PEMODELAN DAN SIMULASI NUMERIK PENYEBARAN PENYAKIT INFLUENZA DENGAN KONTROL VAKSINASI

Oleh

CAROLINE ALAM

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

ABSTRAK

PEMODELAN DAN SIMULASI NUMERIK PENYEBARAN PENYAKIT INFLUENZA DENGAN KONTROL VAKSINASI

oleh

Caroline Alam

Penyebaran penyakit influenza dapat dipelajari dengan pemodelan matematika. Model tersebut dikenal sebagai model epidemik *Susceptible-Infected-Recovered* (SIR). Model SIR memperhatikan tentang faktor kelahiran dan kematian. Sebagai upaya pencegahan penyebaran penyakit influenza, faktor vaksinasi akan ditambahkan ke dalam model tersebut. Hasilnya, model tersebut mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan epidemik. Analisis kualitatif menghasilkan parameter rasio reproduksi vaksinasi $R_v = \frac{\alpha(1-\sigma)}{\mu+\beta}$ dan tingkat vaksinasi minimum yang dibutuhkan untuk mencegah penyebaran penyakit influenza $\sigma_c = 1 - \frac{\beta+\mu}{\alpha}$. Hasil grafis disajikan dan dibahas secara kualitatif untuk mengilustrasikan solusi dengan menggunakan Metode Runge-Kutta. Pada kasus tersebut, diperoleh titik kesetimbangan yang bersifat stabil asimtotis dan tingkat minimum vaksinasi yang dibutuhkan untuk mencegah penyebaran penyakit influenza adalah $\sigma_c = 0.4333$. Semakin sedikit tingkat vaksinasi yang diberikan, maka semakin banyak proporsi individu terinfeksi yang ada di populasi, sehingga penyakit tidak menghilang dari populasi. Sebaliknya, semakin besar tingkat vaksinasi yang diberikan, maka semakin sedikit proporsi individu terinfeksi yang ada di populasi dan semakin cepat waktu yang dibutuhkan untuk menghilangkan penyakit.

Kata Kunci : *pemodelan matematika, vaksinasi, kestabilan, penyebaran penyakit influenza, model SIR.*

ABSTRACT

MODELING AND NUMERICAL SIMULATION OF THE SPREAD OF INFLUENZA DISEASE WITH VACCINATION CONTROL

by

Caroline Alam

The spread of influenza disease can be studied using mathematical model. The model is well known as Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model. The SIR model concerned about birth and death factor. In order to prevent and control the spread of influenza disease, the vaccination factor will be added into the model. As the results, the model has two equilibrium points, disease free and epidemic equilibrium. The qualitative analysis reveals the vaccination reproductive number $R_v = \frac{\alpha(1-\sigma)}{\mu+\beta}$ and the minimum level of the vaccination needed to prevent the spread of influenza disease $\sigma_c = 1 - \frac{\beta+\mu}{\alpha}$. Graphical result are presented and discussed qualitatively to illustrate the solution using Runge-Kutta Method. As the results, the equilibrium point is asymptotically stable and the minimum level of the vaccination needed to prevent the spread of influenza disease successfully is $\sigma_c = 0.4333$. The less the level of the vaccination given, the more the proportion of infected individuals present in the population, so the disease has not disappeared from the population. Otherwise, the more the level of the vaccination given, the less the proportion of infected individuals present in the population and the faster the time needed to make the disease dies out.

Key Words : *mathematical model, vaccination, stability, spread of influenza disease, SIR model.*

PEMODELAN DAN SIMULASI NUMERIK PENYEBARAN PENYAKIT INFLUENZA DENGAN KONTROL VAKSINASI

Oleh

CAROLINE ALAM

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Skripsi : **PEMODELAN DAN SIMULASI NUMERIK PENYEBARAN PENYAKIT INFLUENZA DENGAN KONTROL VAKSINASI**

Nama Mahasiswa : **Caroline Alam**

Nomor Pokok Mahasiswa : 1417031033

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

Amanto, S.Si., M.Si.
NIP. 19730314 200012 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Dra. Wamiliana, M.A, Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

   Sekretaris : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **17 Oktober 2017**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"Pemodelan dan Simulasi Numerik Penyebaran Penyakit Influenza dengan Kontrol Vaksinasi"** merupakan hasil karya saya sendiri dan bukan hasil karya orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Oktober 2017

Penulis,

METERAI TEMPEL
DE213AEF728362432
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Caroline Alam
NPM. 1417031033

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Caroline Alam, anak pertama dari dua bersaudara yang dilahirkan di Bandarlampung pada tanggal 25 April 1997 oleh pasangan Bapak Harmawan Alam dan Ibu Fatma Wilyana. Penulis memiliki satu orang adik laki-laki bernama Reza Arya Bima Alam.

Penulis menempuh pendidikan Taman Kanak-Kanak (TK) di TK Al-Azhar 2 Way Halim Bandarlampung pada tahun 2001 - 2002, kemudian menempuh pendidikan Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SD Al-Azhar 1 Bandarlampung pada tahun 2002 - 2008, lalu bersekolah di SMP Negeri 29 Bandarlampung pada tahun 2008 - 2011, dan bersekolah di SMA Negeri 9 Bandarlampung pada tahun 2011 - 2014.

Pada tahun 2014 penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SBMPTN. Selama menjadi mahasiswi, penulis ikut serta dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unila sebagai anggota aktif.

Pada tahun 2017 penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di Perusahaan Daerah Air Minum Way Rilau Bandarlampung, dan pada tahun yang sama penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Mandalasari, Kecamatan Sragi, Kabupaten Lampung Selatan, Provinsi Lampung.

Kata Inspirasi

"What is meant for you, will reach you even if it is beneath two montains. And what isn't meant for you, won't reach you even if it is between your two lips "
(Imam Ghazali)

"Work until your idols become your rivals"
(Kwon Ji Young)

"With every difficulty there is relief"
(Quran 94:5)

"Happiness can be found even in the darkest of times, if one only remembers to turn on the light"
(Albus Dumbledore)

"A lion does not concern himself with the opinion of sheep"
(Tywin Lannister)

Dengan mengucapkan Alhamdulillah,
Puji dan syukur kepada Allah Subhanahu Wata'ala atas segala nikmat dan karunia-Nya, dan suri tauladan Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam yang menjadi contoh dan panutan untuk kita semua.

Kupersembahkan sebuah karya kecil ini untuk:

Ayahanda Harmawan Alam dan Ibunda Fatma Wilyana
Terimakasih atas limpahan kasih sayang, pengorbanan, doa, dan seluruh motivasi di setiap langkahku. Karena atas doa dan ridho kalian, Allah memudahkan setiap perjalanan hidup ini.
Terimalah bukti kecil ini sebagai kado keseriusanku untuk membalas semua pengorbanan, keikhlasan, dan jerih payah yang selama ini kalian lakukan.

Adikku Reza Arya Bima Alam
Semoga apa yang telah kakakmu lakukan selalu bisa menjadi contoh dan motivasi untuk kalian.

Kakakku Rinaldy Wira Dharma
Terimakasih karena selalu mendukung dan memotivasi setiap perjuangan yang kulakukan.

Almamaterku Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan atas kehadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga dapat terselesaikannya skripsi dengan judul **"Pemodelan dan Simulasi Numerik Penyebaran Penyakit Influenza dengan Kontrol Vaksinasi"**.

Terselesaikannya skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, kerjasama, dan dukungan berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku pembimbing I yang telah memberikan arahan, bimbingan, ide, kritik dan saran kepada penulis selama proses pembuatan skripsi ini.
2. Bapak Amanto, S.Si., M.Si., selaku pembimbing II yang telah memberikan arahan, dukungan, serta semangat kepada penulis.
3. Bapak Agus Sutrisno, S.Si, M.Si., selaku penguji yang telah memberikan ide, kritik dan saran sehingga terselesainya skripsi ini.
4. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D., selaku Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis dalam menyelesaikan permasalahan seputar akademik.
5. Ibu Dra. Wamiliana, M.A, Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

7. Seluruh Dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
8. Bapak Mawan, Ibu Fatma dan keluarga yang selalu mengiringi langkah penulis dengan do'a dan nasihat untuk selalu berjuang setiap harinya.
9. Rinaldy Wira Dharma yang selalu memberi semangat, motivasi, dan doa serta tak pernah bosan mendengar keluh kesah penulis.
10. Teman-teman Matematika 2014, Abang dan Yunda Matematika 2013 yang selalu memberikan semangat, ide dan saran kepada penulis.
11. Sahabat-sahabat penulis Amoy, Yola, Nanda, April, Cia, Dinda, Retno, Adila, Ghesna, Tarissa, Novia, yang senantiasa menemani suka duka penulis.
12. Teman-teman penulis Pule, Maget, Ecy, Syafa, Dea, Wika, Lena, Dandi, Zulfi, Fajar, Arif, Nandarsi, Kiki, Anin, Caul, Ratna yang telah menjadi pelangi indah di masa kuliah penulis.
13. Rekan tangguh Rahmat yang selalu membantu penulis dalam segala keadaan.
14. Teman-teman KKN 2017 Desa Mandalasari.
15. Semua pihak yang terlibat dalam penyelesaian skripsi ini.

Tentunya, Penulis menyadari bahwa masih ada kekurangan dari skripsi ini, akan tetapi besar harapan semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Sekian dan terima kasih.

Bandar Lampung, Oktober 2017

Penulis

Caroline Alam

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Dalam dunia penyakit, sering dijumpai penyakit influenza. Influenza yang lebih dikenal dengan sebutan flu merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh virus RNA dari familia *Orthomyxoviridae*. Gejala yang paling umum dari penyakit ini adalah menggigil, demam, nyeri tenggorokan, nyeri otot, nyeri kepala, batuk, letih dan rasa tidak nyaman secara umum.

Biasanya, influenza ditularkan melalui udara lewat batuk atau bersin. Influenza juga dapat ditularkan melalui kontak langsung dengan tinja burung atau melalui kontak dengan permukaan yang telah terkontaminasi. Aerosol yang terbawa oleh udara diduga menimbulkan sebagian besar infeksi, walaupun jalur penularan mana yang paling berperan dalam penyakit ini belum jelas. Virus influenza dapat diinaktivasi oleh sinar matahari, disinfektan, dan deterjen. Sering mencuci tangan akan mengurangi risiko infeksi karena virus dapat diinaktivasi dengan sabun. Influenza terdiri dari influenza A, influenza B dan influenza C.

Munculnya penyakit mewabah akhir-akhir ini mendapat perhatian khusus dari masyarakat dan pemerintah tak terkecuali para ilmuan karena dapat mengancam kehidupan manusia dan binatang. Mengingat pentingnya pengetahuan lebih lanjut tentang penyebaran penyakit influenza, maka diperlukan suatu model matematika untuk penyebaran penyakit influenza.

Model yang digunakan pada penelitian ini menggunakan model epidemi SIR. Model epidemi SIR membagi populasi menjadi tiga kelompok. Kelompok pertama adalah kelompok yang sehat tetapi dapat terinfeksi. Kelompok kedua adalah kelompok yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit. Sedangkan kelompok ketiga adalah kelompok yang telah sembuh dan kebal dari penyakit. Pada penelitian ini, model tersebut dibatasi dengan kontrol vaksinasi. Vaksinasi adalah pemberian vaksin ke dalam tubuh seseorang untuk memberikan kekebalan terhadap penyakit tersebut.

Tidak semua masalah matematika dapat diselesaikan dengan metode analitik. Untuk mendapatkan jenis dan perilaku kestabilan dinamik dari penyebaran penyakit influenza, diperlukan sebuah metode numerik. Metode yang dipakai adalah metode Runge-Kutta. Metode ini dipakai karena dapat menyelesaikan masalah nonlinier seperti masalah penyebaran penyakit influenza dan dapat menghasilkan pendekatan yang mendekati solisi eksak atau solusi sebenarnya.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan pemodelan dan simulasi numerik penyebaran penyakit influenza terkontrol oleh vaksinasi dengan menggunakan metode Runge-Kutta.

1.3 Manfaat Penelitian

Penelitian ini bermanfaat untuk mengetahui simulasi numerik penyebaran penyakit influenza yang terkontrol oleh vaksinasi dan juga menambah pengetahuan tentang pengaplikasian metode Runge-Kutta.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan terhadap fungsi yang memuat satu variabel bebas. Jika *x* adalah fungsi dari *t*, maka contoh persamaan diferensial biasa adalah

$$\frac{dx}{dt} = t^2 \cos x$$

dimana persamaan tersebut memiliki order satu. Order dari persamaan diferensial adalah turunan tertinggi pada fungsi tak diketahui (peubah tak bebas) yang muncul dalam persamaan diferensial (Campbell & Haberman, 2008).

2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa Linier

Persamaan diferensial biasa linier memiliki bentuk umum

$$a_n(t)\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = f(t)$$

dengan $a_n \neq 0$, a_n, a_{n-1}, …, a_0 disebut koefisien persamaan diferensial. Fungsi *f(t)* disebut *input* atau unsur nonhomogen. Jika *f(t)* disebut *input*, maka solusi dari persamaan diferensial *x(t)* biasanya disebut *output*. Jika ruas sebelah kanan *f(t)* bernilai nol untuk semua nilai *t* dalam interval yang ditinjau, maka persamaan ini dikatakan homogen, sebaliknya dikatakan nonhomogen. Contoh persamaan diferensial biasa linier adalah

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3t$$

yang merupakan persamaan diferensial biasa linier nonhomogen orde satu.

2.1.2 Persamaan Diferensial Biasa Nonlinier

Jika persamaan diferensial biasa tidak dapat dinyatakan dalam bentuk umum persamaan diferensial biasa linier, maka persamaan diferensial tersebut adalah persamaan diferensial biasa nonlinier. Contoh persamaan diferensial biasa nonlinier adalah

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3x^2 = \sin t$$

yang merupakan persamaan diferensial biasa nonlinier nonhomogen order dua (Hidayat, 2006).

2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat *n* buah persamaan diferensial, dengan *n* buah fungsi yang tidak diketahui, dimana *n* merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua. Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling keterkaitan dan konsisten.

Bentuk umum dari suatu sistem *n* persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variabel bebas dan *t* adalah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivatif fungsi x_n terhadap *t* , dan *g*, adalah fungsi yang tergantung pada variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan *t* (Neuhauser, 2004).

2.2.1 Sistem Persamaan Diferensial Linier Orde Pertama

Solusi dapat dipandang sebagai himpunan persamaan parametrik dalam ruang berdimensi *n*. untuk suatu nilai tertentu dari *t*, solusi ini akan memberikan nilai untuk koordinat $x_1, x_2, \dots, x_n$ dari sebuah titik di dalam ruang itu. Bila *t* berubah maka koordinat itu pada umumnya juga berubah.

Jika variabel *t* tidak tampak secara eksplisit dalam fungsi-fungsi $F_1, F_2, \dots, F_n$ maka sistem itu disebut sistem otonom. Jika tidak maka sistem itu disebut tidak otonom. Jika variabel *t* menyatakan variabel waktu maka sistem otonom adalah bebas waktu dalam pengertian bahwa turunan-turunan yang berhubungan dengan pendefinisian sistem tidak berubah atas perubahan waktu.

Oleh karena itu, bentuk umum sistem dari *n* persamaan diferensial linier orde pertama dapat dituliskan sebagai berikut:

$$x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t)$$

$$x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t)$$

Jika setiap fungsi $b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)$ adalah nol untuk semua *t* dalam interval *I*, maka sistem tersebut dinamakan homogen, jika tidak maka dinamakan sistem tak homogen (Kartono, 2012).

2.3 Sistem *Autonomous*

Sistem persamaan diferensial nonlinear orde satu yang terdiri dari dua fungsi mempunyai bentuk umum

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y)$$

dimana $f_{1,2}$ merupakan fungsi nonlinear. Sistem ini disebut sistem autonomous karena variabel bebas *t* tidak muncul secara eksplisit (Boyce & DiPrima, 1986).

Sistem tersebut mempunyai penyelesaian jika untuk setiap $f_{1,2}$ adalah fungsi kontinu. Penyelesaian tersebut tunggal jika diberikan nilai awal

$$x(0) = x_0 \text{ dan } y(0) = y_0$$

dimana $(x_0, y_0) \in R = \{(x, y) \in R^2 | a < x < b, c < y < d\}$. Bidang R disebut sebagai bidang fase. Kurva yang dibentuk oleh penyelesaian $(x(t), y(t))$ yang disajikan pada bidang fase *R* disebut trayektori (Ionascu, 2006).

2.4 Kestabilan Sistem

Untuk mendapatkan kestabilan suatu sistem diberikan metode yang lebih mudah dengan menyelidiki pengaruh perubahan kecil pada syarat awal. Jika titik (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan maka diselidiki pengaruh perubahan kecil pada titik kesetimbangan tersebut.

Jika titik (x, y) merupakan titik disekitar titik kesetimbangan tersebut maka secara matematis titik (x, y) dapat dinotasikan sebagai

$$(x, y) = (x^* + \Delta x, y^* + \Delta y)$$

Pendekatan fungsi $f_1(x, y)$ dan $f_2(x, y)$ dapat ditentukan menggunakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut

$$f_{1,2}(x, y) \approx f_{1,2}(x^*, y^*) + \frac{\partial f_{1,2}(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f_{1,2}(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*)$$

Karena (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan maka $f_{1,2}(x^*, y^*) = 0$. Oleh karena itu, sistem $\frac{dx}{dt} = f_1(x, y)$ dan $\frac{dy}{dt} = f_2(x, y)$ dapat didekati sebagai sistem linear

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial y}\Delta y$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f_2(x^*, y^*)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f_2(x^*, y^*)}{\partial y}\Delta y$$

Sistem linear di atas dapat disajikan dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x^*, y^*)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$$= J(x) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

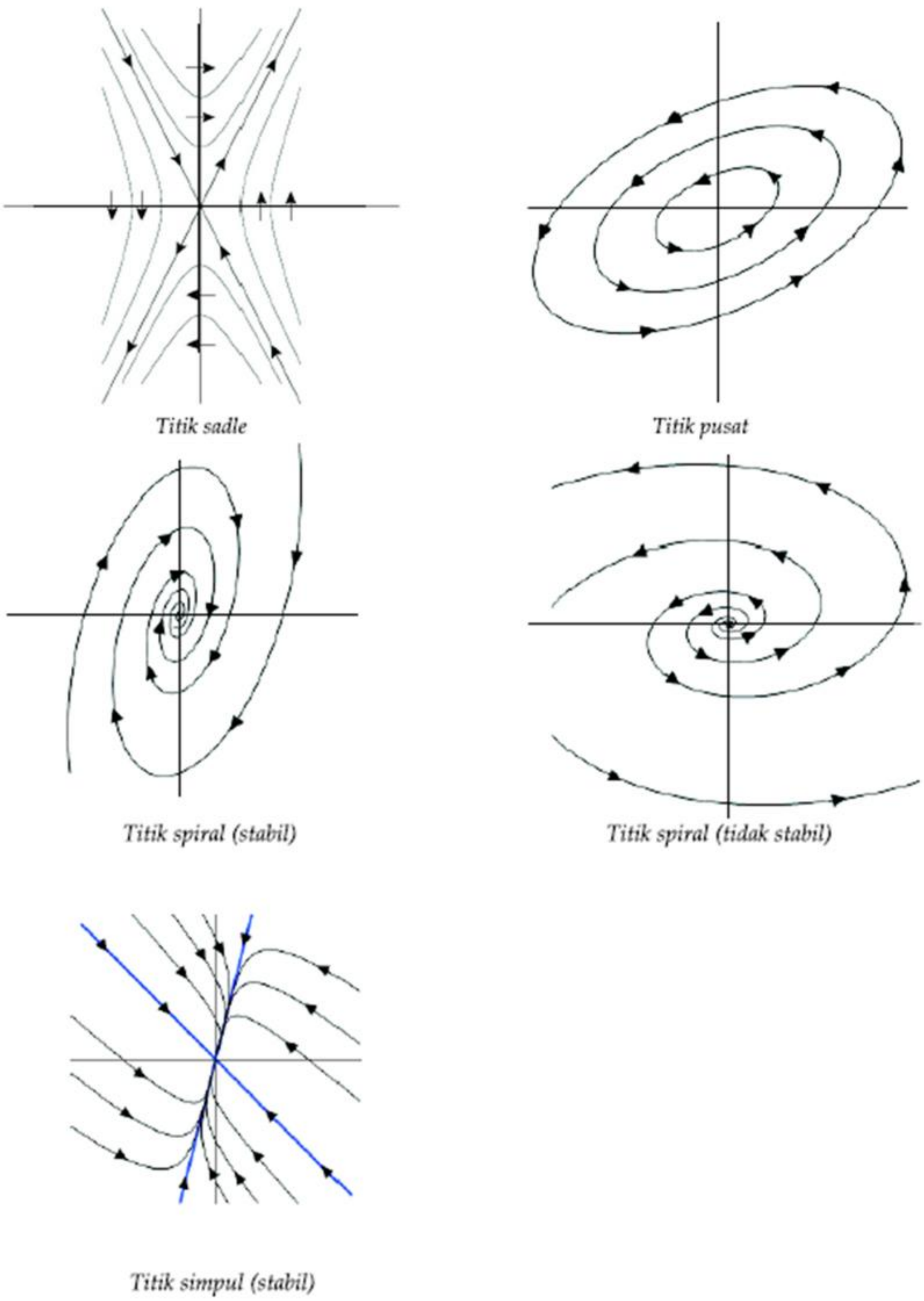
Matriks $J(x)$ pada sistem di atas merupakan matriks Jacobian (Khamsi, 2004).

Selanjutnya, untuk menentukan kriteria kestabilan sistem dapat ditentukan menggunakan nilai eigen dari matriks $J(x)$. Kriteria kestabilan dari sistem disajikan dalam Tabel 2.1.

Tabel 2.1 . Kriteria Kestabilan Berdasarkan Nilai Eigen

Nilai Eigen	Nama	Kestabilan
Real, tidak sama, bertanda sama	Simpul	Stabil asimtotis: semuanya negatif Tidak stabil: semuanya positif
Real, tidak sama, berlawanan tanda	Sadel	Tidak stabil
Real, sama	Simpul	Stabil asimtotis: semuanya negatif Tidak stabil: jika semuanya positif
Kompleks *conjugate* Bukan imajiner murni	Spiral	Stabil asimtotis: bagian real negatif Tidak stabil: bagian real positif
Imajiner murni	Pusat	Stabil
Real, $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 \leq 0$	Pusat	Stabil tapi bukan stabil asimtotis

Tipe kestabilan dari titik kesetimbangan pada Tabel 2.1 dapat dilihat dengan mengamati trayektori pada bidang fase. Gambar 2.1 menunjukkan contoh trayektori dari tipe kestabilan yang ada pada Tabel 2.1.



Gambar 2.1 Contoh Trayektori dari Titik Kesetimbangan
(Bellomo & Preziosi, 1995).

2.5 Model Epidemi Influenza Klasik

Model ini pertama kali diperkenalkan oleh W.O. Kermack dan Mc. Kendrick dalam makalahnya yang berjudul *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemic*, yang kemudian muncul dalam Proceeding Royal Society London halaman 700-721 tahun 1927. Mengenai rangkuman tersebut telah dituliskan secara lengkap oleh Murray.

Di dalam modelnya, populasi manusia dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu suspek dengan simbol *S*, terinfeksi dengan simbol *I* dan sembuh atau *recovery* dengan simbol *R*, yang masing-masing diberikan dalam bentuk *s, i* dan *r*.

Jumlah total dari keseluruhan kelompok tersebut adalah

$$n = s + i + r.$$

Model SIR umumnya ditulis dalam bentuk persamaan diferensial biasa, yang merupakan salah satu bagian model deterministik (bukan pemilihan random, hal ini disebabkan karena kesamaan kondisi awal yang diberikan untuk mendapatkan output), dengan waktu yang kontinu. Kita dapat mengasumsikan perubahan individu terinfeksi dan *susceptible* terjadi dengan laju proporsional terhadap jumlah populasi. Laju perubahan individu terinfeksi baru didefinisikan sebagai $\alpha si - \beta i$, dengan α merupakan nilai transmisivitas sedangkan β merupakan nilai laju penyembuhan. Individu yang terinfeksi diasumsikan dapat kembali sembuh dengan probabilitas konstan sepanjang waktu.

Maka persamaan diferensial yang didapat dari penjabaran tersebut adalah sebagai berikut:

$$\frac{ds}{dt} = -\alpha si$$

$$\frac{di}{dt} = \alpha si - \beta i$$

$$\frac{dr}{dt} = \beta i$$

Persamaan ini menggambarkan mengenai transisi masing-masing individu dari S ke I lalu ke R. dengan menambahkan ketiga persamaan tersebut kita dapat menunjukkan dengan mudah bahwa total populasi adalah konstan (Iswanto, 2012).

2.6 Metode Numerik

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa (tambah, kurang, kali dan bagi).

Metode numerik disebut juga sebagai alternatif dari metode analitik, yang merupakan metode penyelesaian persoalan matematik dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku atau lazim. Disebut demikian, karena sering kali persoalan matematik sulit diselesaikan atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik.

Sehingga dapat dikatakan bahwa persoalan matematika tersebut tidak mempunyai solusi analitik. Sehingga sebagai alternatifnya, persoalan matematik tersebut diselesaikan dengan metode numerik.

Perbedaan antara metode analitik dan metode numerik adalah metode analitik hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sederhana dan menghasilkan solusi yang sebenarnya atau solusi sejati. Sedangkan metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sangat kompleks dan nonlinier. Solusi yang dihasilkan dari penyelesaian secara numerik merupakan solusi hampiran atau pendekatan yang mendekati solusi eksak atau solusi sebenarnya. Hasil penyelesaian yang didapatkan dari metode numerik dan metode analitik memiliki selisih, dimana selisih tersebut dinamakan kesalahan (*error*) (Triatmodjo, 2002).

2.7 Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta merupakan metode yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan dari fungsi. Bentuk umum dari metode Runge-Kutta adalah

$$x_{i+1} = x_i + \Phi(t_i, x_1, h)h$$

dengan $\Phi(t_i, x_1, h)$ adalah fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan rerata pada interval dan digunakan untuk mengekstrapolasi dari nilai lama x_i ke nilai baru x_{i+1} sepanjang interval *h*.

Fungsi pertambahan dapat ditulis dalam bentuk umum, sebagai berikut:

$$\Phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

dengan *a* adalah konstanta dan *k* adalah

$$k_1 = f(t_i, x_i)$$

$$k_2 = f(t_i, +p_i h, x_i + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(t_i, +p_i h, x_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

$$\vdots$$

$$k_n = f(t_i, +p_{n-i} h, x_i + q_{n-1,2} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

dengan *p* dan *q* adalah konstanta. Nilai *k* menunjukkan hubungan berurutan. Nilai k_1 muncul dalam persamaan k_2, yang keduanya juga muncul dalam persamaan dan seterusnya. Hubungan yang berurutan ini membuat metode Runge-Kutta efisien untuk hitungan komputer (Triatmodjo, 2002).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung dan waktu penelitian dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2017/2018.

3.2 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji karakteristik model penyakit influenza SIR.
2. Menjabarkan model matematika untuk penyebaran penyakit influenza SIR dengan memperhatikan adanya vaksinasi.
3. Melakukan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta untuk melihat perilaku sistem penyebaran penyakit influenza SIR. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut:
   - Bagi interval [a,b] menjadi n subinterval dengan panjang sama yaitu

$$h = \frac{b-a}{n}$$

   sehingga $t_{i+1} = a + ih$ dimana $i = 1,2, \dots, n$.

- Dari $y' = f(t, y)$ dan $y(t_0) = y_0$ maka untuk metode runge-kutta didapatkan

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}.k_1)$$

$$k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}.k_2)$$

$$k_4 = f(t_i + h, y_i + h.k_3)$$

- Sehingga didapatkan

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

5. Mengkaji solusi dari simulasi numerik dan model matematika yang berisi tentang analisis kestabilan.
6. Menginterpretasikan hasil dari solusi dinamik tersebut.

V. PENUTUP

5.1 Simpulan

Adapun simpulan yang dapat diambil dari hasil pembahasan yang telah dilakukan adalah model epidemi SIR untuk penyebaran penyakit influenza dengan pengaruh vaksinasi dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{ds}{dt} = (1-\sigma)\mu - \alpha si - \mu s$$

$$\frac{di}{dt} = \alpha si - \beta i - \mu i$$

$$\frac{dr}{dt} = \sigma\mu + \beta i - \mu r.$$

Model tersebut memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = \big((1-\sigma), 0\big)$ dan titik kesetimbangan epidemik $E_e = \left(\frac{\mu+\beta}{\alpha}, \frac{(1-\sigma)\mu\alpha - \mu(\mu+\beta)}{(\mu+\beta)\alpha}\right)$.

Titik kesetimbangan akan stabil asimtotis pada $R_v < 1$ untuk E_0 dan stabil asimtotis pada $1 < R_v < \frac{4(\beta+\mu)}{\mu}$ untuk E_e.

Tingkat vaksinasi yang dibutuhkan untuk mencegah penyebaran penyakit influenza dapat dinotasikan sebagai

$$\sigma_c = 1 - \frac{\beta + \mu}{\alpha}.$$

Pada simulasi numerik yang diberikan, tingkat vaksinasi minimum yang dibutuhkan untuk mencegah penyebaran penyakit influenza adalah $\sigma_c = 0.4333$. Jika tingkat vaksinasi $\sigma < \sigma_c$, maka proporsi individu terinfeksi akan selalu ada dan ini mengakibatkan belum hilangnya penyebaran penyakit influenza pada populasi. Jika tingkat vaksinasi $\sigma > \sigma_c$, maka proporsi individu terinfeksi akan menghilang dan ini mengakibatkan penyebaran penyakit influenza pada populasi telah hilang.

5.2 Saran

Disarankan untuk pembaca yang tertarik masalah ini dapat mengembangkan model epidemi *SIR* dengan menambahkan peubah yang belum disebutkan pada penelitian ini, contohnya faktor imigrasi.

DAFTAR PUSTAKA

Bellomo, N. & Preziosi, L. 1995. *Modeling Mathematical Methods and Scientific Computation*. CRC Press, Florida.

Boyce, W.E. & DiPrima, R.C. 1986. *Elementary Differential Equations & Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, Inc., New York.

Campbell, S.L. & Haberman, R. 2008. *Introduction to Differential Equations with Dynamical Systems.* Princeton University Press, New Jersey.

Hethcote, H.W. 2000. *The Mathematics of Infectious Disease.* SIAM Review 42 Number 4, 599-653.

Hidayat, R. 2006. *Persamaan Diferensial Parsial.* Penerbitan Universitas Jember, Jember.

Ionascu, E.J. 2006. *Ordinary Differential Equations-Lecture Notes*. Columbus State University, New York.

Iswanto, R.J. 2012. *Pemodelan Matematika: Aplikasi dan Terapannya.* Graha Ilmu, Yogyakarta.

Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa: Model Matematika Fenomena Perubahan.* Graha Ilmu, Yogyakarta.

Khamsi, M.A. 2004. *Equilibrium Point Analysis: Linearization Technique*. Utrecht University, Utrecht.

Makinde, O.D. 2008. *Modelling Transmission Dynamics of Childhood Diseases in the Presence of a Preventive Vaccine: Application of the Adomian Decomposition Technique*. Springer, Berlin.

Neuhauser, C. 2004. *Calculus for Biology and Medicine.* Pearson Education, New Jersey.

Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Beta Offset, Yogyakarta.