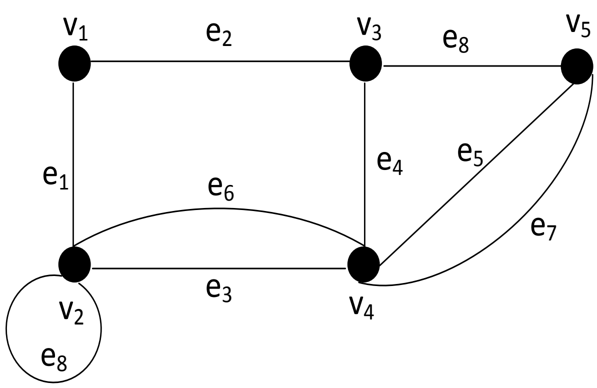
II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa konsep dasar teori graf dan dimensi partisi graf sebagai landasan teori dari penelitian ini.

2.1. Konsep Dasar Graf

Pada bagian ini akan diberikan beberapa definisi tentang konsep dasar graf yang diambil dari Deo, 1998.

Graf merupakan kumpulan titik dan sisi, dinotasikan dengan G = *(V,E)*, dengan *V* menyatakan himpunan titik $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ yang tak kosong dan *E* menyatakan himpunan sisi $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ yang merupakan pasangan tak terurut dari titik-titik di *V*.



Gambar 2. Contoh graf dengan 5 titik dan 8 sisi

Dua titik pada graf *G* dikatakan bertetangga (a*djacent*) bila keduanya terhubung dengan suatu sisi. Suatu sisi dikatakan menempel (*incident*) dengan suatu titik *u*, jika titik *u* merupakan salah satu titik ujung dari sisi tersebut. Pada Gambar 2, titik v_3 bertetangga dengan titik v_1 dan v_5. Sisi e_3 menempel pada titik v_2 dan v_4.

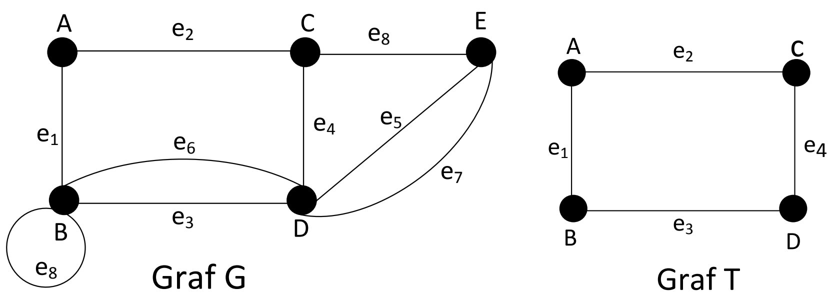
Derajat suatu titik *v* pada graf *G* adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik *v* , dinotasikan dengan $d(v)$. Daun (*pendant vertex*) adalah titik yang berderajat satu. Pada Gambar 2, $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 3$, $d(v_4) = 5$ dan $d(v_5) = 3$ dan graf tersebut tidak memiliki daun karena setiap titiknya memiliki derajat lebih dari satu.

Loop adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sisi paralel adalah sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama. Graf yang tidak mempunyai sisi ganda dan atau *loop* disebut graf sederhana. Pada Gambar 2, terdapat *loop* pada titik v_2 yaitu e_8, sedangkan e_3, e_6, e_5 dan e_7 disebut sisi paralel. Graf pada Gambar 2 bukan graf sederhana karena terdapat *loop* (e_8) dan sisi ganda (e_7).

Jalan (*walk*) adalah barisan berhingga dari titik dan sisi dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Lintasan (p*ath*) adalah jalan yang memiliki atau melewati titik yang berbeda-beda. Graf *G* dikatakan terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik yang berbeda. Sirkuit (*circuit*) adalah lintasan tertutup, yaitu lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sirkuit yang banyak titiknya genap disebut sirkuit genap, sedangkan jika banyak titiknya ganjil, maka disebut sirkuit ganjil. Pada Gambar 2, contoh jalan adalah v_1-e_1-v_2-e_3-v_4-e_7-v_5-e_5-v_4. Contoh lintasan adalah v_1-e_1-v_2-e_3-v_4-e_7-v_5-e_8-v_3. Contoh dari sirkuit adalah v_1-e_1-v_2-e_3-v_4-e_5-v_5-e_8-v_3-e_2-v_1.

Graf T dikatakan subgraf dari graf G dinotasikan dengan $T \subseteq G$ jika dan hanya jika $V(T) \subseteq V(G)$ dan $E(T) \subseteq E(G)$.

Contoh subgraf :

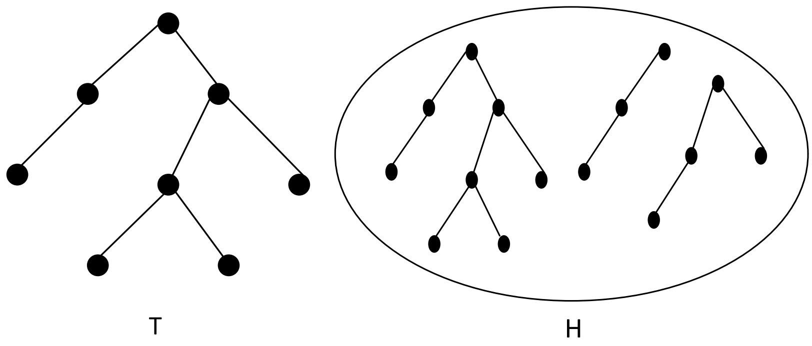


Gambar 3. $T \subseteq G$

2.2. Beberapa Kelas Graf Pohon

Berikut ini akan diberikan beberapa kelas graf pohon yang berkaitan dengan penelitian ini.

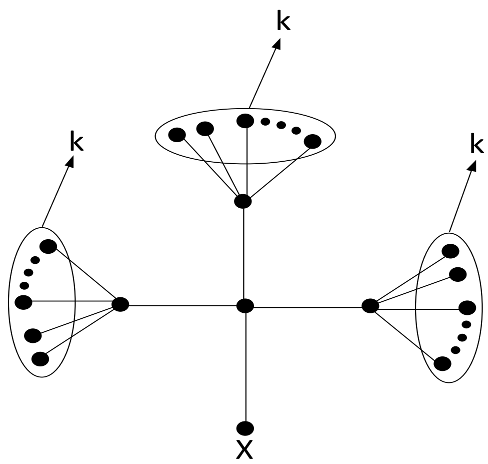
Misalkan G adalah graf terhubung, G disebut pohon jika dan hanya jika G tidak memuat sirkuit dan gabungan dari pohon disebut hutan (*forest*).



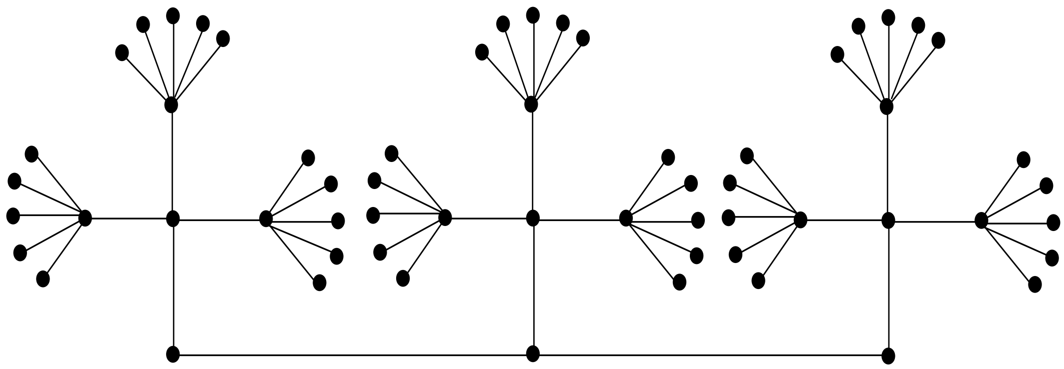
Gambar 4. Contoh pohon dan hutan

Pada Gambar 4, T adalah pohon dan H adalah hutan.

Graf $nS_{4,k}$ adalah graf yang diperoleh dari n graf $S_{4,k}$ dan setiap titik x nya dihubungkan oleh suatu lintasan.

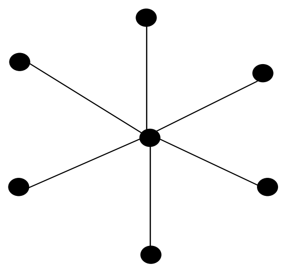


Gambar 5. Graf $S_{4,k}$



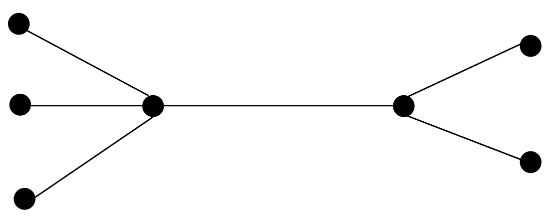
Gambar 6. Graf $3S_{4,5}$

Graf bintang $K_{1,n}$ (*star*) adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat n yang disebut pusat dan titik lainya berderajat satu (Chartrand dkk., 1998).



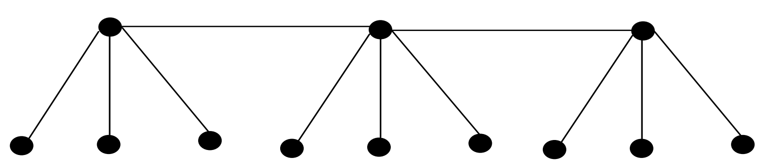
Gambar 7. Graf bintang $K_{1,6}$

Suatu graf pohon disebut graf bintang ganda (d*ouble star*) jika graf pohon tersebut mempunyai tepat dua titik x dan y berderajat lebih dari satu. jika x dan y berturut-turut berderajat $a + 1$ dan $b + 1$, dinotasikan dengan $S_{a,b}$ (Chartrand dkk., 1998).



Gambar 8. Graf bintang ganda $S_{3,2}$

Graf ulat (*caterpillar graf*) adalah graf pohon yang memiliki sifat apabila dihapus semua daunnya akan menghasilkan lintasan (Chartrand dkk., 1998).



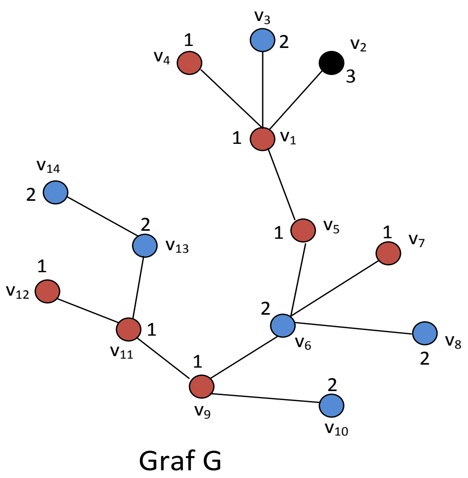
Gambar 9. Contoh graf ulat

2.3. Dimensi Partisi Graf

Pada bagian ini akan diberikan definisi dan sifat-sifat dari dimensi partisi pada suatu graf yang diambil dari Chartrand dkk (1998).

Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf, $v \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$. Jarak dari titik v ke himpunan S, dinotasikan dengan $d(v, S)$ adalah, $min\{d(v, x), x \in S\}$ dengan $d(v, x)$ adalah jarak dari titik v ke x. Misalkan $\{S_{1,}S_2, \ldots, S_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$ dengan $S_{1,}S_2, \ldots, S_k$ kelas-kelas dari $\prod$. Representasi v terhadap $\prod$, dinotasikan dengan $r(v|\prod)$, adalah k-tupel terurut $(d(v, S_1), d(v, S_2), \ldots, d(v, S_k))$. Selanjutnya, $\prod$ disebut partisi pembeda dari $V(G)$ jika $r(u|\prod) \neq r(v|\prod)$ untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$. Dimensi partisi dari G, dinotasikan $pd(G)$, adalah nilai k terkecil sehingga G mempunyai partisi pembeda dengan k kelas.

Berikut ini akan diberikan graf *G* dan akan ditentukan dimensi partisinya.



Gambar 10. Dimensi partisi graf *G*

Graf G dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{S_1,S_2,S_3\}$, dengan $S_1 = \{v_1,v_4,v_5,v_7,v_9,v_{11},v_{12}\}$, $S_2 = \{v_3,v_6,v_8,v_{10},v_{13},v_{14}\}$ dan $S_3 = \{v_2\}$. Perhatikan bahwa $r(v_1|\Pi) = (0,1,1)$; $r(v_2|\Pi) = (1,2,0)$; $r(v_3|\Pi) = (1,0,2)$; $r(v_4|\Pi) = (0,2,2)$; $r(v_5|\Pi) = (0,1,2)$; $r(v_6|\Pi) = (1,0,3)$; $r(v_7|\Pi) = (1,0,4)$; $r(v_8|\Pi) = (2,0,4)$; $r(v_9|\Pi) = (0,1,4)$; $r(v_{10}|\Pi) = (1,0,5)$; $r(v_{11}|\Pi) = (0,1,5)$; $r(v_{12}|\Pi) = (0,1,6)$; $r(v_{13}|\Pi) = (1,0,6)$; $r(v_{14}|\Pi) = (0,1,7)$. Karena representasi dari setiap titik berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari graf G dan $pd(G) \leq 3$.

Untuk menunjukkan $pd(G) \geq 3$, andaikan terdapat partisi pembeda $\Pi = \{S_1,S_2\}$ dari G. Perhatikan titik v_1, v_1 memiliki 3 daun yaitu v_2, v_3 dan v_4. Jika hanya terdapat dua kelas partisi pembeda, maka dua dari tiga daun tersebut akan memiliki partisi pembeda yang sama. Akibatnya representasi kedua daun itu akan sama, karena memiliki jarak yang sama terhadap titik-titik lainnya pada graf G, kontradiksi. Jadi $pd(G) \geq 3$. Akibatnya, $pd(G) = 3$. ■

Berikut ini akan diberikan lemma dan teorema penting dari dimensi partisi yang telah dibuktikan Chartrand dkk. (1998).

Lemma 2.2.1

Diberikan G graf terhubung dengan partisi pembeda Π dari $V(G)$, untuk $u,v \in V(G)$, jika $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u,v\}$, maka u dan v merupakan elemen yang berbeda dari Π.

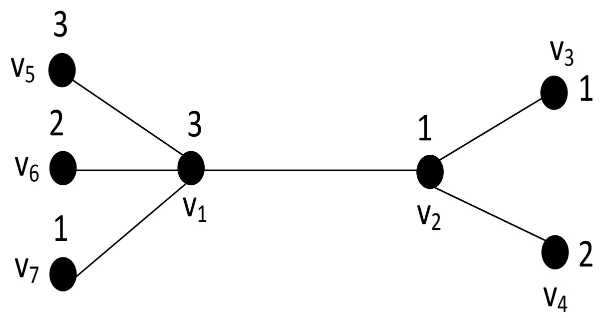
Berikut ini akan diberikan teorema untuk menentukan dimensi partisi pada graf bintang ganda.

Teorema 2.2.2

Jika T adalah graf bintang ganda berorde $n \geq 6$, dengan x dan y dua titik yang bukan daun, maka $pd(T) = \max\{\deg(x), \deg(y)\} - 1$.

Contoh penentuan dimensi partisi graf dari graf bintang ganda.

Diberikan graf bintang ganda $S_{3,2}$, akan tentukan bahwa $pd(S_{3,2}) = 3$.



Gambar 11. Dimensi partisi graf bintang ganda $S_{3,2}$

Graf bintang ganda $S_{3,2}$ dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\prod = \{S_1,S_2,S_3\}$, dengan $S_1 = \{v_2,v_3,v_7\}$, $S_2 = \{v_4,v_6\}$, dan $S_3 = \{v_1,v_5\}$.

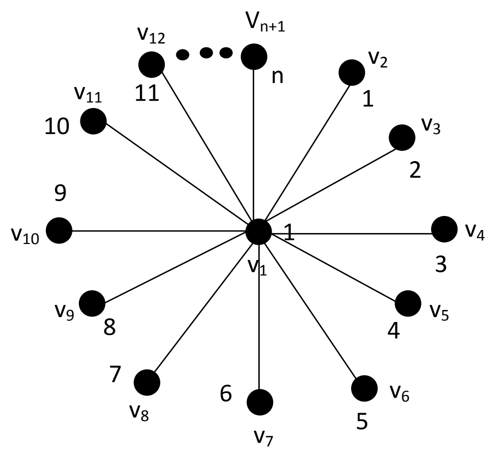
Perhatikan bahwa $r(v_1|\prod) = (1,1,0)$; $r(v_2|\prod) = (0,1,1)$; $r(v_3|\prod) = (0,2,2)$; $r(v_4|\prod) = (1,0,2)$; $r(v_5|\prod) = (2,2,0)$; $r(v_6|\prod) = (2,0,1)$; $r(v_7|\prod) = (0,2,1)$. Karena representasi dari setiap titik berbeda, maka $\prod$ adalah partisi pembeda dari graf $S_{3,2}$ dan $pd(G) \leq 3$.

Untuk menunjukkan $pd(S_{3,2}) \geq 3$, andaikan terdapat partisi pembeda $\prod = \{S_1,S_2\}$ dari G dengan $S_1=\{v_1,v_3,v_7\}$; $S_2=\{v_1,v_4,v_5,v_6\}$, maka titik v_5,v_6 akan memiliki representasi yang sama yaitu (2,0), kontradiksi. Jadi $pd(S_{3,2}) \geq 3$. Akibatnya, $pd(S_{3,2}) = 3$. ■

Teorema 2.2.3

Misalkan $K_{1,n}$ graf bintang berode $n \geq 1$, maka $pd(K_{1,n}) = n$.

Bukti :

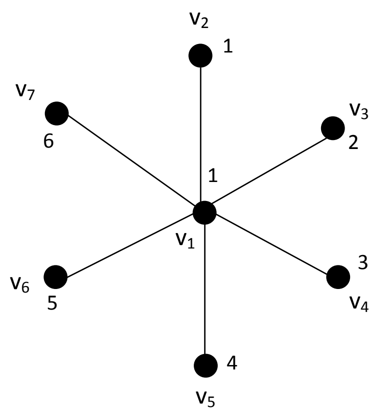


Gambar 12. Dimensi partisi graf bintang $K_{1,n}$

Graf $K_{1,n}$ dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_{6,\ldots,}S_n\}$ dengan $S_1 = \{v_1,v_2\}$, $S_2 = \{v_3\}$, $S_3 = \{v_4\}$, $S_4 = \{v_5\}$, $S_5 = \{v_6\}$, $S_6 = \{v_7\}$,..., dan $S_n = \{v_{n+1}\}$. Perhatikan bahwa $r(v_1|\Pi) = (0,1,1,1,1,1,1,\ldots,1)$; $r(v_2|\Pi) = (0,2,2,2,2,\ldots,2)$; $r(v_3|\Pi) = (1,0,2,2,2,2,\ldots,2)$; $r(v_4|\Pi) = (1,2,0,2,2,2,\ldots,2)$; $r(v_5|\Pi) = (1,2,2,,0,2,2,\ldots,2)$; $r(v_6|\Pi) = (1,2,2,2,0,2,\ldots,2)$;…;$r(v_{n+1}|\Pi) = (1,2,2,2,2,2,\ldots,0)$. Karena representasi dari setiap titik berbeda, maka Π adalah partisi pembeda dari graf $K_{1,n}$ dan $pd(K_{1,n}) \leq n$.

Untuk menunjukkan $pd(K_{1,n}) \geq n$, andaikan bahwa terdapat partisi pembeda $\prod = \{S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,\ldots,S_{n-1}\}$ dari $K_{1,n}$ maka akan ada representasi yang sama yaitu pada titik v_n dan v_{n+1}. Maka $\prod$ bukan merupakan partisi pembeda dari graf $K_{1,n}$, kontradiksi. Jadi $pd(K_{1,n}) \geq n$. Akibatnya, $pd(K_{1,n}) = n$. ■

Berikut ini akan diberikan contoh penentuan dimensi partisi dari graf bintang $K_{1,6}$.



Gambar 13. Dimensi partisi graf $K_{1,6}$

Graf $K_{1,6}$ dipartisi sedemikian sehingga diperoleh $\prod = \{S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6\}$ dengan $S_1 = \{v_1,v_2\}$, $S_2 = \{v_3\}$, $S_3 = \{v_4\}$, $S_4 = \{v_5\}$, $S_5 = \{v_6\}$ dan $S_6 = \{v_7\}$. Perhatikan bahwa $r(v_1|\prod) = (0,1,1,1,1,1)$; $r(v_2|\prod) = (0,2,2,2,2,2)$; $r(v_3|\prod) = (1,0,2,2,2,2)$; $r(v_4|\prod) = (1,2,0,2,2,2)$; $r(v_5|\prod) = (1,2,2,0,2,2)$; $r(v_6|\prod) = (1,2,2,2,0,2)$; $r(v_7|\prod) = (1,2,2,2,2,0)$. Karena representasi dari setiap titik berbeda, maka $\prod$ adalah partisi pembeda dari graf $K_{1,6}$ dan $pd(K_{1,6}) \leq 6$.

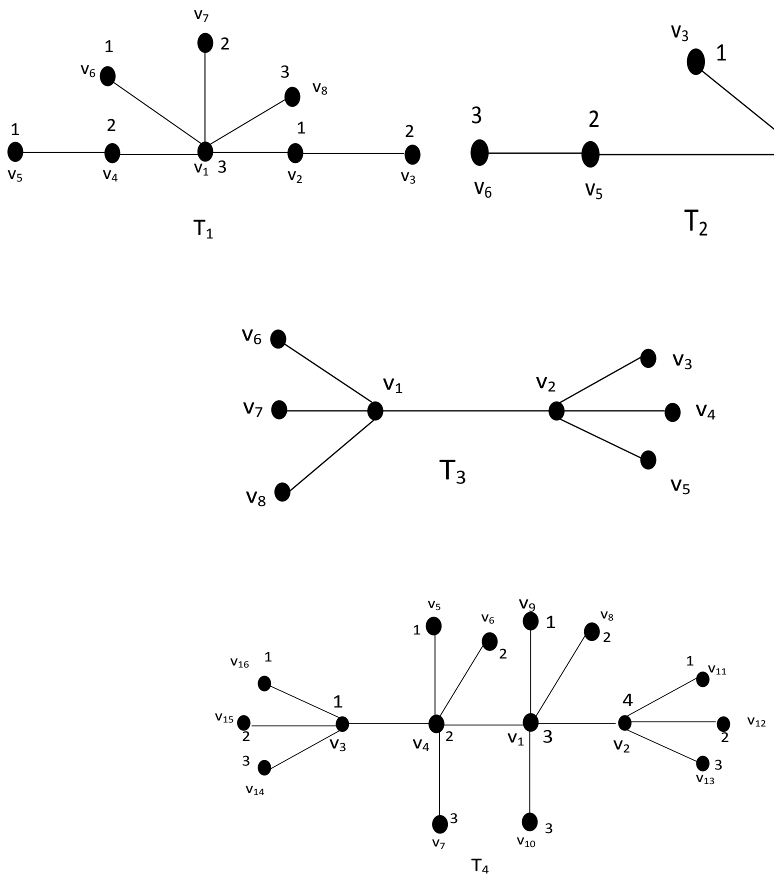
Untuk menunjukkan $pd(K_{1,6}) \geq 6$, andaikan bahwa terdapat partisi pembeda $\prod = \{S_1,S_2,S_3,S_4,S_5\}$ maka akan ada representasi yang sama pada titik v_6 dan v_7.

Sehingga, ∏ bukan merupakan partisi pembeda dari graf $K_{1,6}$, kontradiksi.. Jadi $pd(K_{1,6}) \geq 6$. Akibatnya, $pd(K_{1,6}) = 6$. ■

Teorema 2.2.4

Jika T adalah graf ulat dengan $\Delta_t(T) \geq 3$, maka $\Delta_t(T) - 2 \leq pd(T) \leq \Delta_t(T) + 1$.

Untuk membuktikan Teorema 2.2.4, perhatikan partisi pembeda pada graf-graf ulat berikut ini :



Gambar 14. Dimensi partisi graf ulat T_1, T_2, T_3 dan T_4

Graf ulat T_1 pada Gambar 14 memiliki $pd(T_1) = 3 = \Delta_t(T_1) - 2$ dengan minimal partisi pembeda $\Pi = \{S_1,S_2,S_3\}$ dengan $S_1 = \{v_2,v_5,v_6\}$; $S_2 = \{v_3,v_4,v_7\}$ dan $S_3 = \{v_1,v_8\}$.

Graf ulat T_2 pada Gambar 14 memiliki $pd(T_2) = 3 = \Delta_t(T_2) - 1$ dengan minimal partisi pembeda $\Pi = \{S_1,S_2,S_3\}$ dengan $S_1 = \{v_1,v_4\}$; $S_2 = \{v_3,v_5\}$ dan $S_3 = \{v_2,v_6\}$.

Graf ulat T_3 pada Gambar 14, adalah graf bintang ganda dan berdasarkan teorema 2.2.2 maka $\Delta_t(T_3) = pd(T_3) = 3$.

Graf ulat T_4 pada Gambar 14 memiliki $\Delta_t(T_4) = 3$ dengan partisi pembedanya $\Pi = \{S_1,S_2,S_3,S_4\}$ dari $V(T_4)$, dengan $S_1 = \{v_3,v_5,v_9,v_{11},v_{16}\}$; $S_2 = \{v_4,v_6,v_8,v_{12},v_{15}\}$; $S_3 = \{v_1,v_7,v_{10},v_{13},v_{14}\}$ dan $S_4 = \{v_2\}$. Untuk menunjukkan $pd(T_4) = 4$ cukup dengan menunjukkan bahwa tidak ada partisi pembeda dengan tiga kelas partisi dari $V(T_4)$. Misalkan $\Pi = \{S_1,S_2,S_3\}$ sebagai partisi pembeda dari $V(T_4)$ maka akan ada kesamaan partisi pembeda dari titik v_1 dan v_2 sehingga mengakibatkan representasinya akan sama juga. Sehingga $\Pi = \{S_1,S_2,S_3\}$ bukanlah partisi pembeda yang tepat untuk T_4, kontradiksi. Akibatnya, $pd(T_4) = 4 = \Delta_t(T_3) + 1$.