PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI *GENERALIZED BETA* 2 MENGGUNAKAN METODE MOMEN, *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*, DAN *PROBABILITY WIEGHTED MOMENT*

(Skripsi)

Oleh

EKA SETIAWATI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

ABSTRACT

ESTIMATION OF PARAMETER OF GENERALIZED BETA 2 DISTRIBUTION USING MOMENT METHOD, MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION, AND PROBABILITY WIEGHTED MOMENT

By

Eka Setiawati

The opportunity distribution is all possible outcomes of an experiment. A distribution has several parameters that express the characteristics of a population. Parameters can not be measured directly but by taking samples and then measuring them. In this research, estimation using moment method, Maximum Likelihood Estimation, and Probability Weighted Moment are used to determine the parameter estimate of the Generalized Beta 2 distribution. The estimation of parameter from three methods using data simulation for prof unbiased and variance minimum. Data simulation result show that the Maximum Likelihood Estimation method is better than the moment and Probability Weighted Moment method in estimating the distribution parameters of Generalized Beta 2.

Key Word : Generalized Beta 2 Distribution, Moment Method, Maximum Likelihood Estimation Method, Probability Weighted Moment Method

ABSTRAK

PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI *GENERALIZED BETA* 2 MENGGUNAKAN METODE MOMEN, *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*, DAN *PROBABILITY WIEGHTED MOMENT*

Oleh

Eka Setiawati

Distribusi peluang merupakan himpunan hasil-hasil yang mungkin terjadi dari sebuah percobaan. Suatu distribusi memiliki beberapa parameter yang menyatakan karakteristik dari suatu populasi. Parameter tidak dapat diukur secara langsung melainkan dengan cara mengambil sampel kemudian mengukurnya. Pada penelitian ini, akan dikaji pendugaan parameter dengan metode momen, *Maximum Likelihood Estimation*, dan *Probability Weighted Moment* dari distribusi *Generalized Beta 2*. Pendugaan parameter dari ketiga metode dengan melakukan simulasi data untuk membuktikan sifat ketakbiasan dan varian minimum. Dari ketiga hasil simulasi terhadap ketiga metode pendugaan menunjukkan bahwa metode *Maximum Likelihood Estimation* lebih baik dibandingkan dengan metode momen dan *Probability Weighted Moment.*

Kata Kunci : Distribusi Generalized Beta 2, Metode Momen, Metode *Maximum Likelihood Estimation*, Metode *Probability Weighted Moment*

PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI *GENERALIZED BETA* 2 MENGGUNAKAN METODE MOMEN, *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*, DAN *PROBABILITY WIEGHTED MOMENT*

Oleh

EKA SETIAWATI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Skripsi : **PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI *GENERALIZED BETA* 2 MENGGUNAKAN METODE MOMEN, *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*, DAN *PROBABILITY WIEGHTED MOMENT***

Nama Mahasiswa : **Eka Setiawati**

Nomor Pokok Mahasiswa : 1317031030

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.	**Amanto, S.Si., M.Sc.**
NIP. 19690305 199603 2 001	NIP. 19730314 200012 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Dra.Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.** ....

Sekretaris : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Warsono, M.Sc., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **19 September 2017**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Eka Setiawati
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1317031030
Judul	: Pendugaan Parameter Distribusi *Generalized Beta* 2 Menggunakan Metode Momen, *Maximum Likelihood Estimation*, dan *Probability Wieghted Moment*
Jurusan	: Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, Oktober 2017
Penulis,

Eka Setiawati
NPM. 1317031030

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Sriwaylangsep pada tanggal 20 September 1996. Penulis merupakan anak pertama dari pasangan Bapak Agus Panggung dan Ibu Sutarmi serta kakak dari Sekar Dwi Parwati.

Penulis memulai pendidikan dari sekolah dasar di SD Negeri 2 Sriwaylangsep pada tahun 2001. Pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 1 Sendang Agung pada tahun 2007. Pendidikan sekolah menengah atas di SMA Negeri 1 Kalirejo pada tahun 2011.

Penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN pada tahun 2013. Pada periode tahun 2013/2014 penulis terdaftar sebagai anggota GEMATIKA Himpunan Mahasiswa Matematika Unila juga sebagai anggota KOPMA (Koperasi Mahasiswa). Penulis pernah menjadi anggota bidang Keilmuan Himpunan Mahasiswa Matematika Unila dan anggota departemen HLPM Badan Eksekutif Mahasiswa FMIPA Unila selama periode 2014/2015 dan sebagai sekretaris bidang Keilmuan Himpunan Mahasiswa matematika FMIPA Unila tahun 2015/2016.

Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis telah menyelesaikan Kerja Praktik (KP) di Kanwil DJP Bengkulu dan Lampung selama kurang lebih satu bulan. Penulis juga telah melakukan Kuliah Kerja Nyata Kebangsaan (KKNK) pada tahun 2016 selama 30 hari di Desa Mepar, Kab. Lingga, Provinsi Kepulauan Riau.

MOTTO

Don't be sad, indeed Allah is with us
(Al-Qur'an Surat At taubah 9:40)

Rahasia untuk bisa maju adalah dengan memulai
(Mark Twin)

يَرْفَعِ اللّٰهُ الَّذِ يْنَ اٰمَنُوْا مِنْكُمْ وَالَّذِيْنَ أُوْتُوْاالْعِلْمَ دَرَجٰتٍ

"Allah akan meninggikan derajat orang-orang yang beriman diantara kamu dan orang-orang yang memiliki ilmu pengetahuan"

-Q.S Al-Mujadillah:11-

"Jalani dan syukuri"

(Eka Setiawati)

PERSEMBAHAN

Puji dan syukur kepada Allah SWT berkat rahmat dan hidayah-Nya
sebuah karya sederhana namun penuh perjuangan telah terselesaikan

Kupersembahkan Skripsi ini untuk :

Kedua orang tuaku tercinta

Ayahanda Agus Panggung & Ibunda Sutarmi

Serta

Adikku tersayang

Sekar Dwi Parwati

Terimakasih atas jasa-jasa yang tak bisa ternilai harganya
Terimakasih atas setiap doa tulus yang kalian panjatkan
Terimakasih atas cinta dan kasih sayang yang kalian berikan

SANWACANA

Puji syukur kehadirat Allah SWT berkat rahmat dan hidayahnya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW, suri tauladan terbaik sepanjang masa.

Pada proses penyusunan skripsi, penulis memperoleh banyak bantuan, dukungan, bimbingan serta kritik dan saran yang membangun sehingga skripsi ini mampu terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc.,selaku dosen pembimbing utama yang telah membimbing penulis dengan setulus hati, menyumbangkan ilmunya, memberikan motivasi serta telah banyak meluangkan waktu ditengah kesibukannya untuk membimbing hingga skripsi ini terselesaikan.
2. Bapak Amanto, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing pembantu yang telah banyak membantu, memberi masukan serta dengan sabar memberikan pengarahan dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Warsono, M.Sc., Ph.D. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun kepada penulis dalam proses penyelesaian skripsi ini.
4. Ibu Dra. Dorrah Aziz selaku Pembimbing Akademik.
5. Ibu Dra. Wamiliana, M.A.,Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A, Ph.D selaku dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA UNILA yang telah memberikan ilmu pengetahuan dan segala bentuk bantuan kepada penulis.
8. Orang tuaku tercinta dan adikku tersayang Sekar, serta seluruh keluarga yang senantiasa memberikan kasih sayang yang tiada terkira, selalu menjadi penyemangat disaat lemah, selalu memotivasi penulis untuk memberikan yang terbaik, serta tak henti-hentinya mendoakan untuk keberhasilan penulis.
9. Teman-teman terbaik di kampus, Suci, Karina, Suri, Maimuri, Citra, Shintia, Siti, Sinta, Della, Elis, Sisil, Dyta, Reni, Ratna, Umi yang telah banyak membantu, memberikan perhatian dan dukungan mental kepada penulis.
10. Teman-teman satu bimbingan Tiwi, Yucky, Nafisah, dan Dimas yang selalu membantu penulis, berjuang bersama serta saling mendukung dalam menyelesaikan skripsi ini.
11. Keluarga besar HIMATIKA terima kasih atas pengalaman yang luar biasa.
12. Teman-teman seperjuangan Matematika 2013 yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu.
13. Seluruh pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu atas peran dan dukungannya dalam menyusun skripsi ini.

Bandar lampung, Oktober 2017
Penulis,

Eka Setiawati

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Distribusi peluang merupakan suatu daftar atau persamaan yang menunjukkan hasil-hasil yang mungkin terjadi dari sebuah percobaan (Lind, 2007). Suatu distribusi memiliki beberapa parameter yang menyatakan karakteristik dari suatu populasi. Parameter terbagi menjadi dua, yaitu parameter bentuk dan parameter skala. Parameter bentuk merupakan suatu parameter numerik yang menunjukkan bentuk dari kurva sedangkan parameter skala merupakan suatu parameter numerik yang menunjukkan besarnya keragaman data. Parameter tidak dapat diukur secara langsung melainkan dengan cara mengambil sampel kemudian mengukurnya. Selanjutnya hasil pengukuran dari sampel tersebut digunakan untuk menduga ukuran sebenarnya.

Distribusi peluang banyak digunakan dalam berbagai bidang ilmu, seperti bidang matematika ekonomi dan asuransi, kesehatan dan industri, serta prinsip ekonomi mikro. Distribusi yang berkaitan dengan bidang ilmu tersebut salah satunya distribusi *Generalized Beta* 2. *Generalized Beta* 2 awalnya diusulkan oleh Majumder dan Chakravarty pada tahun 1990 sebagai bentuk reparameterisasi. *Generalized Beta* 2 memiliki empat parameter yaitu α, b, p, dan q, dimana α, p, q merupakan parameter bentuk dan b merupakan parameter skala (Kleiber and Kotz, 2003).

Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk melakukan pendugaan parameter, seperti metode Momen, metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), dan metode *Probability Weighted Moment* (PWM). Metode momen adalah metode tertua yang digunakan dalam mengestimasi parameter. Ide dasar dari metode ini adalah mendapatkan estimasi parameter populasi dengan cara menyamakan momen populasi dan momen sampel. Metode *Maximum Likelihood Estimation* digunakan untuk menaksir nilai parameter jika distribusi dari populasi diketahui. Estimasi parameter dengan metode MLE dilakukan dengan cara memaksimumkan fungsi *likelihood*. Metode *Probability Weighted Moment* merupakan modifikasi dari metode “konvensional” momen dan pertama kali dikemukakan oleh Hosking et al., (1984).

Oleh karena itu, peneliti tertarik untuk melakukan penelitian mengenai pendugaan parameter distribusi *Generalized Beta* 2 dengan menggunakan metode Momen, *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), dan *Probability Weighted Moment* (PWM) kemudian membandingkan metode mana yang paling baik digunakan dalam menduga parameter distribusi *Generalized Beta* 2.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Membandingkan kinerja pendugaan parameter distribusi *Generalized Beta* 2 dengan menggunakan metode Moment, *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), dan *Probability Weighted Moment* (PWM).
2. Mengetahui efek ukuran sampel dari masing-masing metode dalam menduga parameter distribusi *Generalized Beta* 2.

1.3 Manfaat penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah :

1. Memperdalam pemahaman mengenai statistika inferensia khususnya pendugaan parameter distribusi *Generalized Beta* 2.
2. Memahami metode pendugaan parameter yang meliputi metode Momen, metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), dan metode *Probability Weighted Moment* (PWM).

II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam menentukan penduga parameter dari distribusi GB2 dan karakteristik dari penduga tersebut, maka dalam hal ini penulis menggunakan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan proses tersebut, yakni sebagai berikut :

2.1 Distribusi *Generalized Beta 2*

Definisi 2.1

Suatu variable acak dikatakan memiliki distribusi *Generalized Beta 2* (GB2) dengan parameter (α, b, p, q) jika fungsi kepekatan peluangnya adalah :

$$f(x) = \frac{ax^{ap-1}}{b^{ap}\, B(p,q)\left(1+\left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right)^{p+q}}\,, \qquad x > 0 \tag{2.1}$$

dengan :

α, b, p , q adalah bilangan positif

B(p,q) adalah fungsi beta

b adalah parameter skala

α, p, q adalah parameter bentuk

(Kleiber & Kotz, 2003)

2.1.1 Nilai Harapan Distribusi *Generalized Beta 2*

Nilai harapan dari distribusi GB2 (α,b,p,q) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x \frac{a x^{ap-1}}{b^{ap}\, B(p,q) \left(1 + \left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right)^{p+q}}\, dx$$

$$= \frac{a}{b^{ap}\, B(p,q)} \int_{0}^{\infty} \frac{x^{ap}}{\left(1 + \left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right)^{p+q}}\, dx$$

Misalkan :

$u = \left(\frac{x}{b}\right)^{a}$ $\qquad x = 0 \rightarrow u = 0$

$x = u^{1/a} b$ $\qquad x = \infty \rightarrow u = \infty$

$$dx = \frac{1}{a} u^{\frac{1}{a}-1} b\, du$$

Sehingga

$$E(X) = \frac{a}{b^{ap}\, B(p,q)} \int_{0}^{\infty} \frac{\left(u^{1/a} b\right)^{ap}}{(1+u)^{p+q}} \frac{1}{a} u^{\frac{1}{a}-1} b\, du$$

$$= \frac{b}{B(p,q)} \int_{0}^{\infty} \frac{u^{p+\frac{1}{a}-1}}{(1+u)^{p+q}}\, du$$

Karena $B(p,q) = \int_{0}^{\infty} \frac{u^{p-1}}{[1+u]^{p+q}}\, du$ (Abramowitz and Stegun,1970) maka :

$$E(X) = \frac{b}{B(p,q)} B\left(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a}\right)$$

$$E(X) = \frac{b\, \Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\, \Gamma(q)} \cdot \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{a}\right) \Gamma\left(q - \frac{1}{a}\right)}{\Gamma(p+q)}$$

$$E(X) = \frac{b\, \Gamma\left(p + \frac{1}{a}\right) \Gamma\left(q - \frac{1}{a}\right)}{\Gamma(p)\, \Gamma(q)}$$

Jadi, nilai harapan dari distribusi GB2 adalah

$$E(X) = \frac{b\,\Gamma\left(p + \frac{1}{a}\right)\;\Gamma\left(q - \frac{1}{a}\right)}{\Gamma(p)\;\Gamma(q)} \tag{2.2}$$

Selanjutnya, untuk $E(X^2)$ dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx$$

$$E(X^2) = \int_{0}^{\infty} x^2\, \frac{a x^{ap-1}}{b^{ap}\, B(p,q)\left(1 + \left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right)^{sp+q}}\, dx$$

$$E(X^2) = \frac{a}{b^{ap}\, B(p,q)} \int_{0}^{\infty} \frac{x^{ap+1}}{\left(1 + \left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right)^{p+q}}\, dx$$

Misalkan :

$u = \left(\frac{x}{b}\right)^{a}$ $\qquad\qquad$ $x = 0 \rightarrow u = 0$

$x = u^{1/a} b$ $\qquad\qquad$ $x = \infty \rightarrow u = \infty$

$$dx = \frac{1}{a} u^{\frac{1}{a}-1} b\, du$$

Sehingga :

$$E(X^2) = \frac{a}{b^{ap}\, B(p,q)} \int_{0}^{\infty} \frac{\left(u^{1/a} b\right)^{ap+1}}{(1+u)^{p+q}}\, \frac{1}{a} u^{\frac{1}{a}-1} b\, du$$

$$E(X^2) = \frac{b^2}{B(p,q)} \int_{0}^{\infty} \frac{u^{p+\frac{2}{a}-1}}{(1+u)^{p+q}}\, du$$

Karena $B(p,q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{[1+u]^{p+q}}\, du$ (Abramowitz and Stegun,1970) maka :

$$E(X^2) = \frac{b^2}{B(p,q)} B\left(p + \frac{2}{a}, q - \frac{2}{a}\right)$$

$$E(X^2) = \frac{b^2\ \Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\ \Gamma(q)} \cdot \frac{\Gamma\left(p + \frac{2}{a}\right)\ \Gamma\left(q - \frac{2}{a}\right)}{\Gamma(p+q)}$$

$$E(X^2) = \frac{b^2\ \Gamma\left(p + \frac{2}{a}\right)\ \Gamma\left(q - \frac{2}{a}\right)}{\Gamma(p)\ \Gamma(q)}$$

$$jadi\ nilai\ \ E(X^2) = \frac{b^2\ \Gamma\left(p + \frac{2}{a}\right)\ \Gamma\left(q - \frac{2}{a}\right)}{\Gamma(p)\ \Gamma(q)} \qquad (2.3)$$

2.1.2 Ragam Distribusi *Generalized Beta 2 (GB2)*

Ragam dari distribusi GB2 dapat diperoleh dengan dengan menggunakan persamaan (2.2) dan (2.3) yaitu :

$$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= \frac{b^2\ \Gamma\left(p + \frac{2}{a}\right)\ \Gamma\left(q - \frac{2}{a}\right)}{\Gamma(p)\ \Gamma(q)} - \left(\frac{b\ \Gamma\left(p + \frac{1}{a}\right)\ \Gamma\left(q - \frac{1}{a}\right)}{\Gamma(p)\ \Gamma(q)}\right)^2$$

$$= \frac{b^2\ \Gamma\left(p + \frac{2}{a}\right)\ \Gamma\left(q - \frac{2}{a}\right)}{\Gamma(p)\ \Gamma(q)} - \frac{b^2\left(\Gamma\left(p + \frac{1}{a}\right)\right)^2\left(\Gamma\left(q - \frac{1}{a}\right)\right)^2}{[\Gamma(p)]^2[\Gamma(q)]^2}$$

$$= \frac{b^2[\Gamma(p)\ \Gamma(q)\Gamma\left(p + \frac{2}{a}\right)\ \Gamma\left(q - \frac{2}{a}\right)] - b^2\left(\Gamma\left(p + \frac{1}{a}\right)\right)^2\left(\Gamma\left(q - \frac{1}{a}\right)\right)^2}{[\Gamma(p)]^2[\Gamma(q)]^2}, \qquad (2.4)$$

2.2 Metode Momen

Definisi 2.2

Misalkan X_1, X_2, … , X_n merupakan sampel dari polulasi yang memiliki fungsi kepekatan peluang $f(x|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$. Metode pendugaan dengan momen dilakukan dengan cara menyamakan k momen pertama sampel dengan momen pertama dari polulasi dan meyelesaikan sistem persamaan tersebut secara bersama atau simultan.

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\ 1}, \quad \mu_1 = E(X)$$

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\ 2}, \quad \mu_2 = E(X^2)$$

$$\vdots$$

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\ k}, \quad \mu_k = E(X^k) \tag{2.5}$$

Momen populasi μ_k sering ditulis sebagai fungsi dari $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, yaitu $\mu_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$. Metode momen penduga $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \dots, \hat{\theta}_k)$ dari $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan untuk $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ dalam notasi $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ sebagai berikut :

$$m_1 = \mu_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

$$m_2 = \mu_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

$$\vdots$$

$$m_k = \mu_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)\ , \tag{2.6}$$

(Casella & Burger, 1990).

2.3 Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)

Definisi 2.3

Misalkan X_1, X_2, ..., Xn adalah sampel acak berukuran n yang saling bebas stokastik identik dari suatu distribusi yang mempunyai fungsi kepekatan peluang $f(x;\theta)$, $\theta\epsilon\Omega$. Fungsi kepekatan peluang bersama dari X_1, X_2, ..., Xn adalah $f(x_1;\theta)\,f(x_2;\theta)\,...\,f(x_n;\theta)$ yang merupakan fungsi kemungkinan (*Likelihood Function*).

Untuk $x1$, $x2$, ..., xn tetap, fungsi kemungkinan merupakan fungsi dari θ dan dilambangkan dengan $L(\theta)$dan dinotasikan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
L(\theta) &= f(\overline{x};\theta) \\
&= f(x_1, x_2\,, ..., x_n;\theta) \\
&= f(x_1;\theta)\,f(x_2;\theta)\,...\,f(x_n;\theta), \theta\epsilon\Omega \\
&= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

Definisi 2.4

$L(\theta) = f(x_1, x_2\,, ..., x_n;\theta), \theta\epsilon\Omega$ merupakan fungsi kepekatan peluang dari $x_1, x_2\,, ..., x_n$. Untuk hasil pengamatan $x_1, x_2\,, ..., x_n$, nilai $\hat{\theta}$ berada dalam Ω, dimana $L(\theta)$ maksimum yang disebut sebagai *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dari θ. Jadi $\hat{\theta}$ merupakan penduga dari θ.

Jika $f\left(x_1, x_2\,, ..., x_n;\hat{\theta}\right) = \max f(x_1, x_2\,, ..., x_n;\theta)$, $\theta\epsilon\Omega$ maka fungsi tersebut memaksimumkan $L(\theta)$ terhadap parameternya. Biasanya mencari turunan dari $L(\theta)$ terhadap parameternya relative sulit, sehingga dalam penyelesaiannya dapat diatasi dengan menggunakan logaritma.

Untuk memaksimumkan ln $L(\theta)$ adalah dengan mencari turunan dari ln $L(\theta)$ terhadap parameternya kemudian hasil turunannya dibuat sama dengan nol.

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0, \qquad (2.8)$$

(Hogg & Craig, 1995)

2.4 Metode *Probability Weighted Moment* (PWM)

Diawali dari beberapa kelemahan dan kelebihan dari setiap metode pendugaan yang telah ada, maka penggunaan metode PWM dapat dijadikan alternatif lain dalam menduga parameter dari suatu distribusi peluang. Metode PWM merupakan modifikasi dari metode "konvensional" momen dan pertama kali dikemukakan oleh Hosking et al., (1984). Fungsi PWM dari variabel random X dengan fungsi distribusi kumulatif (CDF) , F(x) didefinisikan sebagai berikut:

$$M_{r,s,t} = E[(X(F))^r \big(F(x)\big)^s \big(1 - F(x)\big)^t] \qquad (2.9)$$

Dalam hal ini r, s dan t merupakan bilangan real. Bila s = t = 0 dan r merupakan bilangan bulat yang tidak negatif maka akan menjadi $M_{r,0,0}$ merupakan momen peluang konvensional yang selama ini dikenal. Adapun subclass dari fungsi PWM di atas dengan X(F) adalah invers dari fungsi distribusi kumulatif maka fungsi PWM adalah $M_{1,s,t}$ $(r = 1, s = 0,1,2, \dots, t = 0,1,2, \dots)$. Sementara $M_{1,s,t}$ dapat dibagi menjadi dua bagian, yaitu s = 0 ($M_{1,0,t}$) dan t = 0 ($M_{1,s,0}$), sehingga fungsi diatas dapat dinyatakan dalam bentuk

$M_{1,0,t} = E[(X(F)\left(1 - F(x)\right)^{t}]$ dimana $M_{1,0,t} = \int_0^1 [(X(F)\left(1 - F(x)\right)^{t}]\, dt$ dan

$M_{1,s,0} = E[(X(F)\left(F(x)\right)^{s}]$ dimana $M_{1,s,0} = \int_0^1 [(X(F)\left(F(x)\right)^{s}]\, dt$

Dengan menyelesaikan M_t akan didapatkan penduga bagi parameter yang masih dinyatakan dalam bentuk M_t. Adapun penduga tak bias bagi M_t diperoleh berdasarkan sampel tataan $x_{(1)} < x_{(2)} < \cdots < x_{(n)}$ dari sampel berukuran n, dan t biangan positif dengan menyelesaikan pesamaan

$$\widehat{M}_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-t} \frac{\binom{n-i}{t}}{\binom{n-1}{t}} x_{(i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-t} \frac{(n-i)\ldots(n-i-t+1)}{(n-1)\ldots(n-t)} x_{(i)} \qquad (2.10)$$

Selanjutnya dengan mengganti M_t dengan $\widehat{M}_t$ akan didapatkan penduga parameter dari setiap parameter distribusi (Greenwood, 1979).

2.5 Metode Newton Raphson

Apabila proses pendugaan parameter didapat persamaan akhir yang non linear maka tidak mudah memperoleh pendugaan parameter tersebut, sehingga diperlukan suatu metode numerik untuk memecahkan persamaan non linear tersebut. Salah satu metode yang digunakan untuk memecahkan sistem persamaan non linear adalah Metode Newton Raphson. Metode Newton Raphson adalah metode untuk menyelesaikan persamaan non linear secara iterative. Metode ini dapat diperluas untuk menyelesaikan sistem persamaan dengan lebih dari satu parameter. Iterasinya sebagai berikut :

$$\theta_{i+1} = \theta_i - [H^{-1}g] \qquad (2.11)$$

Dengan $\hat{\theta}_{i+1} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{i+1} \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{p+1} \end{bmatrix}$ dan $\hat{\theta}_i = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{1i} \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{pi} \end{bmatrix}$

Vector gradient atau vector turunan pertama terhadap parameternya dan dilambangkan degan g(θ) yaitu :

$$g(\theta) = \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Matriks Hessian atau matriks turunan kedua dari fungsi logaritma natural terhadap parameter a, b, p, dan q dilambangkan dengan $H(\theta)$.

$$H(\theta) = \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta\, \partial \theta'}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial {\theta_1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_1\, \partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_n\, \partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial {\theta_n}^2} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

(Seber &Wild, 2003).

2.6 Karakteristik Penduga

Untuk mengkaji karakteristik penduga dari distribusi GB2 maka harus memenuhi sifat-sifat penduga yang baik, yakni seperti yang akan dijelaskan berikut ini.

2.6.1 Tak Bias

Salah satu sifat yang harus dimiliki oleh suatu penduga parameter dari suatu distribusi adalah sifat ketakbiasan dari penduga tersebut.

Definisi 2.5

Penduga $U(\boldsymbol{X}) = U(X_1, X_2, \dots, X_n)$ dikatakan penduga tak bias bagi $g(\theta)$ bila

$E\big(U(\boldsymbol{X})\big) = g(\theta)$,

(Hogg and Craig, 1995).

2.6.2 Varians Minimum

Suatu penduga dikatakan sebagai penduga yang baik jika selain memiliki sifat tak bias, juga memiliki sifat varians minimum (ragam minimum).

Definisi 2.6

Misalkan $U(\boldsymbol{X})$ adalah penduga tak bias bagi $g(\boldsymbol{\theta})$, maka untuk sebarang penduga tak bias $U_1(\boldsymbol{X})$ bagi $g(\boldsymbol{\theta})$ disebut penduga varians minimum jika $Var\,\big(U(\boldsymbol{X})\big) \leq Var\,(U_1(\boldsymbol{X}))$ untuk setiap $\boldsymbol{\theta} \in \Omega$, dimana

$$Var\big(U_1(\boldsymbol{X})\big) \geq \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta} g(\boldsymbol{\theta})\right)^2}{n\,.\,E\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta})\right]^2}$$

(Bain and Engelhardt, 1992).

Dalam menentukan penduga varians minimum, maka berikut ini diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan varians minimum yakni :

2.6.2.1 Informasi Fisher

Definisi 2.7

Misalkan X variabel acak dengan fungsi kepekatan (*pdf*) $(x;\theta), \theta \in \Omega$, *Information Fisher* dinotasikan dengan $I(\theta)$, dimana :

$$I(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial lnf(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\}$$

atau

$$I(\theta) = -E\left\{\frac{\partial^2 lnf(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right\}$$

(Hogg and Craig, 1995).

2.6.2.2 Matriks Informasi Fisher

Definisi 2.8

Misalkan sampel acak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dari suatu distribusi dengan fungsi kepekatan $f(x;\theta_1;\theta_2), \theta_1;\theta_2 \in \Omega$ dalam kondisi yang ada.Tanpa memperhatikan kondisi yang rinci, misalkan bahwa ruang dari X dimana $f(x;\theta_1;\theta_2) > 0$ yang tidak meliputi θ_1 dan θ_2 dapat diturunkan dibawah integralnya. Sehingga matriks Informasi Fisher sebagai berikut:

$$I_n = -n\begin{bmatrix} E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1;\theta_2)}{\partial\theta_1^2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1;\theta_2)}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right] \\ E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1;\theta_2)}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1;\theta_2)}{\partial\theta_2^2}\right] \end{bmatrix},$$

(Hogg and Craig, 1995).

2.6.2.3 *Cramer-Rao Lower Bound* (CRLB)

Definisi 2.9

Pertidaksamaan *Cramer-Rao Lower Bound* didefinisikan sebagai berikut:

$$\sigma_Y^2 \geq \frac{[k'(\theta)]^2}{nE\left[\left(\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right)^2\right]} = \frac{[k'(\theta)]^2}{nI(\theta)}$$

Jika $Y = u(X_1, X_2, ..X_n)$adalah penduga takbias dari θ, maka k(θ)= θ, mengakibatkan pertidaksamaan *Cramer-Rao Lower Bound* dengan $k'(\theta)$ adalah sebagai berikut:

$$\sigma_Y^2 \geq \frac{1}{nI(\theta)}$$

(Hogg and Craig,1995).

2.6.3 Konsisten

Sifat lain yang harus dimiliki oleh suatu penduga selain tak bias dan varians minimum adalah sifat kekonsistenan dari penduga tersebut, dimana saat ukuran sampel semakin besar maka penduga tersebut akan semakin mendekati parameter populasi yang sesungguhnya.

Definisi 2.10

$U(\boldsymbol{X})$ dikatakan sebagai penduga konsisten bagi $g(\theta)$ jika $U(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{P} g(\theta)$ untuk $n \to \infty, \forall\theta \in \boldsymbol{\Omega}$ yaitu bila :

$$P\{|U(\boldsymbol{X}) - g(\theta)| \geq \varepsilon\} = 0$$

atau

$$P\{|U(\boldsymbol{X}) - g(\theta)| < \varepsilon\} = 1,$$

(Hogg and Craig, 1995).

Teorema 2.1 *(Chebyshev's inequality)*

Misalkan X variabel acak dengan rata-rata μ dan ragam σ^2. Untuk $\forall\ \varepsilon > 0$,

$$P(|X-\mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

atau

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

(Larsen dan Marx, 2012).

2.7 Ekstrapolasi Richardson

Ekstrapolasi Richardson merupakan metode yang menggunakan dua perkiraan dari sebuah integral untuk mengkomputasi penduga ketiga yang lebih akurat. Perkiraan dan kesalahan (*error*) yang diasosiasikan dengan aturan trapesium multi-aplikasi (*multiple-application trapezoidal rule*) dapat digambarkan secara umum sebagai

$$I = I(h) + E(h) \tag{2.14}$$

dimana I adalah nilai sebenarnya dari integral tersebut , I(h) adalah pendugaan dari sebuah aturan trapesium dengan aplikasi bersegmen n dengan lebar langkahnya h = (b-a)/n dan E(h) adalah kesalahan pemotongan (*truncation error*). Jika kita membuat dua perkiraan yang berbeda menggunakan lebar langkah h_1 dan h_2 maka didapatkan persamaan sebagai berikut :

$$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2) \tag{2.15}$$

error dari aturan trapesium multi-aplikasi dapat diperkirakan sebagai

$$E \cong -\frac{(b-a)^3}{12\, n^2} f''$$

Karena nilai n = (b-a)/h sehingga persamaan diatas dapat kita ubah menjadi

$$E \cong -\frac{(b-a)}{12} h^2 f'' \tag{2.16}$$

Jika diasumsikan bahwa f'' adalah konstan tang artinya tidak dipengaruhi oleh lebar langkah maka nilai E dapat digunakan untuk menentukan rasio dari kedua *error*

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \cong \frac{{h_1}^2}{{h_2}^2}$$

Perhitungan ini memiliki efek penting dalam penghilangan f'' dari perhitungan. Selanjutnya persamaan rasio di atas dapat kita ubah menjadi :

$$E(h_1) \cong E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \tag{2.17}$$

Kemudian subtitusikan persamaan (2.17) ke persamaan (2.15)

$$I(h_1) + E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 = I(h_2) + E(h_2)$$

$$E(h_2) \cong \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2} \tag{2.18}$$

dalam hal ini kita telah mengkombinasikan dua perkiraan untuk menghasilkan sebuah penduga yang baru (Salusu, 2008).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2016/2017, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan diperoleh dari *http://bps.go.id//* tentang ekspor alat listrik menurut Negara tujuan utama periode Januari 2009 sampai dengan Desember 2015 sebanyak 70 data.

3.3 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Melakukan pendugaan parameter menggunakan metode momen

   Adapun langkah-langkah melakukan pendugaan parameter menggunakan metode momen adalah sebagai berikut :

   a. Mencari empat momen pertama dari distribusi *generalized beta 2* (GB2).

b. Menduga parameter (α,b,p,q) dari distribusi GB2 dengan menyelesaikan persamaan dari momen yang diperoleh.

c. Memeriksa sifat ketakbiasan dari penduga yang telah didapatkan.

d. Memeriksa sifat kekonsistenan dari penduga yang telah didapatkan

2. Melakukan pendugaan parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE).

   Adapun langkah-langkah melakukan pendugaan parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) adalah sebagai berikut :

   a. Membentuk fungsi kemungkinan yang berasal dari fungsi kepekatan peluang GB2.

   b. Mengubah fungsi kepekatan peluang dalam bentuk logaritma natural (ln).

   c. Pendugaan parameter dari metode MLE dengan mencari turunan pertama dari logaritma natural fungsi kepekatan peluang terhadap parameter-prameter yang akan diduga dan disama dengankan nol.

   d. Menyelesaikan dugaan parameter yang tidak dapat diselesaikan secara analitik menggunakan metode Newton Raphson.

   e. Menggunakan *software* R untuk mendapankan nilai dugaan parameter GB2.

   f. Memeriksa sifat varian minimum penduga.

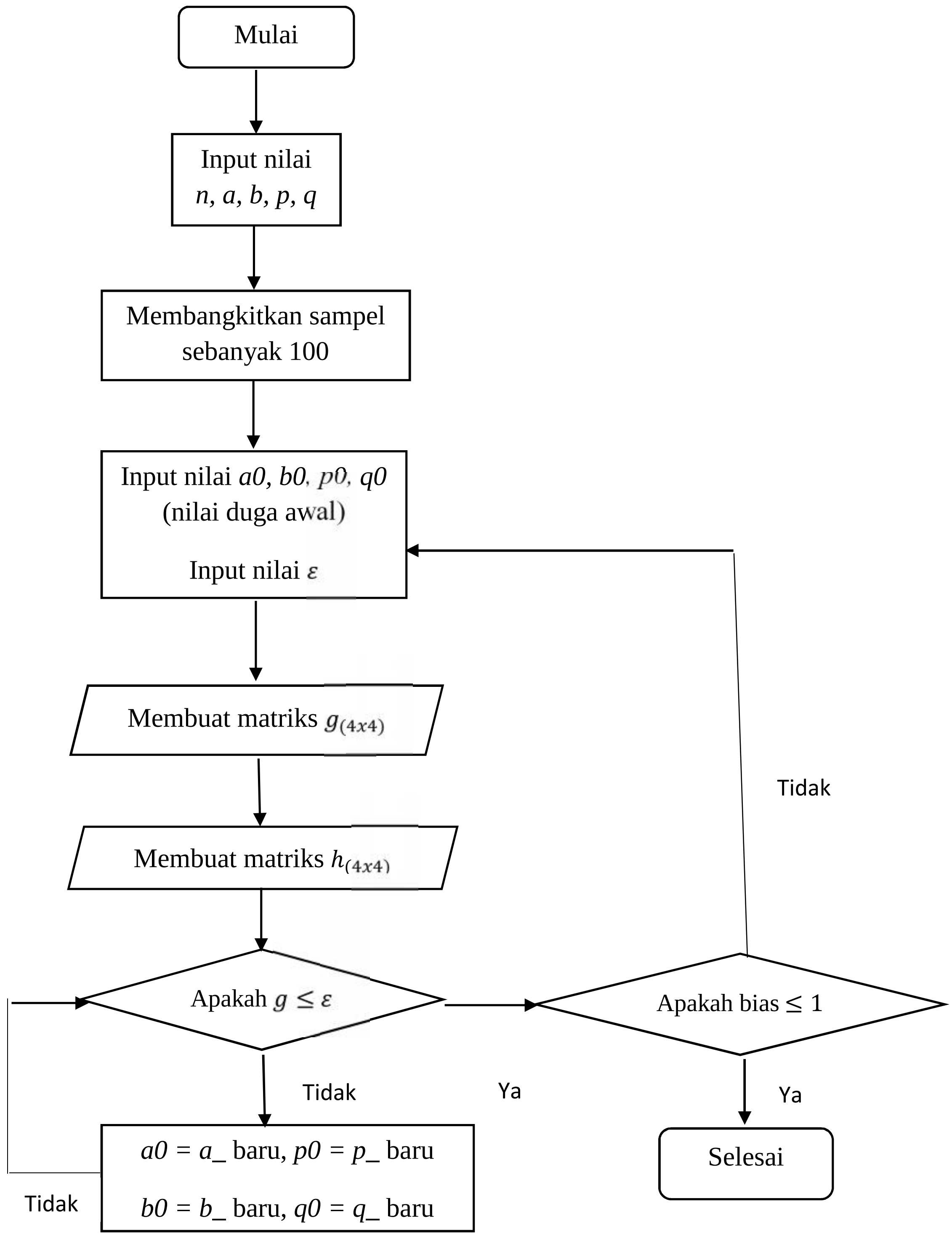
3. Melakukan pendugaan parameter menggunakan metode *Probability Weighted Moment* (PWM).

   Adapun langkah-langkah melakukan pendugaan parameter menggunakan metode *Probability Weighted Moment* (PWM) adalah sebagai berikut :

   a. Mencari fungsi kumulatif (*Cumulative Distribution Function*) dari distribusi GB2.
   b. Mencari invers dari fungsi kumulatif distribusi GB2 secara numerik.
   c. Menyelesaikan dugaan parameter dengan mencari bentuk peluang momen terboboti $(M_{r,s,t})$ dari distribusi GB2 yang tidak dapat diselesaikan secara analitik menggunakan *software* R.

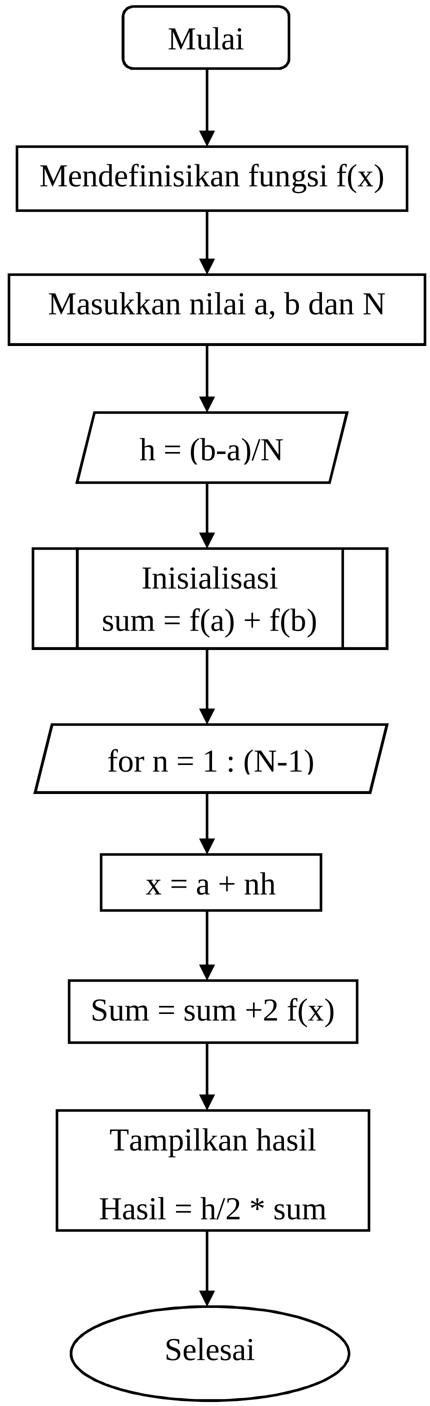
4. Menemukan data yang berdistribusi *Generalized Beta* 2 kemudian memeriksa nilai parameter dari data tersebut menggunakan *software Easyfit.*
5. Membangkitkan data berdistribusi *Generalized Beta* 2 menggunakan *Software* R dengan ukuran sampel 25, 50, 100, 500, dan 1000 dengan pengulangan sebanyak 100 kali.
6. Menghitung nilai *mean square error* (MSE) dari masing-masing metode pendugaan.
7. Membandingkan hasil pendugaan dari ketiga metode dengan melihat nilai *mean square error* (MSE), dimana metode yang memiliki nilai MSE paling kecil merupakan metode yang paling baik digunakan untuk menduga parameter distribusi GB2.

3.4 Diagram Alir Metode Newton-Raphson



Gambar 1. Diagram alir metode Newton-Raphson

3.5 Diagram Alir Metode Richardson



Gambar 2. Diagram alir metode Richardson

V. KESIMPULAN

Dari hasil penelitian ini dapat diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Pendugaan parameter distrbusi *Generalized Beta* 2 dengan metode momen dengan memisalkan a = 1 adalah

$$b = \frac{2(\sum x_i)^2(\sum x_i{}^3) - n\,(\sum x_i{}^2)(\sum x_i{}^3) - (\sum x_i)(\sum x_i{}^2)^2}{2n\,(\sum x_i{}^2)^2 - (\sum x_i)^2(\sum x_i{}^2) - n\,(\sum x_i)(\sum x_i{}^3)}$$

$$p = \frac{2\,(\sum x_i)(\sum x_i{}^2)^2 - 2(\sum x_i)^2(\sum x_i{}^3)}{2(\sum x_i)^2(\sum x_i{}^3) - n\,(\sum x_i{}^2)(\sum x_i{}^3) - (\sum x_i)(\sum x_i{}^2)^2}$$

$$q = \frac{-3n\,(\sum x_i)(\sum x_i{}^3) + 4n(\sum x_i{}^2)^2 - (\sum x_i)^2(\sum x_i{}^2)}{2n(\sum x_i{}^2)^2 - (\sum x_i)^2(\sum x_i{}^2) - n\,(\sum x_i)(\sum x_i{}^3)}$$

2. Pendugaan paremeter distrbusi *Generalized Beta* 2 dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* dan *Probability Weighted Moment* menghasilkan penduga yang tidak dapat diselesaikan secara analitik , sehingga perlu diselesaikan dengan cara numerik.
3. Dari ketiga metode pendugaan yang digunakan metode yang paling baik dalam menduga parameter distrbusi *Generalized Beta* 2 adalah metode *Maximum Likelihood Estimation* karena memiliki nilai *mean square error* paling kecil.
4. Semakin besar ukuran sampel yang digunakan maka nilai dugaan parameter akan semakin mendekati parameter sebenarnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abramowitz,M. dan Stegun, I.A.1970. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, New York.

Bain, L. J. and Engelhardt, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Brooks/Cole,Duxbury.

Casella,G. And Berger.R.L.1990. *Statistical Inference*. Wadsworth & Brooks/Cole. California.

Casella,G. And Berger.R.L.2002.*Statistical Inference.Second Edition*.Thomson Learning Inc..USA.

Greenwood, J.A., et al. 1979. *Probability Weighted Moment : Definition and Relation to Parameters of Several Distributions Expressable in Invers Form.* Water resources Research.

Hoog, V Robert and Craig, T Allen. 1995. *Introduction of Mathematical Statistic Fifth Edition*. New Jersey : The United States of America.

Kleiber, C. and Kotz, S. 2003. *Statistical Size Distributions in Economical and Actuarial Sciences*. Hoboken, NJ, USA : Wiley-Interscience.

Larsen, R.J. and Marx,M.L.2012.*An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications.Fifth Edition.*Pearson Education Inc.,United States of America.

Salusu A., 2008. *Metode Numerik*. Graha Ilmu : Jakarta.

Seber and Wild. 2003 . *Nonlinear Rergression*. New Jersey. The United States of America.