data until suitable model formed. Then, the calculation running again based kalman filter algorithm to obtain the prediction of time series data. Finally, the conclusion is kalman filter method have higher forecasting accuracy than the other method, especially for short-term forecasting.

Keyword: *Kalman filter, structural time series, state space, gross domestic product.*

**PERAMALAN BERDASARKAN ALGORITMA *KALMAN FILTER*
MODEL MULTIVARIAT *STRUCTURAL TIME SERIES* DALAM
REPRESENTASI *STATE SPACE***

Oleh

EFRIZAL

Skripsi

**Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS**

Pada

**Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017**

Judul : **PERAMALAN BERDASARKAN ALGORITMA
KALMAN FILTER MODEL MULTIVARIAT
STRUCTURAL TIME SERIES DALAM
REPRESENTASI STATE SPACE**

Nama Mahasiswa : **Efrizal**

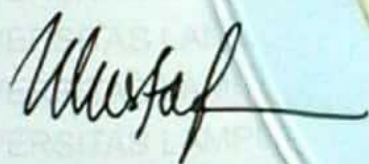
NPM : 1317031028

Jurusan : Matematika

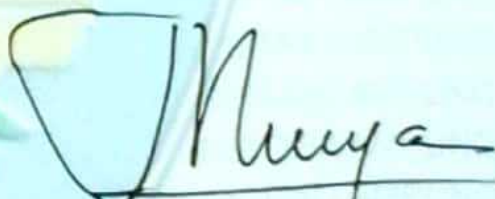
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

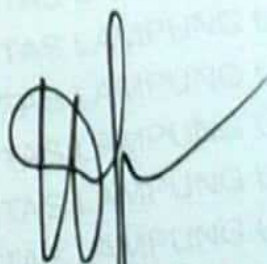


Drs. Mustofa Usman, Ph.D.
NIP. 19570101 198404 1 001



Aang Nuryaman S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika



Dra. Wamilliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

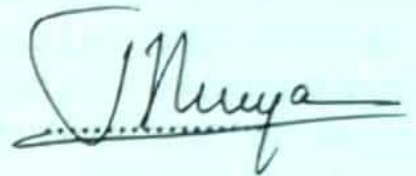
Ketua

: **Drs. Mustofa Usman, Ph.D.**



Sekretaris

: **Aang Nuryaman S.Si., M.Si.**



Penguji

Bukan Pembimbing

: **Widiarti S.Si., M.Si.**



2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.

NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **18 Agustus 2017**

PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"PERAMALAN BERDASARKAN ALGORITMA KALMAN FILTER MODEL MULTIVARIAT STRUCTURAL TIME SERIES DALAM REPRESENTASI STATE SPACE"** merupakan hasil karya saya sendiri dan bukan hasil karya orang lain. Semua hasil yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil Salinan atau dibuat orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 18 Agustus 2017



Penulis,

Erfzal

NPM. 1317031028

RIWAYAT HIDUP

Penulis merupakan anak terakhir dari empat bersaudara yang dilahirkan di Tegal Binangun pada tanggal 24 Januari 1995 oleh pasangan Bapak Mangin dan Ibu Suyatik.

Penulis menempuh pendidikan Sekolah Dasar (SD) di SDN 1 Tegal Binangun pada tahun 2001-2007, pendidikan SMP di SMPN 2 Sumberejo pada tahun 2007-2010, dan melanjutkan di SMA N 1 Talang Padang pada tahun 2010-2013. Hingga pada tahun 2013 penulis terdaftar sebagai mahasiswa S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Selama menjadi mahasiswa, Penulis pernah menjadi asisten praktikum matakuliah Algoritma dan Pemrograman, Pengantar Analisis Numerik, dan Statistika Industri. Penulis aktif di berbagai organisasi kampus, diantaranya pernah aktif sebagai anggota muda di berbagai organisasi, selanjutnya menjadi Anggota Biro Danus di Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unila, Kepala Bidang Kajian dan kemudian Sekretaris Umum di Rohani Islam (ROIS) FMIPA Unila pada periode berikutnya, Serta aktif juga sebagai Ketua Komisi I Dewan Perwakilan Mahasiswa (DPM) FMIPA Unila.

Sebagai bentuk penerapan bidang ilmu yang dipelajari, pada tanggal 18 Januari-18 Februari 2016 penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di Badan Pusat Statistik kota Bandar Lampung. Adapun sebagai bentuk pengabdian mahasiswa dan

menjalankan Tri Dharma Perguruan Tinggi Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sidomulyo Kecamatan Sidomulyo, Kabupaten Lampung Selatan, Provinsi Lampung pada tanggal 18 Juli – 27 Agustus 2016.

MOTO

Wahai orang-orang yang beriman, jika kamu menolong agama Allah niscaya dia akan menolongmu dan meneguhkan kedudukanmu (Q.S. Muhammad: 7).

Sebaik-baik manusia adalah yang bermanfaat bagi yang lainnya (Al hadist)

Hidup Hanya sekali, jangan menua tanpa arti, manfaatkan setiap detik yang dimiliki untuk selalu berbagi (penulis).

Hidup adalah seperti mengendarai sebuah sepeda, jika kamu ingin tetap dalam keadaan seimbang, maka kamu harus terus bergerak (Albert Einstein).

Berintegritas tanpa batas, bergerak atau tergantikan (penulis)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap puji dan syukur kehadiran Allah SWT yang memberikan petunjuk dan kemudahan untuk menyelesaikan studi

Ku ini, Ku persembahkan karya Ku ini untuk:

Bapak dan Ibu Ku tercinta yang selalu mendidik, mendoakan, memberi semangat dan motivasi, dan hal lain yang tak dapat Ku ungkapkan dengan kata-kata .

Kakak-kakak tercinta yang banyak membantu, menemani, memotivasi dan memberi kasih sayang kepadaku agar aku bisa menjadi seseorang yang bermanfaat bagi kalian dan orangtua.

Dosen Pembimbing dan Penguji yang sangat berjasa dan selalu memberikan motivasi kepada penulis untuk segera menyelesaikan kewajibanku.

Sahabat dan teman-teman ku, Terimakasih atas kebersamaan, keceriaan, canda dan tawa serta doa dan semangat yang telah diberikan kepadaku

Almamater Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah Robbil ‘alamin, Puji dan syukur Penulis ucapkan kepada Allah SWT, yang selalu melimpahkan rahmat dan kasih sayang-Nya, sehingga Penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Sholawat serat salam senantiasa tetap tercurah kepada nabi Muhammad SAW, tuntunan dan tauladan utama bagi seluruh umat manusia.

Dalam menyelesaikan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu Penulis dalam memberikan bimbingan, dorongan, dan saran-saran. Sehingga dengan segala ketulusan dan kerendahan hati pada kesempatan ini Penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Prof. Warsito, S.Si., DEA.,Ph.D. selaku Dekan FMIPA Unila.
2. Bapak Dra. Wamiliana, M.A.,Ph.D.,. selaku Ketua Jurusan Matematika.
3. Bapak Drs. Mustofa Usman, Ph.D., selaku Pembimbing I yang telah memotivasi, membantu dan memberikan pengarahan dalam proses penyusunan skripsi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman S.Si., M.Si., selaku pembimbing II atas kesediaan waktu luangya untuk membantu dan membimbing selama penulisan skripsi..
5. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji atas kesediaannya menguji dan memberikan kritik serta sarannya yang sangat membangun dalam proses penyusunan skripsi.
6. Ibu Netti Herawati,IR.,M.Sc., DR. selaku pembimbing akademik yang telah

membimbing Penulis selama mengikuti perkuliahan di Jurusan Matematika FMIPA Unila.

7. Bapak dan Ibu Dosen serta Staf Jurusan Matematika FMIPA Unila.
8. Ibu dan Bapak Penulis yang telah memberikan banyak hal yang tidak dapat Penulis nyatakan dalam kata-kata.
9. Kakak-kakak kandung penulis yang telah memberikan dukungan, memberikan doa, nasihat dan semangat yang sangat membantu Penulis dalam penyusunan skripsi
10. Sahabat dan teman-teman seperjuangan Matematika angkatan 2013. Diantaranya Ali, Dimas, Aiman, Afif, Dafri, Alfian, Hamid, Haris, Pranoto, Ansori, Budi, Rasyid serta semua sahabat laki-laki dan perempuan lainnya yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu. Terima kasih atas segala motivasi, bantuan, dan hal lain yang telah kalian berikan kepada Penulis
11. Keluarga besar HIMATIKA FMIPA UNILA dan ROIS FMIPA UNILA atas kebersamaan dan perjuangan dalam memperbaiki dan mengembangkan diri untuk menjadi pribadi yang berguna bagi agama, bangsa, dan negara.
12. Kepada semua pihak yang telah membantu dan kebersamai Saya dalam menjalani perkuliahan hingga terselesaikannya skripsi ini semoga mendapat balasan kebaikan dari Allah SWT.

Bandar Lampung, 18 Agustus 2017

Penulis,

Efrizal

DAFTAR ISI

	Halaman
DAFTAR TABEL	iii
DAFTAR GAMBAR	iv
DAFTAR SIMBOL.....	v

I. PENDAHULUAN

1.1	Latar Belakang Masalah	1
1.2	Batasan Masalah	2
1.3	Tujuan Penelitian	3
1.4	Manfaat Penelitian	3

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1	Analisis Deret Waktu (<i>Time Series</i>)	4
2.1.1	Data Deret Waktu	4
2.1.2	Dekomposisi Deret Waktu	4
2.2	Model <i>Structural Time Series</i> dalam Representasi <i>State Space</i>	5
2.2.1	Model <i>Structural Time Series</i>	5
2.2.2	Representasi <i>State Space</i>	10
2.3	Algoritma <i>Kalman Filter</i>	11
2.3.1	Tahapan <i>Kalman Filter</i>	12
2.3.2	Inisialisasi Algoritma <i>Kalman Filter</i>	14
2.3.3	Algoritma <i>State and Disturbance Smoother</i>	16
2.4	Pembentukan Model Representasi <i>State Space</i>	18
2.4.1	Pendugaan Parameter.....	18
2.4.2	<i>Goodnes of Fit</i>	22
2.4.3	Deteksi <i>Outlier</i>	22
2.4.4	Uji Diagnostik Model	23
2.5	Aplikasi <i>Kalman Filter</i>	25
2.5.1	Data Pengamatan Hilang	25
2.5.2	Peramalan.....	26
2.5.3	Selang Kepercayaan	27
2.6	Peramalan dengan Metode Lain	27
2.6.1	Pengantar dalam Peramalan dengan Metode Lain.....	27
2.6.1	Stasioneritas.....	27
2.6.2	ACF dan PACF	29
2.6.3	Ketepatan Peramalan	30

2.6.1	Metode Box-Jenkins	30
2.6.2	Metode Pemulusan Eksponensial	33

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1	Waktu dan Tempat Penelitian.....	35
3.2	Data Penelitian	35
3.3	Metode Penelitian	36

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1	Identifikasi Persamaan Representasi <i>State Space</i>	39
4.1.1	Identifikasi Komponen Pembentuk Model	39
4.1.2	Penetapan Model Sementara.....	40
4.2	Pemfilteran dan Pemulusan	42
4.2.1	Pemfilteran.....	42
4.2.2	Pemulusan.....	45
4.2.3	Pendugaan Parameter.....	46
4.2.4	Identifikasi <i>Outlier</i>	49
4.3	Penentuan Model dan Peramalan.....	50
4.3.1	Representasi <i>State Space</i> Model Akhir.....	50
4.3.2	Uji Diagnostik Model	52
4.3.3	Peramalan.....	55
4.4	Peramalan dengan Metode Lain	57
4.4.1	Metode Box-Jenkins	57
4.4.2	Metode Pemulusan Eksponensial	61
4.4.3	Pembandingannya dengan Metode <i>Kalman Filter</i>	62

V. KESIMPULAN

5.1	Kesimpulan	66
5.2	Saran	67

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
2.1. Model utama <i>structural time series</i>	6
2.2. Sistem matriks representasi <i>state space</i>	10
2.3. Sistem matriks pada proses pemfilteran <i>state</i>	13
2.4. Sistem matriks pada proses pemulusan <i>state</i> dan disturbansi	18
2.5. Transformasi Box-Cox	28
2.6. Identifikasi Order Model dengan ACF dan PACF	31
4.1. Hasil estimasi parameter untuk semua model yang mungkin	47
4.2. <i>Information criteria</i> untuk semua model yang mungkin	47
4.3. Uji signifikansi parameter semua model univariat yang mungkin	48
4.4. Identifikasi <i>outlier</i> pada data	49
4.5. Hasil estimasi parameter untuk model yang telah direvisi	50
4.6. Uji signifikansi parameter model revisi	50
4.7. Uji Jarque Bera	53
4.8. Uji F 2-arah	54
4.9. Nilai lambda dari setiap peubah pada tranformasi box-cox	57
4.10. Uji akar unit peubah hungaria pada <i>differencing</i> satu	58
4.11. Estimasi dan evaluasi parameter ARIMA(0,1,1)	60
4.12. Estimasi dan evaluasi parameter ARIMA(0,1,0)	60
4.13. Uji diagnostik model ARIMA(0,1,0)	60
4.14. Estimasi dan evaluasi parameter model <i>Double exponential smoothing</i> ..	61
4.15. Estimasi dan evaluasi parameter model <i>Linear exponential smoothing</i> ...	61
4.16. Nilai MAPE pada masing-masing metode	64

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
1. Diagram alir penelitian	38
2. Plot <i>time series</i> PDB negara Portugal dan Hungaria.....	39
3. Hasil pemfilteran dengan <i>kalman filter</i> untuk negara Portugal.....	44
4. Standar error untuk negara Portugal dengan <i>kalman filter</i>	44
5. Residual untuk negara Portugal dengan <i>kalman filter</i>	45
6. Hasil pemulusan <i>state</i> dan disturbansi untuk negara Portugal	46
7. Histogram dan QQ-plot dari residual PDB Portugal dan Hungaria	53
8. Residual plot PDB Portugal dan Hungaria	54
9. <i>White noise probabilities</i> untuk residual PDB Portugal dan Hungaria	55
10. Hasil peramalan untuk PDB Portugal dan Hungaria.....	56
11. <i>Differencing</i> pertama untuk PDB Portugal dan Hungaria.....	58
12. <i>Differencing</i> kedua untuk peubah Portugal	59
13. Plot ACF dan PACF dari <i>differencing</i> pertama PDB Hungaria	59
14. Peramalan dengan metode <i>kalman filter</i> dan pemulusan eksponensial PDB Portugal.....	63
15. Peramalan dengan metode <i>kalman filter</i> dan pemulusan eksponensial PDB Hungaria	64

DAFTAR SIMBOL

n	Banyaknya deret observasi
m	Banyaknya komponen <i>state</i>
r	Banyaknya disturbansi dari komponen <i>state</i> dengan $r \leq m$
y_t	Vektor pengamatan berukuran $N \times 1$ mengandung data deret waktu pengamatan pada waktu t .
α_t	Vektor <i>state</i> berukuran $m \times 1$ mengandung data deret waktu pengamatan pada waktu t .
ε_t	Vektor disturbansi observasi berukuran $n \times 1$.
η_t	Vektor disturbansi <i>state</i> berukuran $m \times 1$.
Z_t	Matriks penghubung faktor tidak teramati serta regresi dengan vektor pengamatan berukuran $n \times m$.
T_t	Matriks transisi berukuran $m \times m$.
R_t	Matriks seleksi berukuran $m \times r$.
d_t	Vektor parameter pada persamaan observasi berukuran $n \times 1$.
c_t	Vektor parameter pada persamaan transisi berukuran $m \times 1$.
P_t	Matriks varian dari <i>state</i> hasil pemfilteran.
v_t	Inovasi.
F_t	Matriks varian dari inovasi.
e_t	Inovasi standardisasi
$\hat{\alpha}_t$	<i>State</i> hasil pemulusan.
V_t	Matriks varian dari <i>state</i> hasil pemulusan.
$\alpha_{t t-1}$	Vektor dari <i>state</i> pada saat t bersyarat $t - 1$.
$P_{t t-1}$	Ragam dari <i>state</i> pada saat t bersyarat $t - 1$.
δ	Vektor difusi dalam kondisi <i>state</i> inisial.
κ	Suatu bilangan besar dalam difusi inisialisasi.
q	Jumlah <i>state</i> inisial terdifusi.
θ	Vektor parameter.
w	Matriks koefisien dari peubah peregresi.
$y_t^{(i)}$	Data pengamatan dari peubah ke- i pada waktu t .
$\tau_t^{(i)}$	Komponen tren dari peubah ke- i pada waktu t .
$\beta_t^{(i)}$	Komponen <i>slope</i> dari peubah ke- i pada waktu t .
$w_t^{(i)}$	Komponen peregresi statis dari peubah ke- i pada waktu t .
$\varepsilon_t^{(i)}$	Disturbansi observasi dari peubah ke- i pada waktu t .
$\xi_t^{(i)}$	Disturbansi komponen <i>level</i> / tren dari peubah ke- i pada waktu t .
$\zeta_t^{(i)}$	Disturbansi komponen <i>slope</i> dari peubah ke- i pada waktu t .

μ_t	komponen <i>level</i> .
τ_t	komponen tren.

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Model deret waktu memperkirakan nilai yang akan datang hanya berdasarkan nilai di waktu lampau dari suatu data deret waktu. Ketika model ini digunakan, data di waktu lampau dianalisis untuk mengidentifikasi pola data. Kemudian, dengan asumsi bahwa pola data tersebut berulang di waktu yang akan datang, pola data tersebut diekstrapolasi untuk menghasilkan peramalan.

Umumnya, kelemahan dari beberapa metode peramalan deret waktu yaitu tidak dapat meramalkan suatu data deret waktu yang mempunyai efek kecenderungan (*trend*) dan musiman (*seasonal*). Untuk mengatasi hal tersebut maka munculah metode dekomposisi. Metode ini didasarkan pada kenyataan bahwa apa yang telah terjadi akan berulang kembali melalui pola yang sama, dengan pola data deret waktu seperti unsur kecenderungan, musiman, siklus, ataupun perubahan yang bersifat acak.

Selain itu, sebuah aplikasi model ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*) yang berhasil membutuhkan data deret waktu terdiferensiasi untuk menjadi stasioner. Bagaimanapun juga, dalam hal ekonomi dan banyak bidang sosial, data yang sesungguhnya tidak pernah stasioner, walaupun diferensiasi telah banyak dilakukan. Salah satu pertanyaan yang cukup sulit untuk dijawab adalah

seberapa dekat kestasioneran data dikatakan cukup dekat. Adapun dalam model *structural time series* dalam representasi *state space*, kestasioneran dari deret tidak dibutuhkan. Selain itu, masih banyak lagi kelebihan yang dimiliki apabila peramalan dimodelkan dalam kerangka *state space*.

Adapun, algoritma *kalman filter* (Kalman, 1960) mendeskripsikan solusi rekursif untuk masalah pemfilteran linear dari data diskrit. Dalam prosesnya, model yang telah ditransformasikan ke dalam representasi *state space*, selanjutnya dilakukan perhitungan berdasarkan algoritma *kalman filter* untuk mendapatkan prediksi dari data deret waktu.

Oleh karena itu berdasarkan uraian sebelumnya, penulis mencoba mengupas lebih mendalam tentang sebuah metode peramalan berdasarkan algoritma *kalman filter* dengan *structural time series model* yang terkadang juga disebut sebagai *unobserved component model* dalam sebuah representasi *state space*.

1.2 Batasan Masalah

Pada pembahasan kali ini, penulis membatasi permasalahan sebagai berikut:

1. Peramalan dengan *kalman filter* dalam representasi *state space* hanya dilakukan terhadap model *structural time series*.
2. Model *structural time series* multivariat yang digunakan adalah model *seemingly unrelated time series equation (SUTSE)*.
3. Metode pembandingan yang digunakan yaitu metode *box-jenkins* dan metode pemulusan eksponensial, dimana perbandingan dilakukan dalam bentuk permodelan univariat.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini diantaranya:

1. Membentuk sebuah model multivariat *structural time series* dalam representasi *state space* untuk data.
2. Menjelaskan peran algoritma *kalman filter* dalam melakukan peramalan terhadap data.
3. Melakukan peramalan terhadap data serta membandingkan hasil peramalan dengan metode peramalan lain.

Sebagai studi kasus, akan digunakan data kuartalan produk domestik bruto dari negara Portugal dan Hungaria.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini antara lain:

1. Sebagai bahan rujukan untuk pengembangan pembahasan permodelan tentang data deret waktu, khususnya metode *kalman filter* dalam representasi *state space* di masa yang akan datang.
2. Dapat menjadi bahan pertimbangan dan masukan bagi pihak-pihak yang berkepentingan serta dapat dijadikan sebagai salah satu sumber informasi yang mendukung tujuan pihak tersebut.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Analisis Deret Waktu (*Time Series*)

2.1.1 Data Deret Waktu

Data deret waktu adalah sekumpulan pengamatan kuantitatif yang disusun dari satu objek yang terdiri dari beberapa waktu periode, seperti harian, bulanan, triwulanan, dan tahunan. Data deret waktu yang memiliki dua atau lebih peubah disebut *multivariate time series*. Model *multivariate time series* melibatkan beberapa peubah yang tidak hanya runtut namun juga saling berkorelasi (Montgomery, Jennings, dan Kulahci, 2008).

2.1.2 Dekomposisi Deret Waktu

Metode dekomposisi adalah pendekatan tertua untuk analisis deret waktu. Bentuk aditif dari metode dekomposisi yaitu:

$$Y_t = S_t + T_t + E_t \quad (2.1)$$

Dimana Y_t, S_t, T_t , dan E_t berturut-turut adalah data observasi, komponen musiman, komponen tren-siklus, dan komponen acak pada periode t . Salah satu kegunaan dari metode dekomposisi bahwasanya metode memberikan cara mudah untuk menghitung data dengan penyesuaian musiman (*seasonally adjusted data*), yang dihitung dengan:

$$Y_t - S_t = T_t + E_t \quad (2.2)$$

Yang kemudian hanya menyisakan komponen tren-siklus serta komponen acak. Kebanyakan data ekonomi yang terpublikasikan pun adalah data dengan penyesuaian musiman, karena variasi musiman secara khusus bukan menjadi minat utama (Makridakis, Wheelwright, dan Hyndman, 1998).

2.2 Model *Structural Time Series* dalam Representasi *State Space*

2.2.1 Model *Structural Time Series*

Model ekonometrika deret waktu univariat dapat dirumuskan secara langsung dalam bentuk komponen dari tren, musiman, siklus, dan komponen acak. Model dari jenis ini disebut model *structural time series* (Harvey, 1989).

Model *structural time series* univariat yaitu (Harvey dan Koopman, 1997):

$$y_t = \tau_t + \gamma_t + \psi_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (2.3)$$

Dimana

τ_t : komponen tren

γ_t : komponen musiman

ψ_t : komponen siklus

ε_t : komponen acak

Berdasarkan uraian Harvey dan Shephard (1993), model utama *structural time series* dapat dirangkum dalam Tabel 2. 1.

Tabel 2.1. Model utama *structural time series*

Model	Komponen	Spesifikasi
	(1a) <i>Random walk</i>	$\mu_{t+1} = \mu_t + \xi_t$
	(1b) <i>Random walk</i> dengan <i>drift</i>	$\mu_{t+1} = \mu_t + \beta + \xi_t$
(A) <i>Local level/random walk</i> dengan <i>noise</i>		$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$ dengan μ_t seperti dalam (1a)
	(2) tren stokastik	$\tau_{t+1} = \tau_t + \beta_t + \xi_t$ $\beta_{t+1} = \beta_t + \zeta_t$
(B) <i>Local linear trend</i>		$y_t = \tau_t + \varepsilon_t$ dengan τ_t seperti dalam (2)
	(3) siklus stokastik	$\begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} c_1 & \lambda_c & s_1 & \lambda_c \\ -s_1 & \lambda_c & c_1 & \lambda_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_t \\ \kappa_t^* \end{bmatrix}$ Dimana ψ adalah siklus, $0 \leq \rho < 1$, dan $0 \leq \lambda_c \leq \pi$
(C) Siklus dengan <i>noise</i>		$y_t = \mu_t + \psi_t + \varepsilon_t$ dimana $0 \leq \rho < 1$
(D) Tren dengan siklus		$y_t = \tau_t + \psi_t + \varepsilon_t$ dengan τ_t seperti dalam (2)
(E) Tren siklikal		$y_t = \tau_t + \varepsilon_t$ $\tau_{t+1} = \tau_t + \beta_t + \psi_t + \xi_t$ dengan β_t seperti dalam (2)
	(4) siklus nonstasioner	Seperti persamaan (3) tetapi $\rho = 1$
	(5a) musiman peubah <i>dummy</i>	$y_t = - \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + \omega_t$
	(5b) musiman trigonometrik	$y_t = - \sum_{j=1}^{s/2} \gamma_{t,j}^\dagger + \omega_t$ dimana $\gamma_{t,j}^\dagger$ adalah siklus nonsatsioner (4), dengan $\lambda_c = \lambda_j = 2\pi j/s$, $j=1,2,\dots,[s/2]$
(F) Struktural dasar		$y_t = \tau_t + \gamma_t + \varepsilon_t$ dimana τ_t seperti dalam (2) dan γ_t seperti dalam (5a) atau (5b)

Sebagai tambahan untuk model struktural utama yang terdapat dalam Tabel 2.1, masih lebih banyak lagi model yang dapat terbentuk. Komponen tambahan dapat dimasukkan dan komponen yang terdefiniskan di atas dapat dimodifikasi. Adapun komponen tren stokastik didefinisikan sebagai:

$$\tau_{t+1} = \tau_t + \beta_t + \xi_t, \quad \xi_t \sim N(0, \sigma_\xi^2) \quad (2.4)$$

$$\beta_{t+1} = \beta_t + \zeta_t, \quad \zeta_t \sim N(0, \sigma_\zeta^2)$$

dimana disturbansi dari *level* ξ_t dan *slope* ζ_t berurutan saling tidak berkorelasi.

Berdasarkan Pelagatti (2016), model *local linear trend* memberikan bentuk khusus yang berbeda dimana dapat diperoleh dengan menetapkan nilai dari varian sebagai barisan *white noise*, σ_ξ^2 , σ_ζ^2 , atau *slope* inisial β_0 menjadi nol.

- Tren linier, jika ditetapkan $\sigma_\xi^2 = \sigma_\zeta^2 = 0$, maka didapatkan tren linier deterministik.
- Random walk* dengan *drift*, jika ditetapkan $\sigma_\zeta^2 = 0$ dan *slope* menjadi konstan, maka didapatkan *random walk* dengan *drift* β_0 .
- Random walk*, jika ditetapkan $\sigma_\zeta^2 = \beta_0 = 0$ dan *slope* menjadi konstan dan sama dengan nol, maka didapatkan *random walk*.
- Integrated random walk*, jika ditetapkan $\sigma_\xi^2 = 0$, didapatkan tren yang sangat mulus.

Sehingga untuk kasus tren *Integrated random walk*, maka model menjadi:

$$y_t = \tau_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (2.5)$$

$$\tau_{t+1} = \tau_t + \beta_t,$$

$$\beta_{t+1} = \beta_t + \zeta_t, \quad \zeta_t \sim N(0, \sigma_\zeta^2)$$

Dalam buku Pelagatti (2016), model *structural time series* dapat dengan mudah ditambahkan dengan nilai dari pengaruh peubah penjelas yang teramati disebut sebagai peregresi (*regressor*). Secara khusus, peregresi dapat dimasukkan dalam persamaan observasi atau pada persamaan yang mendefinisikan komponen *state*. Adapun peregresi dalam persamaan observasi dituliskan dengan:

$$y_t = \tau_t + \gamma_t + \psi_t + w^T X_t + \varepsilon_t, \quad (2.6)$$

Dimana:

X_t : vektor dari peregresi pada saat t

w_t : vektor koefisien regresi.

Seringkali diperlukan dalam analisis deret waktu dengan menambahkan informasi yang termuat pada masa lampau dengan peregresi berhubungan dengan peubah dalam analisis. Terkadang peregresi adalah ukuran yang dikeluarkan oleh perusahaan, institusi statistik, ataupun peralatan. Pada kasus ini, peregresi statis untuk suatu waktu t yaitu peregresi dalam x_t hanya mempengaruhi y_t pada titik t . Peregresi statis digunakan untuk mengadaptasi model untuk menyesuaikan *outlier* yang didefinisikan seperti di bawah ini:

- a. *Additive outlier*, adalah perubahan mendadak yang melibatkan hanya observasi tunggal pada waktu t_0 dan dapat dimodelkan menggunakan peubah:

$$A_t = \begin{cases} 1, & \text{jika } t = t_0 \\ 0, & \text{saat } t \neq t_0 \end{cases}$$

- b. *Temporary change*, adalah perubahan mendadak pada beberapa titik waktu terakhir (biasanya berurutan) $\Omega_0 = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ dan dapat dimodelkan menggunakan peubah:

$$T_t = \begin{cases} 1, & \text{jika } t \in \Omega_0 \\ 0, & \text{saat } t \notin \Omega_0 \end{cases}$$

- c. *Level shift*, terkadang disebut dengan perubahan structural, yaitu perubahan mendadak yang melibatkan deret waktu yang dimulai pada waktu t_0 dan dapat dimodelkan menggunakan peubah:

$$L_t = \begin{cases} 1, & j_i \\ 0, & s \end{cases} \quad t \geq t_0$$

- d. *Slope shift*, terkadang disebut dengan lereng, yaitu perubahan mendadak pada *slope* yang melibatkan deret waktu yang dimulai pada waktu t_0 dan dapat dimodelkan menggunakan peubah:

$$S_t = \begin{cases} t - t_0 + 1, & j_i \\ 0, & s_i \end{cases} \quad t \geq t_0$$

Beberapa model multivariat *structural time series* antara lain model *Seemingly Unrelated Time Series Equation* (SUTSE), *Homogeneous Model* (model homogen), *Common factor model* (model komponen bersama), serta masih banyak lagi. Dalam model SUTSE, setiap deret termodelkan dalam kasus univariat, namun tiap disturbansi dapat berkorelasi melalui deret. Model *structural* juga terkadang berkenaan dengan model linear dinamis (*dynamic linear models*) (Durbin dan Koopman, 2012).

Versi multivariate dari model linear dinamis adalah sebuah bentuk dari model *Seemingly Unrelated Time Series Equation* (SUTSE). SUTSE adalah himpunan model linear yang dihubungkan hanya melalui disturbansi model tersebut, yang dapat berkorelasi. Lebih besar korelasi, maka lebih besar juga efisiensi dalam perolehan pendugaan menggunakan pendekatan ini. Perlu dicatat bahwa model multivariat linear dinamis termasuk dalam SUTSE, tidak sebaliknya (Hingley, 2006).

2.2.1 Representasi *State Space*

Representasi *state space* dapat dituliskan dalam berbagai cara, salah satunya berbentuk:

$$y_t = Z_t \alpha_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, H_t) \quad (2.7)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + R_t \eta_t \quad \eta_t \sim N(0, Q_t)$$

Terkadang representasi *state space* juga dapat dimasukkan penyesuaian rata-rata (*mean adjustment*) ke dalam persamaan, menjadikan:

$$y_t = Z_t \alpha_t + d_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, H_t) \quad (2.8)$$

$$\alpha_{t+1} = T_t \alpha_t + c_t + R_t \eta_t \quad \eta_t \sim N(0, Q_t)$$

Persamaan pertama dan kedua pada (2.7) dan (2.8) berturut-turut disebut sebagai persamaan observasi, persamaan kedua disebut sebagai persamaan transisi atau persamaan *state*. Adapun penjelasan mengenai definisi dan dimensi sistem matriks pada persamaan (2.7) dan (2.8) dijelaskan dalam tabel 2.2 berikut:

Tabel 2.2. Sistem matriks representasi *state space*

Matriks	Definisi	Dimensi
y_t	Vektor observasi	$n \times 1$
α_t	Vektor <i>state</i>	$m \times 1$
ε_t	Vektor disturbansi observasi	$n \times 1$
η_t	Vektor disturbansi <i>state</i>	$r \times 1$
d_t	Vektor peregresi pada persamaan observasi	$n \times 1$
c_t	Vektor peregresi pada persamaan <i>state</i>	$m \times 1$
Z_t	Matriks penghubung antara vektor observasi dengan vektor <i>state</i>	$n \times m$
T_t	Matriks transisi	$m \times m$
R_t	Matriks seleksi	$m \times r$
H_t	Matriks ragam-peragam disturbansi observasi	$n \times n$
Q_t	Matriks ragam-peragam disturbansi <i>state</i>	$r \times r$

Dengan n adalah banyaknya deret pengamatan, m adalah banyaknya komponen dalam vektor *state*, serta r adalah banyaknya komponen distorsi dari *state* dengan $r \leq m$ (Durbin dan Koopman, 2012).

Representasi *state space* disebut *time-invariant* (konstan) ketika matriks Z_t , T_t , R_t , H_t dan Q_t pada persamaan (2.7) dan (2.8) tidak berubah sepanjang waktu. Contoh dari *state space time-invariant* adalah model *local level*, model *local linear trend*, dan model *local level* dan musiman. Untuk model-model ini tanda t pada Z_t , T_t , H_t , dan Q_t dapat dihilangkan. Jika satu atau lebih elemen dalam persamaan (2.9) berubah sepanjang waktu, model disebut dengan *time-varying* (berubah-ubah). Contoh dari model *time-varying* adalah semua representasi *state space* yang melibatkan perubahan regresi (Comandeur dan Koopman, 2007).

2.3 Algoritma Kalman Filter

Menurut Comandeur dan Koopman (2007), penduga *state* bergantung pada nilai yang diberikan pada inisialisasi dari parameter dan komponen *state* yang diberikan. Adapun pendugaan untuk komponen *state* dilanjutkan dengan melakukan dua cara melalui data, diantaranya:

1. *Forward pass*, dari $t = 1, \dots, n$, menggunakan algoritma rekursif disebut sebagai *Kalman filter* yang digunakan terhadap data deret waktu teramati.
2. *Backward pass*, dari $t = n, \dots, 1$, menggunakan algoritma rekursif disebut sebagai *state and disturbance smoothers* yang digunakan terhadap keluaran dari *kalman filter*.

2.3.1 Tahapan algoritma *Kalman Filter*

Konsep *Kalman Filter* terdiri dari dua tahapan yakni peramalan dan pembaharuan. Pada tahap peramalan, dihasilkan nilai dugaan untuk keadaan (*state*) di waktu sekarang dan nilai kovarian galat yang digunakan sebagai informasi dugaan awal untuk langkah selanjutnya. Tahap pembaharuan berfungsi sebagai korektor. Pada tahap ini dihasilkan pengukuran baru yang didapat dari nilai dugaan awal. Setelah kedua tahap terpenuhi, proses tersebut akan berulang kembali dengan nilai dugaan yang didapat dari tahap pengukuran digunakan sebagai informasi awal tahap peramalan yang kedua, begitu seterusnya hingga didapat nilai yang konvergen (Welch dan Bishop, 2001).

Harvey (1989), menjelaskan tentang tahapan *kalman filter* untuk $t = 1, \dots, n$, diantaranya:

1. Tahap pembaharuan

$$\alpha_t = \alpha_{t|t} = \alpha_{t|t-1} - P_{t|t-1} Z_t' F_t^{-1} v_t, \quad (2.9)$$

$$P_t = P_{t|t} = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} Z_t' F_t^{-1} Z_t P_{t|t-1},$$

2. Tahap peramalan

$$\alpha_{t+1} = \alpha_{t+1|t} = T_t \alpha_{t|t} + c_{t+1} = T_t \alpha_{t|t-1} + c_{t+1} + K_t v_t, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} P_{t+1} &= P_{t+1|t} = T_t P_{t|t} T_t' + R_t Q_t R_t' \\ &= T_t (P_{t|t-1} - P_{t|t-1} Z_t' F_t^{-1} Z_t P_{t|t-1}) T_t' + R_t Q_t R_t', \end{aligned}$$

Dengan v_t , F_t , dan K_t diperoleh melalui perhitungan berikut::

$$v_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1} = Z_t \alpha_{t|t} - Z_t \alpha_{t|t-1}, \quad (2.11)$$

$$F_t = Z_t P_{t|t-1} Z_t' + H_t,$$

$$K_t = T_t P_{t|t-1} Z_t' F_t^{-1},$$

Adapun penjelasan mengenai definisi dan dimensi sistem matriks (2.9) sampai dengan (2.11), selanjutnya dijelaskan dalam tabel 2.3 berikut ini:

Tabel 2.3. Sistem matriks pada proses pemfilteran *state*

Matriks	Definisi	Dimensi
$\hat{y}_{t t-1}$	Ekspektasi bersyarat dari y_t pada saat $t - 1$	$n \times 1$
$\alpha_{t t}$	Vektor <i>state</i> yang telah terbaharui	$m \times 1$
$\alpha_{t t-1}$	Vektor <i>state</i> yang belum terbaharui	$m \times 1$
$P_{t t}$	Matriks varian dari <i>state</i> yang telah terbaharui	$r \times r$
$P_{t t-1}$	Matriks varian dari <i>state</i> yang belum terbaharui	$r \times r$
v_t	Vektor inovasi	$n \times 1$
F_t	Matriks varian dari inovasi	$n \times n$
K_t	Matriks <i>kalman gain</i>	$m \times n$

Selanjutnya, *Kalman filter* yang digunakan terhadap model (2.8) disebut berada dalam *steady-state* jika matriks kovarian P_{t+1} menjadi konstan, dimana:

$$P_{t+1} = \bar{P} \quad (2.12)$$

Rekursi untuk matriks kovarian galat berlebihan dalam *steady-state*, dimana rekursi untuk *state* menjadi

$$\alpha_{t+1} = \bar{T}\alpha_t + c_{t+1} + \bar{K}v_t \quad (2.13)$$

Dimana matriks transisi dan *gain* berurutan didefinisikan sebagai:

$$\bar{T} = T - \bar{K}Z, \quad \text{dan} \quad \bar{K} = T\bar{P}Z'(Z\bar{P}Z' + H)^{-1} \quad (2.14)$$

Kalman filter mempunyai solusi *steady-state* jika terdapat matriks kovarian P_{t+1} konstan yang memenuhi persamaan Riccati:

$$\bar{P} - T\bar{P}T' + T\bar{P}Z'(Z\bar{P}Z' + H)^{-1}Z\bar{P}T' + R - R' = 0 \quad (2.15)$$

2.3.2 Inisialisasi Algoritma Kalman Filter

Vektor *state* inisialisasi $\alpha_{1|0}$ diasumsikan dengan $N(\alpha_{1|0}, P_{1|0})$ bergantung pada distubansi $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ dan $\eta_1, \dots, \eta_n$, dimana $\alpha_{1|0}$ dan $P_{1|0}$ pada awalnya juga diasumsikan diketahui (Durbin dan Koopman, 2012).

Jika tidak terdapat informasi mengenai nilai permulaan dari peubah *state* yang tersedia, maka antara peubah *state* yang stasioner dan nonstasioner harus diperlakukan secara berbeda. Untuk peubah *state* nonstasioner, sebuah distribusi difusi harus dipergunakan (Pelagatti, 2016).

Spesifikasi umum untuk vektor *state* inisial diberikan oleh:

$$\alpha_{1|0} = \alpha + A + R_0 \eta_0 \quad \delta \sim N(0, \kappa I_q), \quad \eta_0 \sim N(0, Q_0) \quad (2.16)$$

Dimana:

α : vektor nol berukuran $m \times 1$, kecuali beberapa elemen *state* inisial adalah konstanta yang diketahui.

δ : vektor difusi berukuran $q \times 1$, yaitu vektor peubah acak normal dengan ragam κ .

η_0 : vektor distubansi *state* inisial berukuran $m \times 1$ dengan matriks kovarian inisial Q_0 .

A : matriks seleksi berukuran $m \times q$.

R_0 : matriks seleksi berukuran $m \times (m-q)$.

Dengan m adalah banyaknya komponen *state*, dan q adalah banyaknya komponen terdifusi. Pada persamaan (2.16), $\alpha_{1|0}$ terbagi menjadi bagian konstanta α , bagian

nonstasioner A , dan bagian stasioner $R_0\eta_0$. Adapun matriks kovarian *state* inisial ditentukan oleh:

$$P_{1|0} = P_{*,1} + \kappa P_{\infty,1}, \quad (2.17)$$

Dengan $P_{*,1} = R_0 Q_0 R_0'$ dan $P_{\infty,1} = A^{-1}$. Matriks $P_{\infty,t} = 0$ untuk $t > g$ dimana g adalah bilangan bulat positif kurang dari n . Konsekuensi dari matriks $P_{\infty,t} = 0$ yaitu rekursi *kalman filter* (2.9) dan (2.10) dapat digunakan tanpa perubahan untuk $t = g + 1, \dots, N$ dengan $P_t = P_{*,t}$ (Durbin dan Koopman, 2012).

Berdasarkan Mergner (2009), ada tiga cara untuk inisialisasi model *state space* nonstasioner, antara lain:

1. Dengan menggunakan *diffuse prior*, yaitu dengan menetapkan $\alpha_{1|0}$ sebagai sebuah nilai acak. Vektor δ dianggap sebagai variable acak dengan ragam tak berhingga dengan $\kappa \rightarrow \infty$, hal ini mengakibatkan elemen diagonal $P_{1|0}$ menuju tak terhingga, dimana inisialisasi ini kemudian disebut dengan teknik inisialisasi eksak.
2. Dengan menetapkan nilai κ dengan sebuah nilai numerik yang sangat besar tetapi berhingga, sehingga dapat digunakan *kalman filter* standar secara langsung. Hal ini tidak direkomendasikan semenjak cara ini dapat membawa kepada kisaran galat yang sangat besar.
3. Dengan mempertimbangkan $\alpha_{1|0}$ adalah sebuah konstanta yang tidak diketahui yang dapat diduga berdasarkan observasi pertama y_1 melalui maksimum *likelihood*. Melalui prosedur ini, inisialisasi yang sama dari pemfilteran didapatkan yaitu dengan mengasumsikan bahwa $\alpha_{1|0}$ adalah peubah acak dengan ragam tak berhingga.

Untuk komponen nonstasioner, jika paket software memberikan algoritma eksak untuk kondisi difusi inisialisasi, maka rata-rata dari perubahan *state* dapat diatur menjadi sama dengan nol dengan ragamnya sama dengan menuju tak berhingga. Jika hanya tersedia *kalman filter* standar, maka dapat digunakan data observasi untuk memperoleh kondisi inisial yang pantas untuk beberapa komponen (Pelagatti, 2016).

Pada beberapa kondisi, inisialisasi mungkin tidak terjadi sekalipun seluruh sampel telah diproses, dimana proses pemfilteran menjadi tidak terinisialisasi. Hal ini dapat terjadi jika perubahan regresi kolinear atau jika data tidak memenuhi untuk menduga kondisi inisial δ untuk beberapa alasan (SAS Institute, 2016).

2.3.3 Algoritma State and Disturbance Smoother

1. Pemulusan State

Pemulusan *state* merupakan pendugaan dari α berdasarkan Y_n , himpunan seluruh pengamatan. Dimana $\hat{\alpha}_t = E(\alpha_t|Y_n)$, dan $V_t = \text{Var}(\alpha_t|Y_n)$. Penduga *state* melalui pemulusan didapatkan berdasarkan informasi berdasarkan *state* hasil pemfilteran. Penduga *state* hasil pemulusan memiliki MSE (*Mean Square Error*) yang lebih kecil. Vektor *state* hasil pemulusan dapat diperoleh melalui rekursi berikut, untuk $t = n, \dots, 1$:

$$\hat{\alpha}_{t|n} = \alpha_{t|t-1} + P_{t|t-1}r_{t-1}, \quad (2.18)$$

$$r_{t-1} = Z_t'F_t^{-1}v_t + L_t'r_t,$$

$$L_t = T_t - K_tZ_t,$$

Matriks ragam *state* hasil pemulusan V_t juga dapat dihitung secara rekursif untuk $t = n, \dots, 1$ melalui:

$$V_{t|n} = P_{t|t-1} - P_{t|t-1}N_{t-1}P_{t|t-1}, \quad (2.19)$$

$$N_{t-1} = Z_t'F_t^{-1}Z_t + L_t'N_tL_t,$$

2. Pemulusan Disturbansi

Pemulusan disturbansi merupakan pendugaan rekursif dari dugaan hasil pemulusan dengan dari disturbansi observasi dan *state*. Pemulusan disturbansi memberikan hasil yang dapat digunakan dalam pendugaan parameter dan uji diagnostik. Hasil pemulusan disturbansi dapat dihitung secara rekursif untuk $t = n, \dots, 1$ melalui:

$$\hat{\varepsilon}_t = E(\varepsilon_t|Y) = H_t u_t, \quad (2.20)$$

$$\hat{\eta}_t = E(\eta_t|Y) = Q_t R_t' r_t,$$

$$u_t = F_t^{-1} v_t - K_t' r_t,$$

$$r_{t-1} = Z_t' u_t - T_t' r_t,$$

Dengan matriks ragam hasil pemulusan disturbansi dapat diperoleh $t = n, \dots, 1$ melalui:

$$\text{Var}(\varepsilon_t|Y_n) = H_t - H_t D_t H_t, \quad (2.21)$$

$$\text{Var}(\eta_t|Y_n) = Q_t - Q_t R_t' N_t R_t Q_t,$$

$$D_t = F_t^{-1} + K_t' N_t K_t,$$

$$N_{t-1} = Z_t' D_t Z_t + T_t' N_t T_t + Z_t' K_t' N_t T_t + T_t' N_t K_t Z_t,$$

Penjelasan mengenai definisi dan dimensi sistem matriks (2.18) sampai dengan (2.21), selanjutnya dijelaskan dalam tabel 2.4 berikut ini:

Tabel 2.4. Sistem matriks pada proses pemulusan *state* dan disturbansi

Matriks	Definisi	Dimensi
$\hat{\alpha}_{t n}$	Vektor <i>state</i> hasil pemulusan	m x 1
$V_{t n}$	Matriks varian <i>state</i> hasil pemulusan	m x m
r_t	Vektor jumlah terboboti inovasi yang akan datang	m x 1
N_t	Matriks varian dari r_t	m x m
u_t	Vektor galat pemulusan	r x r
L_t	-	m x m
D_t	-	n x n

(Mergner, 2009).

2.4 Pembentukan Model Representasi *State Space*

2.4.1 Pendugaan Parameter

Dalam analisis *state space*, kita dihadapkan dengan dua kelompok parameter yang akan diduga untuk model yang diberikan. Kelompok pertama termuat dalam vektor parameter θ . Kelompok kedua adalah peubah inisialisasi untuk proses (nonstasioner) yang tidak teramati dan koefisien regresi. Kondisi awal untuk komponen tidak teramati yang stasioner dapat diturunkan berdasarkan teori fungsi autokorelasi (Koopman dan Ooms, 2010).

1. Parameter dalam vektor θ

Berdasarkan Durbin dan Koopman (2012), apabila diasumsikan vektor *state* inisialisasi mempunyai densitas $N(\alpha_{1|0}, P_{1|0})$ dimana $\alpha_{1|0}$ dan $P_{1|0}$ diketahui, maka *likelihood* dan *loglikelihood*nya adalah:

$$L(Y_n) = p(y_1, \dots, y_n) = p(y_1) \prod_{t=2}^n p(y_t | Y_{t-1}), \quad (2.22)$$

$$\log L(Y_n) = \sum_{t=1}^n \log p(y_t | Y_{t-1}),$$

Dimana $Y_t = (y'_1, \dots, y'_t)'$, $p(y_1|Y_0) = p(y_1)$. Dengan mensubstitusikan $N(Z_t\alpha_t, F_t)$ terhadap $p(y_t|Y_{t-1})$ dalam (2.22) didapatkan:

$$\log L(Y_n) = -\frac{n \cdot t}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\log |F_t| + v'_t F_t^{-1} v_t), \quad (2.23)$$

Nilai F_t dan v_t terhitung secara rutin melalui algoritma *kalman filter*. Diasumsikan F_t nonsingular untuk $t = 1, \dots, n$. Sekarang pertimbangkan dimana beberapa elemen α_t adalah difusi. Jumlah elemen difusi dalam α_1 adalah q yang merupakan dimensi dari vektor δ . Kemudian *loglikelihood* (2.23) mengandung bentuk $\frac{1}{2} q \log 2\pi$ sehingga $L(Y_n)$ tidak akan konvergen seperti halnya $\kappa \rightarrow \infty$.

Berdasarkan de Jong (1991), didefinisikan *loglikelihood* difusi dengan:

$$\log L_d(Y_n) = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} [\log L(Y_n) + \frac{q}{2} \log \kappa] \quad (2.24)$$

Loglikelihood dapat dimaksimisasi dengan cara maksimisasi numerik (*numerical maximization*). Ide dasar dari metode ini adalah untuk menemukan nilai $\hat{\theta}$ dimana *loglikelihood* dimaksimisasi. Sebuah algoritma digunakan untuk membuat taksiran yang berbeda untuk θ dan untuk membandingkan nilai numerik yang berkaitan dengan *loglikelihood*. Untuk menghitung pendugaan maksimum *likelihood*, algoritma melakukan sederetan langkah, dimulai dengan taksiran dari parameter yang tidak diketahui. Kemudian algoritma menentukan arah pencarian, menentukan seberapa jauh untuk bergerak dalam arah yang telah ditentukan, serta menghitung dan membandingkan nilai dari *loglikelihood* taksiran awal vektor parameter θ . Jika θ sudah cukup dekat dengan nilai *maksimum loglikelihood*, maka algoritma berhenti, selebihnya akan tetap dilanjutkan (Mergner, 2009).

Salah satu tahap dalam pendugaan parameter yaitu menentukan arah pencarian menggunakan vektor nilai (*score vector*) dinotasikan dengan $\partial_1(\theta)$, dimana untuk perhitungan didefinisikan dengan:

$$\begin{aligned}\partial_1(\theta) &= \frac{\partial \log L(Y_n|\theta)}{\partial \theta} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{t=1}^n [(\log|H_t| + \log|Q_{t-1}| + t_1 (\{\hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t' + V^{-1}(\varepsilon_t|Y_n)\} H_t^{-1}) \\ &\quad + t_1 (\{\hat{\eta}_t \hat{\eta}_t' + V^{-1}(\eta_t|Y_n)\} Q_{t-1}^{-1})]\end{aligned}\quad (2.25)$$

Selama pencarian nilai optimum, vektor nilai (2.25) dievaluasi untuk beberapa lokasi $\theta = \theta^*$ untuk memberikan informasi tentang arah pencarian menuju fungsi *likelihood* yang optimum. Diberikan beberapa nilai percobaan $\tilde{\theta}$ untuk θ , algoritma quasi-newton memberikan nilai perbaikan $\tilde{\theta}^+$ melalui persamaan

$$\tilde{\theta}^+ = \tilde{\theta} + s \partial_1(\theta)|_{\theta=\tilde{\theta}} \quad (2.26)$$

Dimana vektor nilai mengandung informasi tentang arah pencarian dengan matriks G memodifikasi arah pencarian dan s adalah skalar yang menentukan ukuran tahapan. Matriks G biasanya dinotasikan dengan $\partial_2(\theta)$ yang ditentukan melalui turunan orde kedua atau matriks hessian Ω . Adapun turunan orde kedua yaitu sebagai berikut:

$$\partial_2(\theta) = \frac{\partial^2 \log L(Y_n|\theta)}{\partial \theta \partial \theta'}$$

Dengan matriks hessian Ω adalah matriks kovarian dari parameter yang didefinisikan dengan:

$$\Omega = \left[\frac{\partial^2 \log L(Y_n|\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right]^{-1} \quad (2.28)$$

(Durbin dan Koopman, 2012).

2. Parameter dalam koefisien regresi

Ada 2 cara berkaitan dengan model regresi dalam representasi *state space*. Cara pertama yaitu dengan mempertimbangkan koefisien regresi sebagai komponen yang tidak teramati yang konstan sepanjang waktu. Adapun cara kedua yaitu dengan mengasumsikan semua sistem matriks sama dengan nol kecuali vektor d_t dan memasukkan koefisien regresi ke dalam vektor $d_t = X_t'w$, sehingga:

$$Y_t = X_t'w + \varepsilon_t \quad \text{untuk } t = 1, \dots, n \quad (2.29)$$

Dimana $\varepsilon_t \sim N(0, H_t)$. Penduga *generalized least square* dari koefisien regresi vektor w yaitu:

$$\hat{w} = (\sum_{t=1}^n X_t' H_t^{-1} X_t)^{-1} \sum_{t=1}^n X_t' H_t^{-1} Y_t \quad (2.30)$$

(Durbin dan Koopman, 2012).

Misalkan θ adalah parameter pada model dan $\hat{\theta}$ adalah nilai taksiran parameter serta $\text{std}(\hat{\theta})$ adalah galat standar dari nilai taksiran $\hat{\theta}$, maka uji signifikansi parameter dapat dilakukan dengan tahapan sebagai berikut:

$$H_0 : \theta = 0$$

$$H_1 : \theta \neq 0$$

Statistik uji:

$$t_h = \frac{\hat{\theta}}{\text{std}(\hat{\theta})}$$

Tolak H_0 jika $|t_{hit}| > t_{\alpha; n-1}$ atau $p\text{-value} < \alpha$, yang berarti parameternya signifikan (Gujarati, 2003).

2.4.2 Goodness of Fit

Agar mendapat perbandingan yang cukup bahwa model mengandung *likelihood* yang lebih besar, *information criteria* seperti halnya *Akaike information criterion* (AIC) dan *Bayesian information criterion* (BIC) digunakan. Untuk deret univariat diberikan:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= n^{-1}[-2 \log L(Y_n|\hat{\theta}) + 2\omega], \\ \text{BIC} &= n^{-1}[-2 \log L(Y_n|\theta) + \omega \log n], \end{aligned} \quad (2.31)$$

Dan dengan difusi inisialisasi, *information criteria* diberikan:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= n^{-1}[-2 \log L_d(Y_n|\hat{\theta}) + 2(q + \omega)], \\ \text{BIC} &= n^{-1}[-2 \log L_d(Y_n|\hat{\theta}) + (q + \omega) \log n], \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dimana ω adalah dimensi dari θ . Model dengan lebih banyak parameter atau lebih banyak elemen nonstasioner mendapatkan pinalti yang lebih besar (Durbin dan Koopman, 2012).

2.4.3 Deteksi Outlier

Alat untuk mengidentifikasi *outlier* berdasarkan hasil yang didapat pada pemulusan *state* dan disturbansi, diantaranya: $u_{t,i}^{(s)} = u_{t,i}/\sqrt{D_{ii,t}}$ digunakan untuk mengidentifikasi *outlier* pada persamaan observasi dan $r_{t,i}^{(s)} = r_{t,i}/\sqrt{N_{ii,t}}$ digunakan untuk mengidentifikasi *outlier* pada persamaan *state*. Dimana jika statistik $u_{t,i}^{(s)}$ adalah bernilai besar dalam nilai mutlak, maka kemungkinan *additive outlier* telah mempengaruhi deret (Pelagatti, 2016).

2.4.4 Uji Diagnostik Model

Diagnostik utama berdasarkan pada inovasi (v_t) diperoleh dengan menjalankan *kalman filter* terinisialisasi dengan *diffuse prior*. Kemudian residual didefinisikan sebagai inovasi standardisasi:

$$e_t = v_t / \sqrt{F_t}, \quad t = d + 1, \dots, n \quad (2.33)$$

(Harvey, 1989).

Koopman dan Ooms (2012), mengatakan bahwa untuk dapat mengecek sifat-sifat tersebut dapat dilakukan berdasarkan dengan alat uji diagnostik sampel besar di bawah ini:

a. Uji Normalitas

Momen pertama dari i diberikan:

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t, \quad m_2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (e_t - m_1)^q, \quad q = 2, 3, 4 \quad (2.34)$$

Dengan modifikasi dalam kasus difusi. Skewness dan Kurtosis dinotasikan dengan S dan K berurutan, dan didefinisikan sebagai:

$$S = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}}, \quad K = \frac{m_4}{m_2^2}, \quad (2.35)$$

Uji statistik standar dapat digunakan untuk mengecek apabila nilai teramati dari S dan K sesuai dengan densitasnya. Dimana dapat dikombinasikan menjadi:

$$J_1 = n \left(\frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{2} \right) \quad (2.36)$$

Yang secara asimtotik berdistribusi χ^2 dengan derajat bebas 2. Uji normalitas berdasarkan uji Jarque-Bera dengan uji hipotesis sebagai berikut:

H_0 = Residual berdistribusi normal

H_1 = Residual tidak berdistribusi normal

Dengan tingkat signifikansi $\alpha=0.05$.

Jika statistik $J_1 < \chi^2_{(2;\alpha)}$ atau $p\text{-value} > \alpha$, maka keputusan adalah tidak menolak H_0 . Sedangkan, jika statistik $J_1 > \chi^2_{(2;\alpha)}$ atau $p\text{-value} < \alpha$, maka keputusan adalah menolak H_0 .

b. Uji Homoskedastisitas

Uji sederhana untuk homoskedastisitas diperoleh dengan membandingkan jumlah kuadrat dua subhimpunan dari sampel. Sebagai contoh, statistik:

$$H(h) = \frac{\sum_{t=n-h+1}^n e_t^2}{\sum_{t=q+1}^{q+h} e_t^2} \quad (2.37)$$

Berdistribusi $F_{h,h}$ untuk suatu bilangan positif h yang telah ditentukan, dengan q adalah banyaknya elemen difusi inialisasi. h adalah bilangan bulat terdekat terhadap $(n - d)/3$. Uji homoskedastisitas berdasarkan uji F dua arah dengan uji hipotesis sebagai berikut:

H_0 = Residual memenuhi asumsi homoskedastisitas

H_1 = Residual tidak memenuhi asumsi homoskedastisitas

Dengan tingkat signifikansi $\alpha=0.05$.

Jika statistik $H(h) < F_{(h,h;\alpha)}$ atau $p\text{-value} > \alpha$, maka keputusan adalah tidak menolak H_0 . Sedangkan, jika statistik $H(h) > F_{(h,h;\alpha)}$ atau $p\text{-value} < \alpha$, maka keputusan adalah menolak H_0 .

c. Independen

Korelogram dari inovasi standardisasi korelasi serial harus tampak tidak signifikan. Didefinisikan statistik Ljung-Box:

$$Q(k) = n(n+2) \sum_{j=1}^k \frac{c_j^2}{n-j} \quad (2.38)$$

untuk suatu bilangan positif k dimana c_j adalah korelogram ke- j dengan nilai

$$c_j = \frac{1}{nm_2} \sum_{t=j+1}^n (e_t - m_1)(e_{t-j} - m_1) \quad (2.39)$$

Uji independen berdasarkan uji statistik portmanteau standar dengan uji hipotesis sebagai berikut:

H_0 = Residual memenuhi asumsi independen

H_1 = Residual tidak memenuhi asumsi independen

Dengan tingkat signifikansi $\alpha=0.05$.

Jika statistik $Q(k) < \chi^2_{(k-w+1; \alpha)}$ atau $p\text{-value} > \alpha$, maka keputusan adalah

tidak menolak H_0 . Sedangkan, jika statistik $Q(k) > \chi^2_{(k-w+1; \alpha)}$ atau $p\text{-value} < \alpha$, maka keputusan adalah menolak H_0

2.5 Aplikasi Kalman Filter

2.5.1 Data Pengamatan Hilang

Anggap bahwa observasi y_j hilang untuk $j = g, \dots, g^*$ dengan $1 < g < g^* < n$.

Bagaimanapun, dengan mudah untuk dapat menunjukkan proses seperti di bawah ini. Untuk $t = g, \dots, g^*$, didapatkan:

$$\alpha_{t|t} = E(\alpha_t | Y_t) = E(\alpha_t | Y_{t-1}) = \alpha_t$$

$$P_{t|t} = \text{Var}(\alpha_t | Y_t) = \text{Var}(\alpha_t | Y_{t-1}) = P_t$$

$$\alpha_{t+1} = E(\alpha_{t+1} | Y_t) = E(T_t \alpha_t + R_t \eta_t | Y_t) = T_t E(\alpha_t | Y_t)$$

$$P_{t+1} = \text{Var}(T_t \alpha_t + R_t \eta_t | Y_t) = T_t E(\alpha_t | Y_t) T_t' + R_t Q_t R_t'$$

Kalman filter untuk kasus data yang hilang diperoleh dengan menetapkan $Z_t = 0$ pada rekursi kalman filter pada tahap pembaharuan ataupun tahap peramalan (Durbin dan Koopman, 2012).

2.5.2 Peramalan

Anggap vektor observasi dengan $y_1, \dots, y_n$ berdasarkan model *state space* (2.9) dan akan dilakukan peramalan y_{n+j} untuk $j = 1, \dots, J$ dimana penduga $\bar{y}_{n+j}$ yang memiliki matriks kuadrat tengah galat minimum diberikan Y_n yaitu $\bar{F}_{n+j}$. Misalkan:

$$\bar{\alpha}_{n+j} = E(\alpha_{n+j}|Y_n) \text{ dan } \bar{P}_{n+j} = E[(\bar{\alpha}_{n+j} - \alpha_{n+j})(\bar{\alpha}_{n+j} - \alpha_{n+j})'|Y_n] \quad (2.40)$$

Semenjak $y_{n+j} = Z_{n+j}\alpha_{n+j} + \varepsilon_{n+j}$, maka didapatkan:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n+j} &= Z_{n+j}E(\alpha_{n+j}) \\ &= Z_{n+j}\bar{\alpha}_{n+j}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

Dengan matriks kuadrat tengah galat bersyarat:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{n+j} &= E[\{Z_{n+j}(\bar{\alpha}_{n+j} - \alpha_{n+j}) - \varepsilon_{n+j}\}\{Z_{n+j}(\bar{\alpha}_{n+j} - \alpha_{n+j}) - \varepsilon_{n+j}\}'|Y_n] \\ &= Z_{n+j}\bar{P}_{n+j}Z_{n+j}' + H_{n+j}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Sekarang akan diturunkan rekursi untuk menghitung $\bar{\alpha}_{n+j}$ dan $\bar{P}_{n+j}$. Diketahui

$\alpha_{n+j+1} = T_{n+j}\alpha_{n+j} + R_{n+j}\eta_{n+j}$, sehingga:

$$\bar{\alpha}_{n+j} = T_{n+j}E(\alpha_{n+j}|Y_n) = T_{n+j}\bar{\alpha}_{n+j} \quad (2.43)$$

Untuk $j = 1, \dots, J - 1$ dan dengan $\bar{\alpha}_{n+1} = \alpha_{n+1}$, dan juga

$$\begin{aligned} \bar{P}_{n+j+1} &= E[(\bar{\alpha}_{n+j+1} - \alpha_{n+j+1})(\bar{\alpha}_{n+j+1} - \alpha_{n+j+1})'|Y_n] \\ &= T_{n+j}E[(\bar{\alpha}_{n+j} - \alpha_{n+j})(\bar{\alpha}_{n+j} - \alpha_{n+j})'|Y_n]T_{n+j}' \\ &\quad + R_{n+j}E[\eta_{n+j}\eta_{n+j}']R_{n+j}' \\ &= T_{n+j}\bar{P}_{n+j}T_{n+j}' + R_{n+j}Q_{n+j}R_{n+j}' \end{aligned} \quad (2.44)$$

Peramalan dari $y_{n+1}, \dots, y_{n+j}$ bersamaan dengan matriks varian inovasi dapat diperoleh hanya dengan memperlakukan y_t untuk $t > n$ sebagai data yang hilang dan menggunakan hasil pada bagian 2.9.1 (Durbin dan Koopman, 2012).

2.5.3 Selang Kepercayaan

Di bawah asumsi kenormalan, maka dapat dibentuk selang kepercayaan untuk setiap komponen *state*.. Selang kepercayaan 95% dihitung dengan:

$$\alpha_t \pm 1.96\sqrt{P_t} \quad (2.45)$$

Dimana α_t dan P_t adalah komponen *state* dan varian dari *state* yang telah terfilter (Commandeur dan Koopman, 2007).

2.6 Metode Peramalan Lain

2.6.1 Pengantar dalam Peramalan dengan Metode Lain

2.6.1.1 Stasioneritas

Stasioneritas artinya tidak terjadi pertumbuhan dan penurunan. Data dikatakan stasioner apabila pola data tersebut berada pada kesetimbangan di sekitar nilai rata-rata dan varian yang konstan selama waktu tertentu. Data deret waktu dikatakan stasioner apabila tidak terdapat unsur tren dan musiman dalam data, atau dapat dikatakan rata-rata dan variannya tetap. Selain plot deret waktu, kestasioneran dapat dilihat dari plot autokorelasi yang turun mendekati nol secara cepat, umumnya setelah lag kedua atau ketiga. Kestasioneran data secara varian dapat dilihat dari Transformasi Box-Cox dimana dikatakan stasioner jika *rounded value*-nya bernilai satu. Apabila tidak stasioner dalam varian, maka dilakukan transformasi agar nilai

varian menjadi konstan. Box dan Cox memperkenalkan transformasi pangkat (*power transformations*) dengan persamaan sebagai berikut

$$T(Y_t) = \frac{(Y_t^\lambda - 1)}{\lambda}, \quad \lambda \neq 0 \quad (2.46)$$

Dengan λ disebut sebagai parameter transformasi. Dalam Transformasi Box-Cox, λ akan diperoleh, dimana nantinya akan menentukan transformasi yang harus dilakukan. Khusus untuk $\lambda = 0$ dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} T(Y_t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(Y_t^\lambda - 1)}{\lambda} = \ln(Y_t), \quad (2.47)$$

Nilai beserta aturan Transformasi Box-Cox dapat dilihat pada Tabel 2.5.

Tabel 2.5. Transformasi Box-Cox

Nilai λ	Transformasi
-1	$\frac{1}{Y_t}$
-0.5	$\frac{1}{\sqrt{Y_t}}$
0	$\ln(Y_t)$
0.5	$\sqrt{Y_t}$
1	Y_t (tidak ada transformasi)

Ketidakstasioneran rata-rata dapat diatasi dengan melakukan *differencing* (pembedaan). Perlu diingat bahwa Transformasi Box-Cox untuk melihat kestasioneran varian harus dilakukan sebelum melakukan differencing. Operator shift mundur (*backward shift*) sangat tepat untuk menggambarkan proses *differencing*. Penggunaan *backward shift* adalah sebagai berikut

$$B^d Y_t = Y_{t-d} \quad (2.48)$$

(Wei, 2006).

Uji stasioneritas juga dapat dilakukan dengan uji akar unit pada tingkat level atau tingkat *differencing*. Persamaan akar unit jika menggunakan intersep adalah sebagai berikut:

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \beta_i \Delta y_{t-i+1} + \varepsilon_t \quad (2.49)$$

Dengan $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$. Hipotesisnya adalah

$H_0 : \gamma = 0$ (terdapat akar unit).

$H_1 : \gamma \neq 0$ (tidak terdapat akar unit).

$$ADF_{\gamma} = \frac{\hat{\gamma}}{se(\hat{\gamma})}$$

Pada tingkat signifikansi $\alpha=0.05$.

H_0 ditolak jika statistik $ADF_{\gamma} > t_{\alpha; n-k-1}$ atau $p \text{ value} < \alpha$. Jika H_0 ditolak maka data stasioner (Fuller, 1996).

2.6.1.2 ACF dan PACF

Koefisien autokorelasi pada *lag* ke- k adalah:

$$r_k = \frac{C(y_t, y_{t-k})}{V(y_t)} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (2.50)$$

Sekumpulan nilai dari r_k dengan $k= 0, 1, 2, \dots$ disebut dengan ACF (*Autocorrelation Function*). Adapun persamaan matriks di bawah ini untuk dapat menentukan PACF yaitu:

$$\phi_k = R^{-1}r_k \quad (2.51)$$

Dengan

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r(1) & r(2) & \dots & r(k-1) \\ r(1) & 1 & r(3) & \dots & r(k-2) \\ r(2) & r(1) & 1 & \dots & r(k-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(k-1) & r(k-2) & r(k-3) & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$\phi_k = \begin{bmatrix} \phi_{1k} \\ \phi_{2k} \\ \phi_{3k} \\ \vdots \\ \phi_k \end{bmatrix}, \quad \text{dan } r_k = \begin{bmatrix} r(1) \\ r(2) \\ r(3) \\ \vdots \\ r(k) \end{bmatrix},$$

untuk setiap k , $k=1, 2, \dots$ dimana koefisien terakhir ϕ_k disebut dengan PACF (*Partial Autocorrelation Function*) (Montgomery, Jennings, dan Kulahci, 2008).

2.6.1.3 Ketepatan Peramalan

Salah satu ukuran ketepatan peramalan yang seringkali dipergunakan adalah MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) yang didapat melalui perhitungan:

$$\text{MAPE} = \frac{100}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|y_t - \hat{y}_t|}{|y_t|} \quad (2.52)$$

(Pelagatti, 2016).

2.6.2 Metode Box-Jenkins

Beberapa model yang seringkali dipergunakan untuk melakukan analisis terhadap data time series adalah sebagai berikut :

1. Model *Autoregresif* (AR)
2. Model *Moving Average* (MA)
3. Model *Autoregressive-Moving Average* (ARMA)
4. Model *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA)

Bentuk umum model *autoregressive integrated moving average* ARIMA (p,d,q) adalah :

$$(1 - B)(1 - \phi_1 B)Y_t = \mu' + (1 - \omega_1 B)e_t \quad (2.53)$$

Keterangan:

Y_t = data deret yang stasioner

e_t = kesalahan peramalan

Y_{t-1}, Y_{t-p} = nilai lampau deret yang bersangkutan

e_{t-1}, e_{t-q} = kesalahan masa lampau

β_0 dan $\beta_1, \beta_p, \omega_1, \omega_q$ = konstanta dan koefisien model

$(1 - B)$ = Pembeda pertama

$(1 - \phi_1 B) Y_t$ = AR(1)

$\mu' + (1 - \theta_1 B) e_t$ = MA(1)

Dasar pendekatan box-jenkins terdiri dari tiga tahapan, diantaranya tahap identifikasi, pendugaan dan pengujian, dan peramalan.

1. Identifikasi

Pada tahap ini, dilakukan pemeriksaan terhadap data menggunakan ACF dan PACF dengan ketentuan data deret waktu telah stasioner, sehingga didapatkan model-model yang mungkin.

Tabel 2.6. Identifikasi Order Model dengan ACF dan PACF

No	Model	ACF	PACF
1.	$AR(p)$	Menurun secara bertahap menuju ke-0	Menuju ke-0 setelah <i>lag</i> ke- p
2.	$MA(q)$	Menuju ke-0 setelah <i>lag</i> ke- q	Menurun secara bertahap menuju ke-0
3.	$ARMA(p,q)$	Menurun secara bertahap menuju ke-0	Menurun secara bertahap menuju ke-0

2. Pendugaan dan pengujian diagnostik

penaksiran parameter model ARIMA Box Jenkins dapat dilakukan dengan menggunakan beberapa metode, salah satunya metode *least squares* serta metode *maximum likelihood*. Metode kuadrat galat terkecil (*least squares*) dilakukan secara rekursif sampai jumlah kuadrat galat terminimisasi. Metode *maximum likelihood* mencari nilai dari parameter yang memaksimumkan *likelihood* dimana pendugaan juga dilakukan secara rekursif.

3. Peramalan

Setelah didapatkan model dengan parameter yang signifikan serta memenuhi asumsi uji diagnostic model, maka peramalan dapat dilakukan. Dimana persamaan dalam model (2.49) dikembangkan sehingga tampak seperti persamaan regresi yang lebih sederhana (Makridakis, Wheelwright, dan Hyndman, 1998).

Uji diagnostik dilakukan dengan asumsi residual berdistribusi normal serta bersifat acak. Pengujian asumsi residual berdistribusi normal menggunakan uji Kolmogorov-smirnov dengan uji hipotesis sebagai berikut (Conover, 1980):

$H_0 : S(x) = F_0(x)$ untuk semua x (residual berdistribusi normal)

$H_1 : S(x) \neq F_0(x)$ untuk semua x (residual tidak berdistribusi normal)

Statistik uji:

$$D_{hit} = \sup_x |S(x) - F_0(x)|$$

Dengan

D_{hit} : deviasi maksimum

$\sup_x$: nilai supremum untuk semua x dengan selisih $S(x)$ dan $F_0(x)$

$S(x)$: fungsi distribusi yang diasumsikan berdistribusi normal

$F_0(x)$: fungsi distribusi kumulatif dari x

Dengan $\alpha = 0.05$.

jika $D_{nii} < D_{\alpha;n}$, atau jika $p\text{-value} > \alpha$, maka keputusan adalah tidak menolak H_0 .

Adapun proses white noise dapat dideteksi menggunakan uji autokorelasi residual. Uji korelasi residual digunakan untuk mendeteksi ada tidaknya korelasi residual antar *lag*. Pengujian asumsi residual tidak saling berkorelasi dengan kata lain residual bersifat acak yaitu menggunakan uji Ljung-box dengan uji hipotesis sebagai berikut:

$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \dots = \rho_K = 0$ (residual bersifat acak)

$H_1 : \exists \rho_K \neq 0, k = 1, 2, \dots, K$ (residual tidak bersifat acak)

Statistik uji yaitu uji *Ljung Box-Pierce* dengan rumus uji (Wei, 2006):

$$Q(k) = n(n+2) \sum_{n=1}^k \frac{\hat{\rho}_k^2}{(n-k)} \quad (2.54)$$

Keputusan: tolak H_0 jika $Q > \chi^2_{\alpha; df = K-p-q}$. Di mana p dan q adalah orde dari *ARMA* (p, q). Statistik Q mendekati distribusi $\chi^2_{\alpha; df = k-p-q}$ dengan p dan q adalah orde dari *ARMA* (p, q). Jika $Q < \chi^2_{\alpha; df = k-p-q}$ atau $p\text{-value} > \alpha$, maka keputusan tidak menolak H_0 sehingga residual bersifat acak.

2.6.3 Metode Pemulusan Eksponensial

Kemudian untuk dapat melakukan peramalan, langkah yang terlebih dahulu dilakukan yaitu menentukan inisialisasi awal pemulusan serta menentukan nilai dugaan awal parameter pada setiap model dimana parameter tersebut adalah konstanta dalam persamaan. Untuk inisialisasi awal pemulusan dapat dilakukan dengan menginisialisasikannya dengan data observasi awal, rerata data observasi,

atau dapat juga ditentukan metode OLS dengan melakukan pencocokan model regresi linier terhadap data yang tersedia. Sedangkan untuk penentuan nilai parameter persamaan yaitu dipilih berdasarkan nilai parameter yang memberikan nilai jumlah kuadrat galat prediksi yang terkecil. Untuk kasus model berbentuk tren tanpa musiman, maka model berbentuk:

$$y_t = \mu_t + \beta_t t + \varepsilon_t \quad (2.55)$$

Persamaan pemulusan untuk model *Double exponential smoothing*

$$\mu_t = a y_t + (1 - a)\mu_{t-1} \quad (2.56)$$

$$\beta_t = a (\mu_t - \mu_{t-1}) + (1 - a)\beta_{t-1}$$

Persamaan pemulusan untuk model *Linear exponential smoothing*

$$\mu_t = a y_t + (1 - a)\mu_{t-1} \quad (2.57)$$

$$\beta_t = b (\mu_t - \mu_{t-1}) + (1 - b)\beta_{t-1}$$

(Montgomery, Jennings, dan Kulahci, 2008).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2016/2017 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder dari produk domestik bruto (PDB) harga berlaku dari dua negara maju eropa, Portugal dan Hungaria. Adapun PDB adalah nilai keseluruhan semua barang dan jasa yang diproduksi di dalam wilayah tersebut dalam jangka waktu tertentu. Sedangkan yang dimaksud dengan PDB atas dasar harga berlaku adalah PDB pada harga dari periode pada saat pelaporan. Selain itu, data penelitian yang digunakan yaitu data dalam kuartalan dari kuartal pertama di tahun 1996 sampai dengan kuartal terakhir di tahun 2015. Untuk menganalisis data, dilakukan dengan bantuan software SAS 9.4.

3.3 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu:

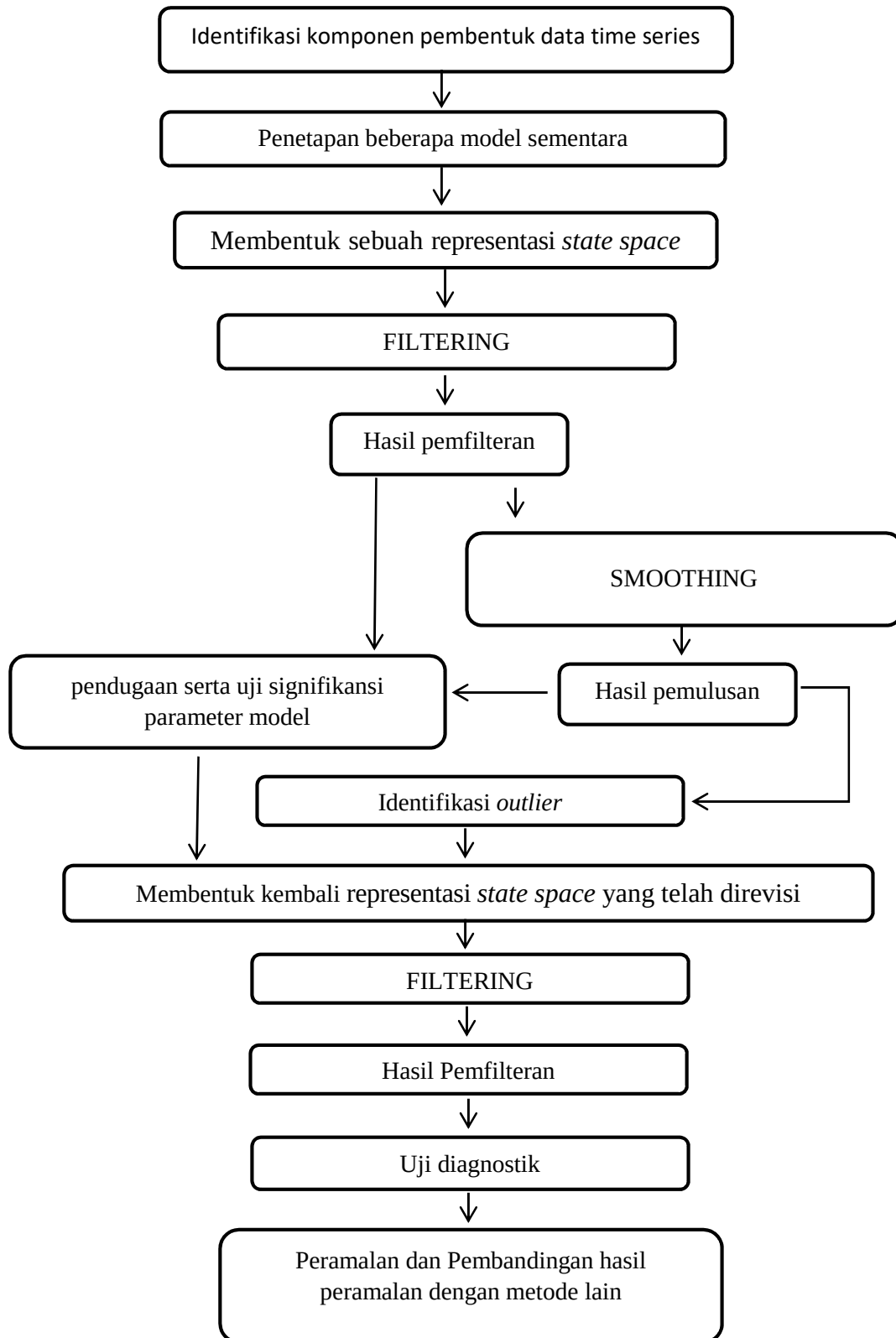
- A. Identifikasi model sementara persamaan representasi *state-space*
 1. Melakukan identifikasi pola data dan analisa komponen pembentuk data time series berdasarkan data penelitian.
 2. Menetapkan model sementara tiap persamaan univariat *structural time series*, semua kemungkinan model sementara yang tepat diperoleh berdasarkan informasi yang didapatkan pada tahap sebelumnya. Kemudian membentuk sebuah representasi *state space* yang terkonstruksi berdasarkan model sementara setiap model univariat *structural time series*.
- B. Pemfilteran dan pemulusan dalam representasi univariat dan multivariat
 1. Melakukan pemfilteran dari data dengan algoritma *kalman filter*.
 2. Melakukan pemulusan dari hasil pemfilteran dengan algoritma *state and disturbance smoother*,
 3. Melakukan pendugaan parameter menggunakan metode *maksimum likelihood*. Kemudian melakukan uji signifikansi parameter berdasarkan semua model sementara yang mungkin, model dengan parameter yang tidak signifikan untuk selanjutnya diabaikan.
 4. Melakukan pendeteksian terhadap *outlier* dari model univariat, serta melakukan revisi model dengan menambahkan peregresi statis ke dalam model jika terdapat *outlier* dari data.
 5. Melakukan pemfilteran, pemulusan dan pendugaan parameter ulang dengan model yang telah direvisi.

C. Penentuan model akhir dan peramalan

1. Membentuk kembali sebuah representasi *state space* yang terkonstruksi dari model akhir yang telah direvisi yang telah memenuhi uji signifikansi parameter.
2. Melakukan uji diagnostik model pada setiap peubah berdasarkan asumsi model linear *gaussian*, dengan asumsi normalitas, independen, serta homoskedastisitas.
3. Melakukan peramalan dengan algoritma *kalman filter* dengan model akhir.

D. Peramalan dengan metode lain

1. Melakukan peramalan terhadap data dengan menggunakan metode *box-jenkins* dan pemulusan eksponensial.
2. Perbandingan metode peramalan lain dengan metode *kalman filter* secara univariat, dimana ukuran ketepatan peramalan yang digunakan dalam perbandingan antar metode adalah MAPE.



Gambar 1. Diagram alir penelitian

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan beberapa hal diantaranya:

1. Persamaan akhir yang diperoleh yaitu model *integrated random walk with;; intervention variable* dengan representasi *state space* sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} y_t^{(1)} \\ y_t^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tau_t^{(1)} \\ \tau_t^{(2)} \\ \beta_t^{(1)} \\ \beta_t^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.713 x_t^{(1)} \\ 213.422 x_t^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t^{(1)} \\ \varepsilon_t^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{t+1}^{(1)} \\ \tau_{t+1}^{(2)} \\ \beta_{t+1}^{(1)} \\ \beta_{t+1}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tau_t^{(1)} \\ \tau_t^{(2)} \\ \beta_t^{(1)} \\ \beta_t^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_t^{(1)} \\ \zeta_t^{(2)} \end{pmatrix}$$

2. Sebelum mendapatkan persamaan akhir, *kalman filter* dijalankan berdasarkan data PDB Portugal dan Hungaria. Hasil dari pemfilteran dipergunakan pendugaan parameter serta uji diagnostik model, dimana hasil menunjukkan terdapat model dengan parameter signifikan serta semua asumsi uji diagnostik terpenuhi. Yang akhirnya, *kalman filter* kembali dipergunakan untuk melakukan peramalan di masa mendatang.
3. Sebagai pembanding, dilakukan peramalan metode box-jenkins dan pemulusan eksponensial. Tetapi peramalan menggunakan metode box-jenkins tidak dapat dilakukan, karena data yang tidak menunjukkan kestasioneran

hingga beberapa kali diferensiasi pada peubah Portugal serta tidak terpenuhi uji diagnostik pada peubah Hungaria. Adapun pada metode pemulusan eksponensial, digunakan model *double exponential smoothing* dengan kesimpulan bahwa pada metode *kalman filter* dengan menggunakan model *structural time series* memiliki nilai MAPE yang lebih kecil.

5.2 Saran

Adapun saran untuk penelitian berikutnya yaitu:

1. Menggunakan model *structural* yang lain yang menggambarkan perilaku dari data penelitian tertentu yang lebih kompleks.
2. Melakukan analisis lebih lanjut dari data untuk kasus model *structural* multivariat, sehingga tergambarkan hubungan antara data yang satu dengan yang lainnya.
3. Menggunakan metode *kalman filter* untuk model lainnya dalam representasi *state space*, selain daripada model *structural* baik univariat maupun multivariat.

DAFTAR PUSTAKA

- Comandeur, J. dan S. J. Koopman. 2007. *An Introduction to State Space Time Series Analysis*. Oxford: Oxford University Press.
- Conover, W. J. 1980. *Practical Nonparametric Statistics second edition*. New York : John Wiley & Sons.
- de Jong, P. 1991. The Di use Kalman filter. *Annals of Statistics*. 19:1073–83.
- Durbin J. dan Koopman S. J. 2012. *Time Series Analysis by State Space Methods* (2nd ed.). Oxford: Oxford University Press.
- Fuller, W. 1996. *Introduction to Statistical Time Series*. John Wiley, New York.
- Harvey, A. C. 1989. *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Harvey, A. C. dan N. Shephard. 1993. Structural Time Series Models. In Maddala, G. S., Rao, C. R., and Vinod, H. D. (Eds.), *Handbook of Statistics, Volume 11*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers.
- Harvey, A. C. dan S. J. Koopman. 1997. Multivariate Structural Time Series Models. In Praagman, C. et al (Eds.), *Systematic Dynamics in Economic and Financial Models*, pp. 269–98. Chichester: John Wiley and Sons.
- Hingley, P. 2006. Forecasting Innovations. In Nicolas, M. (Ed.), *Method for Predicting Numbers of Patent Fillings*. Munich:Springer.
- Kalman, R. E. 1960. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering*. 82(D): 35–45.
- Koopman dan Ooms, 2010. *Forecasting Economic Time Series Using Unobserved Components Time Series Models*. Amsterdam: VU University Amsterdam

- Makridakis, S. G., Wheelwright, S.C., dan Hyndman, R.J. 1998. *Forecasting:Method and Application*. New York: John Wiley & Sons.
- Mergner, S. 2009. *Applications of State Space Models in Finance*. Gottingen:Universitatsverlag Gottingen.
- Montgomery, D., Jennings, C., dan Kulahci, M. 2008. *Introduction to Time Series Analysis and Forecasting*. New York: John Wiley and Sons Interscience Publication,
- Pelagatti, M. M. 2016. *Time Series with Unobserved Components*. Boca Raton: CRC Press.
- SAS Institute. 2016. *SAS/ETS 14.2 User's Guide*. United States of America: SAS Institute, Inc.
- Wei, W. W. S. 2006. *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*. New York: Addison-Wesley.
- Welch, G. dan Bishop, G. 2001. *An Introduction to the Kalman Filter*. Chapel Hill:University of North Carolina.