BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Konsep Dasar Peluang

Pada dasarnya statistika berkaitan dengan penyajian dan penafsiran hasil yang berkemungkinan (hasil yang belum dapat ditentukan sebelumnya) yang muncul dalam penelitian yang dirancang sebelumnya atau muncul dalam penelitian ilmiah. Pencacahan atau pengukuran karakteristik suatu objek kajian yang hasilnya berbentuk bilangan disebut percobaan acak (Abadyo dan Hendro permadi, 2005).

Definisi 2.1

Himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan (eksperimen) acak disebut ruang sampel dan dinyatakan dengan lambang S. Suatu kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel (Bain dan Engehardt, 1992).

Definisi 2.2

Ruang nol atau ruang kosong atau himpunan kosong ialah himpunan bagian dari ruang sampel yang tidak mengandung satu pun anggota. Kejadian seperti ini dinyatakan dengan lambang $\emptyset$ (Walpole,1995).

Definisi 2.3 : Peluang Secara Aksioma

S menunjukkan ruang sampel percobaan dan $\boldsymbol{A}$ menunjukkan kumpulan semua peristiwa titik-titik sampel yang bisa dibentuk dari S. Peluang $P(.)$ adalah sebuah fungsi dengan domain A dan daerah hasilnya $[0,1]$, yang memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

i. $P(A) \geq 0, untuk\ A \in \boldsymbol{A}$

ii. $P(S) = 1$

iii. Jika $A_1, A_2, \dots, A_m$ adalah m buah peristiwa yang saling lepas dalam $\boldsymbol{A}$ (artinya $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$; $i, j = 1,2,3, \dots, m$) dan $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \in \boldsymbol{A}$, maka:

$P(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) \ = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m)$

$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_m)$

$P(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) \ = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$

Berdasarkan definisi diatas, $P(.)$ disebut juga fungsi peluang. $P(A)$ dibaca sebagai “peluang peristiwa A”, “peluang terjadinya peristiwa A”, atau “peluang bahwa peristiwa A terjadi”. Apabila kita melakukan sebuah percobaan yang menghasilkan banyak anggota ruang sampelnya berhingga (jadi S merupakan himpunan berhingga), maka setiap titik sampel bisa dianggap sebagai sebuah peristiwa yang mempunyai anggota tunggal. Demikian juga setiap anggota yang termasuk ke dalam sebuah peristiwa bisa dianggap sebagai peristiwa anggota tunggal.

2.2 Peubah Acak

Definisi 2.4

Peubah acak X adalah suatu fungsi dengan daerah asal S, dimana S adalah suatu ruang sampel dan daerah hasil bilangan real sedemikian sehingga $X(e) = x$

dengan $e \in S$ dan $x \in \Re$ (Bain dan Engelhardt, 1992).

Misalkan E adalah sebuah percobaan dengan ruang sampelnya S. Sebuah fungsi X yang menetapkan setiap anggota $s \in S$ ke sebuah bilangan real $X(s)$ dinamakan peubah acak.

X adalah peubah acak. Jika banyak nilai-nilai yang mungkin dai X (yaitu ruang hasil R_x) berhingga atau tak berhingga tapi dapat dihitung, maka X dinamakan peubah acak diskrit. Nilai-nilai yang mungkin dari X bisa ditulis sebagai: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$

X adalah peubah acak. Jika nilai-nilai yang mungkin dari X (yaitu ruang hasil R_x) merupakan sebuah interval pada garis bilangan real, maka X dinamakan peubah acak kontinu.

2.3 Distribusi Peluang

Definisi 2.5

Jika X adalah peubah acak diskrit, maka $p(x) = P(X = x)$ untuk setiap x dalam range X dinamakan fungsi peluang dari X. Nilai fungsi peluang dari X, yaitu $p(x)$, harus memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

i. $p(x) \geq 0$

ii. $\sum_x p(x) = 1$

Jika X adalah peubah acak kontinu yang didefinisikan dalam himpunan bilangan real. Sebuah fungsi disebut fungsi densitas dari X, jika nilai-nilainya, yaitu $f(x)$, memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

i. $f(x) \geq 0$ untuk $x \in (-\infty, \infty)$

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

iii. Untuk setiap a dan b, dengan $-\infty < a < b < \infty$, maka:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

2.4 Fungsi Distribusi

Definisi 2.6: Fungsi Distribusi Kumulatif Diskrit

Misalnya X adalah peubah acak diskrit, maka fungsi distribusi kumulatif dari X berbentuk:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p(t) \qquad (2.4.1)$$

dengan $p(t)$ adalah fungsi peluang dari X di t.

Definisi 2.7: Fungsi Distribusi Kumulatif Kontinu

X adalah peubah acak kontinu, maka fungsi distribusi kumulatif dari X berbentuk:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad (2.4.2)$$

dengan $f(t)$ adalah nilai fungsi densitas dari X di t.

2.5 Fungsi Pembangkit Momen

Definisi 2.8: Fungsi Pembangkit Momen:

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka fungsi pembangkit momen dari X (dinotasikan dengan $M_x(t)$) didefinisikan sebagai:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) \tag{2.5.1}$$

untuk $-h < t < h$ dan $h > 0$

Definisi 2.9: Fungsi Pembangkit Momen Diskrit

Jika X adalah peubah acak diskrit dan $p(x)$ adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka fungsi pembangkit momen dari X didefinisikan sebagai:

$$M_x(t) = \sum_x e^{tx}\, p(x) \tag{2.5.2}$$

Definisi 2.10: Fungsi Pembangkit Momen Kontinu

Jika X adalah peubah acak kontinu dan $f(x)$ adalah nilai fungsi densitas dari X di x, maka fungsi pembangkit momen dari X didefinisikan sebagai:

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, f(x) \tag{2.5.3}$$

2.6 Fungsi Densitas Masa Hidup

Fungsi-fungsi pada distribusi waktu hidup merupakan suatu fungsi yang menggunakan peubah acak waktu hidup. Peubah acak waktu hidup biasanya dinotasikan dengan huruf T dan akan membentuk suatu distribusi. Distribusi waktu hidup dijelaskan oleh tiga fungsi, yaitu fungsi hidup R(t), fungsi densitas peluang f(t) dan fungsi kegagalan/fungsi hazard h(t).

Waktu tahan hidup T mempunyai fungsi densitas peluang yang dinotasikan dengan f(t) dan didefinisikan sebagai peluang kegagalan suatu objek pada interval (t, t+Δt) per satuan waktu. Fungsi densitas peluang dinyatakan sebagai

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P\big(objek\ gagal\ pada\ interval\ (t, t + \Delta t)\big)}{\Delta t} \right]$$

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(\ t < T < t + \Delta t)}{\Delta t} \right]$$

yang mempunyai sifat sebagai berikut:

a. $f(t) \geq 0, t \geq 0$

b. $\int_0^\infty f(t) dt = 1$

Fungsi f disebut fungsi densitas peluang bagi variabel random kontinu T bila luas daerah dibawah kurva dan diatas sumbu-t sama dengan 1, dan bila luas daerah dibawah kurva antara $t = a$ dan $t = b$ menyatakan peluang T terletak antara a dan b (Walpole,1995).

Dengan demikian luas daerah yang diarsir adalah:

$$P(a < T < b) = \int_a^b f(t)\, dt \text{ dengan } a, b \in\ [0, \infty) \qquad (2.6.1)$$

2.7 Konsep Dasar dan Fungsi Tahan Hidup Suatu Sistem

Daya tahan hidup suatu sistem merupakan selang waktu yang diamati dari suatu objek saat pertama kali masuk ke dalam pengamatan sampai dengan objek tersebut tidak berfungsi atau mati. Misalnya selang waktu yang mengukur kerusakan suatu produk, matinya suatu makhluk hidup, atau kambuhnya suatu penyakit.

Ketahanan hidup *(reliabilitas)* adalah peluang suatu produk akan beroperasi dengan baik untuk periode yang telah ditetapkan dibawah kondisi yang ditentukan, seperti suhu dan tegangan, tanpa kegagalan. Dirumuskan sebagai:

R(t) = P(objek hidup lebih dari waktu t)

= P(T>t)

= 1-P(objek gagal sebelum waktu t)

= 1-P(T≤t) (2.7.1)

2.8 Fungsi Laju Tingkat Kegagalan (Fungsi Hazard)

Fungsi kegagalan dari waktu tahan hidup T dinotasikan dengan h(t) dan didefinisikan sebagai peluang suatu objek gagal didalam interval waktu (t,t+Δt) dengan diketahui bahwa objek tersebut telah hidup selama waktu t. Fungsi kegagalan dinyatakan dengan:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(t \le T \le t + \Delta t | T \ge t)}{\Delta t} \right]$$

Jika f(t) adalah fungsi densitas peluang pada waktu t, maka diperoleh:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(t \le T \le t + \Delta t | T \ge t)}{\Delta t} \right]$$

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P[(t \le T \le (t + \Delta t)) \cap (T \ge t)]}{P(T \ge t)\Delta t} \right]$$

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(t \leq T \leq (t + \Delta t))}{P(T \geq t)\Delta t} \right]$$

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\big(1 - F(t)\big)\Delta t} \right]$$

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \frac{1}{S(t)} \right]$$

$$h(t) = \frac{F'(t)}{R(t)}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \tag{2.8.1}$$

2.9 Data Tersensor

Sensor dilakukan untuk memperpendek waktu percobaan karena untuk mengukur waktu kegagalan atau kematian objek memerlukan waktu yang lama dan biaya yang tidak sedikit. Dalam uji ketahanan terdapat tiga jenis sensor, yaitu:

1. Sensor Tipe I

   Sensor tipe I adalah tipe penyensoran dimana percobaan akan dihentikan setelah mencapai waktu T yang telah ditentukan untuk mengakhiri semua n individu yang masuk pada waktu yang sama. Berakhirnya waktu uji T menjelaskan waktu sensor uji, dengan kata lain jika tidak terdapat individu yang hilang secara tiba-tiba, maka waktu tahan hidup observasi tersensor sama dengan waktu pengamatan.

2. Sensor Tipe II

   Sensor tipe II adalah tipe penyensoran dimana sampel ke-r merupakan observasi terkecil dalam sampel random berukuran n ($1 \leq r \leq n$). Dengan kata lain jika total sampel berukuran n, maka percobaan akan dihentikan sampai diperoleh r kegagalan. Semua unit uji n masuk pada waktu yang sama. Pada sensor tipe II, jika tidak terdapat individu yang hilang, maka waktu tahan hidup observasi tersensor sama dengan waktu tahan hidup observasi tidak tersensor. Kelebihan sensor ini dapat menghemat waktu dan biaya.

3. Sensor Tipe III

   Dalam sensor tipe III, individu atau unit uji masuk ke dalam percobaan pada waktu yang berlainan selama periode waktu tertentu. Beberapa unit uji mungkin gagal atau mati sebelum pengamatan berakhir sehingga waktu tahan hidupnya dapat diketahui dengan pasti. Kemungkinan kedua adalah unit uji keluar sebelum pengamatan berakhir, atau kemungkinan ketiga adalah unit uji tetap hidup sampai batas waktu terakhir pengamatan. Untuk objek yang hilang, waktu tahan hidupnya adalah sejak masuk dalam pengamatan sampai dengan waktu terakhir sebelum hilang. Untuk unit uji yang tetap hidup, waktu tahan hidupnya adalah dari mulai masuk pengamatan sampai waktu pengamatan berakhir.

Penyensoran data dapat disebabkan oleh beberapa hal, antara lain:

a. Data hilang
b. Data keluar *(withdrawls)*
c. Berakhir waktu pengamatan

Percobaan juga dapat dilakukan tanpa menggunakan ketiga tipe penyensoran tersebut, yaitu dengan sampel lengkap. Sampel lengkap berarti bahwa nilai kegagalan dari semua unit sampel yang diobservasi dapat diketahui. Percobaan akan berhenti jika semua sampel yang diamati mengalami kegagalan.

2.10 Counting Proses

Definisi 2.11 :

Proses stokastik $\{N(t), t \geq 0\}$ dikatakan proses menghitung *(counting process)* jika $N(t)$ atau N_t menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi selama waktu t (S.Osaki, 1992).

Proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ memenuhi sifat:

i. $N(t) > 0$

ii. $N(t)$ adalah bilangan bulat

iii. Jika $s < t$, maka $N(s) \leq N(t)$

iv. Untuk $s < t$, $N(t) - N(s)$ menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi pada interval waktu $(s, t]$

- Kenaikan Independen *(independent increment)*

Suatu proses menghitung disebut kenaikan independen *(independent increment)* jika banyaknya kejadian yang terjadi pada interval waktu terpisah adalah saling bebas. Banyaknya kejadian yang terjadi pada waktu t yaitu $N(t)$, bebas dan banyaknya kejadian yang terjadi pada waktu antara t dan $t + s$, yaitu $N(t + s) - N(t)$.

- Kenaikan Stasioner *(stationary increment)*

Suatu proses menghitung disebut kenaikan stasioner *(stationary increment)* jika distribusi dari banyaknya kejadian yang terjadi pada interval waktu tertentu hanya tergantung pada panjang dari interval tersebut. Banyaknya kejadian pada interval waktu $(t_1 + s, t_2 + s]$ yaitu $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$ mempunyai distribusi yang sama dengan banyaknya kejadian pada interval waktu $(t_1, t_2]$ yaitu $N(t_2) - N(t_1)$ untuk semua $t_1 < t_2, s > 0$.

Definisi 2.12:

Fungsi $f(h)$ dikatakan $o(h)$ jika $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

untuk interval waktu yang kecil $(h > 0)$,

$$e^{-\lambda h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda h)^n}{n!} = 1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \cdots$$

$e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h);$ (tidak ada kejadian pada interval waktu yang kecil $h > 0$.

$1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h);$ (peluang ada kejadian pada interval waktu yang kecil $h > 0$.

2.11 Proses Poisson

Definisi 2.13: Proses Poisson *(stationary independent increments)*

Suatu proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ dikatakan proses Poisson dengan parameter $\lambda > 0$ jika memenuhi:

i. $(N(0) = 0)$

ii. Proses mempunyai kenaikan bebas stasioner *(stationary independent increments)*

iii. $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$

iv. $P(N(h) \geq 2) = o(h)$

(S. Osaki, 1992)

Peluang bahwa ada k kejadian yang terjadi pada interval $(0, t]$, dari definisi 2.13, untuk $t \geq 0$ berlaku,

$P_k(t) = P(N(t) = k | N(0) = 0), k = 0,1,2, \ldots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1 \qquad (2.11.1)$$

karena proses Poisson stationer, maka

$P(N(s+t) - N(s) = k) = P(N(t) = k | N(0) = 0) = P_k(t)$

untuk sebarang $s \geq 0, t \geq 0$.

Definisi 2.14: Proses Poisson *(independent increments)*

Suatu proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ dikatakan proses Poisson dengan parameter $\lambda > 0$ jika memenuhi:

i. $N(0) = 0$

ii. Proses mempunyai kenaikan bebas *(independent increments)*

iii. Peluang ada k kejadian dalam interval waktu t:

$$P_k(t) = P(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0,1, \ldots$$

(S. Osaki, 1992)

maka

$E[N(t)] = \lambda t$

$Var[N(t)] = \lambda t$

$\lambda = \frac{E[N(t)]}{t} \; = rate\ (laju\ dari\ poses)$

$= rata - rata\ banyaknya\ kejadian\ yang\ terjadi\ per\ waktu\ t$

Teorema 1:

Jika jumlah kegagalan mengikuti distribusi Poisson maka suatu variabel random waktu antar kegagalan mengikuti distribusi eksponensial.

Fungsi peluang distribusi Poisson dengan parameter λt adalah

$$p(x) = P(X = x) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t};\ x \geq 0 \qquad (2.11.3)$$

Bukti:

f(t) = fungsi densitas peluang dari interval waktu *t* antar pemunculan kejadian yang berurutan, $t \geq 0$.

F(t) = fungsi distribusi kumulatif dati *t*

Jika suatu variabel random waktu antar kedua kegagalan berurutan dimisalkan T, maka:

$P\{T > t\} = P\{tidak\ ada\ kegagalan\ dalam\ waktu\ t\}$

$$= \int_{T}^{\infty} f(t)dt = P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

atau menggunakan *F(t)* sebagai fungsi distribusi kumulatif dari T diperoleh:

$$F(t) = P\{T \leq t\} = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

maka fungsi densitasnya adalah

$$f(t) = f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}; & t \geq 0, \lambda > 0 \\ 0 & ; t \ lainnya \end{cases}$$

Dari fungsi densitas distribusi eksponensial dengan parameter λ diatas, maka diperoleh fungsi pembangkit momen:

$$M_T(x) = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda - x)t} dt = \left. \frac{-\lambda e^{-(\lambda - x)t}}{\lambda - x} \right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - x}$$

$$M_T{}'(x) = \frac{\lambda}{(\lambda - x)^2} \quad dan \quad M_T{}''(x) = \frac{2\lambda}{(\lambda - x)^3}$$

E(T) diperoleh dari turunan pertama fungsi pembangkit momen, sehingga:

$$E(T) = M_T{}'(0) = \frac{\lambda}{(\lambda - 0)^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(T^2) = M_T{}''(0) = \frac{2\lambda}{(\lambda - 0)^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

maka:

$$Var(T) = E(T^2) - \big(E(T)\big)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Jadi waktu kegagalan yang berurutan mengikuti distribusi eksponensial dengan rata-rata $\frac{1}{\lambda}$ dan varian $\frac{1}{\lambda^2}$.

2.12 Distribusi Gamma

Peubah acak X dikatakan berdistribusi Gamma, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{a}\,\Gamma(a)}\, x^{a-1} e^{\frac{-x}{\beta}} \; ; x > 0, a > 0, \beta > 0 \\ 0 \; ; x \; lainnya \end{cases}$$

Peubah acak X yang berdistribusi gamma disebut juga peubah acak gamma. Peubah acak X yang berdistribusi gamma dapat dinotasikan dengan $G(x; a, \beta)$, artinya peubah acak X berdistribusi gamma dengan parameter a dan β.

Peubah acak X yang berdistribusi Gamma dengan parameternya a dan β bisa juga ditulis sebagai:

$$X \sim G(a, \beta)$$

Berdasarkan definisi pembangkit momen kontinu, maka fungsi pembangkit momen untuk distribusi Gamma adalah:

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{tx} f(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{tx}\, 0\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\beta^{a}\, \Gamma(a)}\, x^{a-1}.\, e^{\frac{-x}{\beta}}\, dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\beta^{a}\, \Gamma(a)} \int_{0}^{\infty} x^{a-1}.\, e^{-x\left[\left(\frac{1}{\beta}\right)-t\right]}\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{a}\, \Gamma(a)} \int_{0}^{\infty} x^{a-1}.\, e^{-x\left[\left(\frac{1}{\beta}\right)-t\right]}\, dx$$

Misalnya: $y = x\left(\frac{1}{\beta} - t\right)$, maka $x = \frac{y}{\frac{1}{\beta}-t}$ sehingga $dx = \frac{\beta}{1-\beta t}\, dy$

Batas-batas: Untuk $x = 0$, maka $y = 0$

Untuk $x = \infty$, maka $y = \infty$

$$M_x(t) = \frac{1}{\beta^{a}\, \Gamma(a)} \int_{0}^{\infty} \left(\frac{\beta y}{1-\beta t}\right)^{a-1}.\, e^{-y} \frac{\beta}{1-\beta t}\, dy$$

$$= \frac{\beta^{a}}{\beta^{a}\, \Gamma(a)(1-\beta t)^{a}} \int_{0}^{\infty} y^{a-1}.\, e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)(1-\beta t)^{a}} \Gamma(a)$$

$$M_x(t) = (1-\beta t)^{-a}\, ;\ t < \frac{1}{\beta}$$

Jadi diperoleh fungsi pembangkit momen distribusi Gamma adalah $M_x(t) = (1-\beta t)^{-a}\, ;\ t < \frac{1}{\beta}$

2.13 Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial merupakan bentuk khusus dari distribusi Gamma dengan $\alpha = 1$ dan $\beta = \theta$.

Fungsi Densitas Eksponensial:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\theta}\right) . e^{\frac{-x}{\theta}}; & x > \theta, \theta > 0 \\ 0 & ; x \; lainnya \end{cases}$$

Fungsi distribusi kumulatif distribusi Eksponensial adalah:

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt$$

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\theta} e^{\frac{-t}{\theta}} dt$$

$$F(t) = \frac{1}{\theta} \int_0^t e^{\frac{-t}{\theta}} dt$$

$$F(t) = \frac{1}{\theta} \left[-\theta e^{\frac{-t}{\theta}}\right]_0^t$$

$$F(t) = -\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{t}}{\theta}}\Big]_0^{\mathrm{t}}$$

$$F(t) = 1 - \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{t}}{\theta}}$$

Fungsi tahan hidupnya adalah $S(t) = 1 - F(t) = e^{\frac{-t}{\theta}}$

Fungsi kegagalannya adalah $h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{1}{\theta}$

dengan θ adalah rata-rata waktu kegagalan dan t adalah waktu percobaan.

Berdasarkan definisi pembangkit momen kontinu, maka fungsi pembangkit momen untuk distribusi Eksponensial adalah:

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{tx} f(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{tx}\, 0\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx} \left(\frac{1}{\theta}\right). e^{\frac{-x}{\theta}}\, dx$$

$$= 0 + \int_{0}^{\infty} e^{tx} \left(\frac{1}{\theta}\right). e^{\frac{-x}{\theta}}\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{tx} \left(\frac{1}{\theta}\right). e^{\frac{-x}{\theta}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_{0}^{\infty} e^{\frac{-x}{\theta}(1-\theta t)}\, dx$$

Misalkan: $u = -\frac{x}{\theta}(1 - \theta t)$

$$du = -\frac{1}{\theta}(1 - \theta t) dx$$

$$dx = \frac{-\theta}{(1 - \theta t)}\, du$$

Maka:

$$= \frac{1}{\theta}\int_{0}^{\infty} e^{u} \frac{-\theta}{(1-\theta t)}\ du$$

$$= -\frac{1}{(1-\theta t)}\int_{0}^{\infty} e^{u}\ du$$

$$= -\frac{1}{(1-\theta t)} \lim_{b\to\infty} e^{u}\Big]_{0}^{b}$$

$$= -\frac{1}{(1-\theta t)} \lim_{b\to\infty} e^{-\frac{x}{\theta}(1-\theta t)}\Big]_{0}^{b}$$

$$= -\frac{1}{(1-\theta t)} \lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^{-\frac{x}{\theta}(1-\theta t)}}\Bigg]_{0}^{b}$$

$$= -\frac{1}{(1-\theta t)}(0-1)$$

$$= \frac{1}{(1-\theta t)}$$

$$M_x(t) = (1-\theta t)^{-1}$$

Jadi diperoleh fungsi pembangkit momen distribusi Eksponensial adalah $M_x(t) = (1-\theta t)^{-1}$.

2.14 Distribusi Khi-Khuadrat

Distribusi Khi-kuadrat merupakan bentuk khusus dari distribusi Gamma dengan $\alpha = \frac{v}{2}$ dan $\beta = 2$.

Fungsi Densitas Khi-Kuadrat

Peubah Acak X dikatakan berdistribusi Khi-kuadrat, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} x^{\frac{(v-2)}{2}} e^{\frac{-x}{2}};\ x > 0 \\ 0 \quad ; x\ lainnya \end{cases}$$

Peubah acak X yang berdistribusi khi-kuadrat disebut juga peubah acak khi-kuadrat. Penulisan notasi dari peubah acak yang berdistribusi khi-kuadrat adalah $\chi^2(v)$, artinya peubah acak X berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat kebebasan v. Peubah acak X yang berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat kebebasan v bisa juga ditulis sebagai:

$$X \sim \chi^2(v)$$

Berdasarkan definisi pembangkit momen kontinu, maka fungsi pembangkit momen untuk distribusi Khi-kuadrat adalah:

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{tx} f(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{tx}.0\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx}.\frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} x^{\frac{(v-2)}{2}} e^{\frac{-x}{2}} dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\int_{0}^{\infty} x^{\frac{v}{2}-1}\, e^{\frac{-x\left[\left(\frac{1}{2}-t\right)\right]}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\int_{0}^{\infty} x^{\frac{v}{2}-1}\, e^{\frac{-x\left[\left(\frac{1}{2}-t\right)\right]}{2}} dx$$

Misalkan: $y \;= x\left[\left(\frac{1}{2} - t\right)\right]$, maka $x = \frac{y}{\left(\frac{1}{2}\right)-t}$

$$dx \;= \frac{2}{1-2t} dy$$

Batas-batas: Untuk $x = 0$, maka $y = 0$

Untuk $x = \infty$, maka $y = \infty$

$$M_x(t) \;= \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\int_{0}^{\infty} \left(\frac{y}{\left(\frac{v}{2}\right) - t}\right)^{\frac{v}{2}-1} e^{-y}\, \frac{2}{1-2t} dy$$

$$= \frac{1}{(1-2t)^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\int_{0}^{\infty} y^{\frac{v}{2}-1}\, e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{(1-2t)^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)$$

$$M_x(t) \;=\; (1-2t)^{-\frac{v}{2}}$$

Jadi diperoleh fungsi pembangkit momen distribusi Khi-kuadrat adalah $M_x(t) \;=$ $(1-2t)^{-\frac{v}{2}}$.