SOLUSI BILANGAN BULAT PERSAMAAN DIOPHANTINE MELALUI BILANGAN FIBONACCI DAN BILANGAN LUCCAS

(Skripsi**)**

Oleh

SUCI MILANTIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2017

ABSTRACT

INTEGER SOLUTIONS OF SOME DIOPHANTINE EQUATIONS VIA FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS

By

SUCI MILANTIKA

This research discusses the Diophantine equations in the form $x^2 + axy + by^2 = c$. The values of $a, b,$ and c are constructed by Fibonacci number F_n and Lucas Number L_n. Furthermore, all integer solutions of the Diophantine equations in the form of Fibonacci number and Lucas number is determined by using Fibonacci and Lucas identities.

Keywords: *diophantine equation, Fibonacci number, Lucas number.*

ABSTRAK

SOLUSI BILANGAN BULAT PERSAMAAN DIOPHANTINE MELALUI BILANGAN FIBONACCI DAN BILANGAN LUCCAS

Oleh

SUCI MILANTIKA

Penelitian ini membahas tentang persamaan Diophantine yang berbentuk $x^2 + axy + by^2 = c$. Dengan nilai $a, b,$ dan c yang dikonstruksi oleh bilangan Fibonacci F_n dan bilangan Lucas L_n. Selanjutnya akan ditentukan solusi bilangan bulat persamaan Diophantine tersebut dalam bentuk bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas dengan menggunakan identitas bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas.

Kata kunci: *persamaan Diophantine, bilangan Fibonacci, bilangan Lucas.*

SOLUSI BILANGAN BULAT PERSAMAAN DIOPHANTINE MELALUI BILANGAN FIBONACCI DAN BILANGAN LUCCAS

Oleh

SUCI MILANTIKA

Skripsi

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
Sarjana Sains

pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2017

Judul Skripsi	:	**SOLUSI BILANGAN BULAT PERSAMAAN DIOPHANTINE MELALUI BILANGAN FIBONACCI DAN BILANGAN LUCCAS**
Nama Mahasiswa	:	Suci Milantika
No. Pokok Mahasiswa	:	1417031112
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Amanto, S.Si., M.Si.
NIP 19730314 200012 1 002

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.
NIP 19720227 199802 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

   Sekretaris : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **01 November 2017**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Suci Milantika**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1417031112**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Solusi Bilangan Bulat Persamaan Diophantine melalui Bilangan Fibonacci dan Bilangan Lucas.**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagai persyaratan penyelesaian studi pada universitas atau institut lain.

Bandar lampung, 1 November 2017

Yang Menyatakan

METERAI TEMPEL

C7CCDAEF135529552

6000

ENAM RIBU RUPIAH

Suci Milantika

NPM. 1417031112

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 20 April 1996 di Desa Sidobinangun, Kecamatan Way Seputih. Terlahir dari keluarga yang sederhana dari pasangan Bapak Sutanto dan Ibu Gumilah, merupakan anak pertama dan kakak dari Muhammad Setiawan Sidik dan Putri Meila Tantri.

Penulis menyelesaikan pendidikan sekolah dasar di SD Negeri 1 Dipasena Mulya, Rawajitu pada tahun 2008. Pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 2 Way Seputih pada tahun 2011. Pendidikan sekolah menengah atas di SMA Negeri 1 Seputih Banyak pada tahun 2014. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN undangan pada tahun 2014.

Pada periode 2014/2015 penulis terdaftar sebagai anggota magang Unit Kegiatan Mahasiswa (UKM) ESO. Selain itu penulis menjadi pengurus sebagai sekretaris anggota Biro Dana dan Usaha tahun 2016/2017 dan sebagai Bendahara Umum Unit Kegiatan Mahasiswa (UKM) Bulu Tangkis tahun 2017/2018

Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu di dunia kerja, penulis telah melaksanakan Kerja Praktik (KP) selama empat puluh hari di Kantor PT Jasa Raharja (persero) cabang Lampung. Dan sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis telah melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Desa, Kecamatan, .

MOTTO

“ Mimpi itu memang sulit untuk diraih, tapi bukan berarti tidak bisa dilakukan ”

(Suci Milantika)

“ Buatlah semua menjadi mudah tanpa harus membuat orang lain menjadi sulit “

(Suci Milantika)

“ Relakan dirimu jatuh untuk kemudian berdiri lebih kuat lagi, sebab hidup tak akan membiarkanmu duduk diam dan tak melakukan apa-apa “

(Suci Milantika)

“Jangan pernah meremehkan orang lain, karena kita tak pernah tau dengan siapa kita berhadapan “

(Suci Milantika)

“ Bertahanlah, karna yang kita keluhkan mungkin impian banyak orang ”

(Suci Milantika)

“ Menjadi luar biasa itu perlu waktu, perlu disakiti, perlu air mata, perlu dihina dan perlu jam terbang yang teruji “

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap syukur kepada Allah SWT atas segala nikmat yang tak terhingga yang selalu dilimpahkan kepadaku sehingga aku dapat menyelesaikan karya kecilku ini.

Mamak..., Bapak...
Kupersembahkan skripsiku ini sebagai wujud rasa cinta dan terima kasihku untuk setiap do'a, kasih sayang dan perhatian, serta semangat yang tak pernah putus diberikan di setiap hariku.

Untuk kedua adikku tersayang, serta keluarga besarku yang selalu memberikan semangat dan dukungan serta do'a yang tak pernah henti untukku. Terimakasih sudah menjadi motivator di setiap lelahku.

Seseorang yang selalu ada di setiap hariku, Anakan Gajah terimakasih untuk semua kebahagian dan keceriaan yang telah diberikan untukku. Sahabat-sahabat terbaik yang selalu ada, terimakasih atas semua cerita indah yang mengisi hari-hariku

SANWACANA

Alhamdulillahi robbil 'alamin, puji dan syukur penulis kepada Allah SWT atas izin serta ridho-Nya dalam menyelesaikan skripsi yang berjudul **" Solusi Bilangan Bulat Persamaan Diophantine melalui Bilangan Fibonacci dan Bilangan Lucas".** Shalawat serta salam kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menjadi suri tauladan yang baik bagi kita.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan, bantuan, dan kerjasama dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing utama yang senantiasa membimbing dan memberikan arahan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Muslim Ansori,, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing kedua yang telah memberikan bimbingan serta saran yang membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc.,Ph.D selaku pembahas sekaligus Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNILA.
4. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D. selaku dekan FMIPA Universitas Lampung.
5. Seluuruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
6. Untuk kedua orang tuaku yang telah banyak memberikan kasih sayang, kedua adikku yang memberikan do'a dan perhatian serta semangat yang tak terhingga kepada penulis.

7. Seluruh keluarga besarku di Seputih Banyak, terimakasih atas semua do’a dan dukungannya serta kasih sayang yang telah banyak diberikan.
8. Keluarga besar UKM Bulu Tangkis atas segala pembelajaran, kebersamaan, keceriaan, serta kebahagian yang telah diberikan kepada penulis.
9. Sahabat-sahabat satu perjuangan (Anakan Gajah) di kampus Abdul Kodir, Amanda Yona Ningtyas, Annisa Rizki Utami, Clara Septyan, Fauzia Annisatul Farida, Lesda Dhea Rafilia, Rahma Aulia Marzuki, Vanesha Putri Mardiana dan Vivi Nur Utami yang telah banyak memberikan semangat dan dukungan.
10. Sahabat-sahabat kosan Ayu Oktaviani, Ismini Hidayati, Esti Kurnia, yang telah memberikan pembelajaran arti hidup yang sebenarnya.
11. Teman-teman Matematika 2014 atas kebersamaan serta keceriaaan yang telah diberikan kepada penulis selama menempuh pendidikan di Universitas Lampung.
12. Seluruh pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Bandar Lampung, 1 November 2017

Penulis

Suci Milantika

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Persamaan Diophantine merupakan suatu persamaan yang mempunyai solusi berupa bilangan-bilangan bulat. Persamaan Diophantine pertama kali dipelajari oleh matematikawan Yunani bernama Diophantus yang dikenal dengan julukan “bapak dari aljabar”. Diophantus terkenal dengan karyanya yang berjudul *Arithmetica. Arithmetica* merupakan suatu pembahasan analitis teori bilangan yang berisi tentang pengembangan aljabar yang dilakukan dengan membuat persamaan dan persamaan-persamaan tersebut dikenal dengan sebutan Persamaan Diophantine (*Diophantine Equation*). Koefisien dari persamaan Diophantine hanya melibatkan bilangan bulat. Tidak ada bilangan pecahan di persamaan ini.

Pada tahun 1637, Pierre de Fermat seorang matematikawan Perancis menemukan persamaan Diophantine dengan bentuk umum $a^n + b^n = c^n$ dimana persamaan tersebut tidak memiliki solusi untuk $n > 2$. Persamaan ini juga dikenal dengan persamaan tripel Phytagoras.

Persamaan Diophantine tidak semuanya mempunyai solusi. Artinya, tidak semua persamaan seperti ini mempunyai penyelesaian pada himpunan bilangan bulat. Contohnhya $2x = 9$. Persamaan tersebut tidak mempunyai solusi pada himpunan bilangan bulat, namun akan mempunyai solusi pada himpunan bilangan real. Persamaan Diophantine tidak harus linier, bisa saja kuadrat, kubik, atau lainnya. Misal $ax^2 + by^2 = c$ yang merupakan bentuk umum persamaan non linier Diophantine . Persamaan Diophantine bisa memiliki banyak solusi yang beragam, mulai dari 0 sampai tak hingga.

Bentuk paling sederhana persaman Diophantine telah banyak dikembangkan, salah satunya adalah $x^2 + axy + by^2 = c$, bentuk inilah yang akan dibahas dalam penelitian ini, dengan nilai $a, b,$ dan c tersebut dikonstruksi oleh bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas. Pada persamaan Diophantine, nilai solusi atau akar-akarnya adalah bilangan bulat. Barisan Fibonacci sendiri dimulai dari suku ketiganya, setiap suku barisan tersebut diperoleh dengan cara menjumlahkan dua suku tepat sebelumnya. Nama barisan Fibonacci muncul pada abad ke-19 dan diperkenalkan oleh seorang matematikawan dari Perancis yang bernama Edouard Lucas. Lucas mengembangkan barisan yang memiliki sifat seperti barisan Fibonacci yang selanjutnya disebut barisan Lucas. Sehingga hal ini sangat terkait dengan bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas yang merupakan bilangan bulat.

Pada penelitian ini akan dibahas cara menentukan solusi dari persamaan Diophantine yang berbentuk $x^2 - 5F_nxy - 5(-1)^ny^2 = \pm L_n^2$, $x^2 - L_nxy + (-1)^ny^n = \pm 5F_n^2$, dan $x^2 - L_nxy + (-1)^ny^2 = \pm F_n^2$. Penelitian ini merupakan tinjauan (*review*) dari jurnal Demiturk dan Keskin.

1.2. Batasan Masalah

Pada penelitian ini penulis hanya menyelesaikan persamaan Diophantine yang berbentuk $x^2 - 5F_nxy - 5(-1)^ny^2 = \pm L_n^2$, $x^2 - L_nxy + (-1)^ny^n = \pm 5F_n^2$, dan $x^2 - L_nxy + (-1)^ny^2 = \pm F_n^2$. Dimana penyelesaian ketiga persamaan tersebut menggunakan identitas bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas.

1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan solusi dari persamaan Diophantine menggunakan penerapan identitas bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas dan mengkaji konsep persamaan Diophantine yang berlaku didalamnya.

1.4. Manfaat Penelitian

Dari hasil penelitian ini diharapkan dapat memahami sifat dari bilangan bulat yang berkaitan erat dengan bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas, serta memberikan wawasan tentang konsep persamaan Diophantine.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Sistem Bilangan Bulat

Definisi 2.1.1 (Invers Penjumlahan)

Jika n bilangan bulat sedemikian sehingga $n + (-n) = (-n) + n = 0$, maka$(-n)$ disebut lawan dari (invers penjumlahan dari) n, dan 0 disebut elemen identitas terhadap penjumlahan (Wirasto, 1972).

Definisi 2.1.2 (Sifat –Sifat Sistem Bilangan Bulat)

Sistem bilangan bulat terdiri atas himpunan $B = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ dengan operasi biner penjumlahan (+) dan perkalian (X). Untuk a, b, dan c bilangan-bilangan bulat sembarang, sistem mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

i. Sifat tertutup terhadap penjumlahan, ada dengan tunggal $(a + b)$ dalam B.

ii. Sifat tertutup terhadap perkalian, ada dengan tunggal $(a \times b)$ dalam B.

iii. Sifat komutatif penjumlahan, $a + b = b + a$.

iv. Sifat komutatif perkalian, $a \times b = b \times a$.

v. Sifat asosiatif penjumlahan, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

vi. Sifat asosiatif perkalian, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

vii. Sifat distributif kiri perkalian terhadap penjumlahan,

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

viii. Sifat distributif kanan perkalian terhadap penjumlahan,

$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$.

ix. Untuk setiap a, ada dengan tunggal elemen 0 dalam B sehingga $a + 0 = 0 + a = a$. 0 disebut elemen identitas penjumlahan.

x. Untuk setiap a, ada dengan tunggal elemen 1dalam B sehingga $a \times 1 = 1 \times a = a$. 1 disebut elemen identitas perkalian

(Peterson, Jhon A.; Hashisaki, and Joseph, 1967).

Definisi 2.1.3 (Pengurangan Bilangan-Bilangan Bulat)

Jika a, b dan k bilangan-bilangan bulat, maka $a - b = k$ jika dan hanya jika $a = b + k$ (Wirasto, 1972).

Definisi 2.1.4 (Pembagian Bilangan-Bilangan Bulat)

Jika a, b dan c bilangan-bilangan bulat dengan $b \neq 0$, maka $a : b = c$ jika dan hanya jika $a = bc$. Hasil bagi bilangan-bilangan bulat $(a : b)$ ada (yaitu suatu bilangan bulat) jika dan hanya jika a kelipatan dari b. Sehingga untuk setiap bilangan bulat a dan b, hasil bagi $(a : b)$ tidak selalu ada (merupakan bilangan bulat). Oleh karena itu pembagian bilangan-bilangan bulat tidak memiliki sifat tertutup (Wirasto, 1972).

2.2. Bilangan Prima

Bilangan prima yaitu suatu bilangan bulat p > 1 yang tidak mempunyai faktor positif kecuali 1 dan p. Menurut definisi 1 “bilangan bulat yang lebih besar dari 1 dan bukan prima disebut bilangan komposit (tersusun)”, sehingga 1 bukan bilangan prima maupun bilangan komposit, namun 1 disebut unit. Jadi himpunan bilangan bulat positif (bilangan asli) terbagi dalam tiga himpunan yang saling lepas, yaitu himpunan semua bilangan prima, himpunan semua bilangan komposit dan himpunan unit (Cooper, C. D. H., 1975).

Contoh

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 adalah bilangan – bilangan prima

4, 6, 8, 9, 10, 12 adalah bilangan – bilangan komposit

2.3. Persamaan Diophantine

Definisi 2.3.1 (Persamaan Linear Diophantine)

Persamaan Linear $ax + by = c$ yang dapat diselesaikan dalam domain (himpunan semesta) berupa bilangan bulat, jika domainnya bilangan bulat maka fungsi linear tersebut mempunyai solusi. Persamaan linear Diophantine mempunyai derajat satu (Graham, 1975).

Definisi 2.3.2 (Persamaan Non Linear Diophantine)

Persamaan Linear $ax^2 + by^2 = c^2$ yang dapat diselesaikan dalam domain (himpunan semesta) berupa bilangan bulat, jika domainnya bilangan bulat maka fungsi linear tersebut mempunyai solusi. Persamaan non linear Diophantine mempunyai derajat dua (Graham, 1975)

2.4. Bilangan Fibonacci dan Bilangan Lucas

2.4.1 Jumlah n Suku Pertama Barisan Fibonacci

Barisan Fibonacci didefinisikan sebagai berikut :

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 2$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}; n \geq 3 \qquad (2.1)$$

Dalam hubungannya mencari jumlah n suku pertama, maka ini tak terlepas dari deret. Simbol F_n untuk menyatakan jumlah n suku pertama barisan Fibonacci (deret Fibonacci). F_n, $f_3 = f_1 + f_2$; $f_4 = f_2 + f_3$ dan seterusnya.

Penjelasan : deretan ini berawal dari 0 dan 1, kemudian angka berikutnya didapat dengan cara menambahkan kedua bilangan yang berurutan sebelumnya. Dengan aturan ini, maka deretan bilangan Fibonacci yang pertama adalah :

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, dan seterusnya.

Deret Fibonacci diberikan dalam bentuk berikut ini :

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} fk = f_{n+2} - 1; n \geq 3 \qquad (2.2)$$

Bukti :

Dari persamaan (2.2) , subtitusi n = k + 2 maka :

$$f_{k+2} = f_{k+1} + f_k \,; k \geq 1$$

$$f_k = f_{k+2} - f_{k+1} \,; k \geq 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} fk = \sum_{k=1}^{n} (f_{k+2} - f_{k+1})$$

$$\sum_{k=1}^{n} fk = f_3 - f_2 + f_4 - f_3 + f_5 - f_4 + \cdots + f_{n+2} - f_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} fk = f_{n+2} - f_2$$

$$\sum_{k=1}^{n} fk = f_{n+2} - 1$$

Tabel 1. Barisan Fibonacci (f_n)

f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Tabel 2. Deret Fibonacci (F_n)

f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10
1	2	4	7	12	20	33	54	88	144

2.4.2. Identitas Bilangan Fibonacci dan Lucas

Lucas mengembangkan barisan yang mempunyai sifat seperti barisan Fibonacci, yang selanjutnya disebut barisan Lucas, yaitu 1, 3, 4, 7, 11, 18,...

Sifat dasar barisan Lucas sama dengan barisan Fibonacci, yang berbeda adalah suku keduanya. Suku ke-n barisan Lucas dilambangkan dengan L_n, dengan bentuk umumnya $L_1 = 1$ dan L_2=3 $\rightarrow$ L_n= $L_{n-1} + L_{n-2}$ dengan $n \geq 3$.

Selanjutnya diperoleh beberapa identitas bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas :

a) $F_n^2 - F_n F_{n-1} - F_{n-1}^2 = (-1)^{n+1}$ dengan $n \in Z$.

b) $L_n^2 - L_n L_{n-1} - L_{n-1}^2 = (-1)^n 5$ dengan $n \in Z$.

c) $F_{m+1} L_n + L_{n-1} F_m = L_{n+m}$ dengan $m, n \in Z$.

d) $L_m L_n + 5 F_m F_n = 2 L_{n+m}$ dengan $m, n \in Z$.

e) $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$ dengan $n \in Z$.

f) $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$ dengan $n \in Z$.

g) $L_n^2 - 5F_n^2 = (-1)^n 4$ dengan $n \in Z$.

h) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dengan $n \in Z$.

i) $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ dengan $n \in Z$.

j) $F_{2n} = F_{2n+2} - F_{2n+1}$ dengan $n \in Z$.

k) $F_{m+1}F_n + F_{n-1}F_m = F_{n+m}$ dengan $m, n \in Z$.

2.5. Pembahasan Teorema Oleh Demirturk dan Keskin

Teorema 2.5.1

Semua solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$ diberikan oleh $(x, y) = \pm(F_n, F_{n-1})$ dengan $n \in Z$.

Bukti

Misalkan $x = F_n$

$y = F_{n-1}$

Maka persamaan $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$ dapat ditulis

$$F_n^2 - F_nF_{n-1} - F_{n-1}^2 = (-1)^{n+1} \quad (2.1)$$

Dengan menggunakan induksi matematika maka untuk n = 1 persamaan (2.1) menjadi,

$F_1^2 - F_1F_0 - F_0^2 = (-1)^2$

$1 - (1)(0) - (0)^2 = (-1)^2$

Sehingga persamaan (2.1) benar untuk $n = 1$

Asumsikan persamaan (2.1) benar untuk $n = k$,

$$F_k^2 - F_kF_{k-1} - F_{k-1}^2 = (-1)^{k+1}$$

Kemudian akan ditunjukkan persamaan (2.1) benar untuk $n = k + 1$, yaitu

$$F_{k+1}^2 - F_{k+1}F_k - F_k^2 = (-1)^{k+2} \tag{2.2}$$

Dengan menggunakan identitas (h) yang ditulis dalam bentuk $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ maka,

$$\begin{aligned} F_{k+1}^2 - F_{k+1}F_k - F_k^2 &= F_{k+1}^2 - (F_k + F_{k-1})(F_{k+1} - F_{k-1}) - F_k^2 \\ &= F_{k+1}^2 - (F_kF_{k+1} - F_kF_{k-1} + F_{k-1}F_{k+1} - F_{k-1}^2) - F_k^2 \\ &= F_{k+1}^2 - F_kF_{k+1} + F_kF_{k-1} - F_{k-1}F_{k+1} + F_{k-1}^2 - F_k^2 \quad (2.3) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.2) maka persamaan (2.3) dapat menjadi,

$$\begin{aligned} F_{k+1}^2 - F_{k+1}F_k - F_k^2 &= F_{k+1}^2 - F_kF_{k+1} + F_kF_{k-1} - F_{k-1}F_{k+1} + F_{k-1}^2 + (-1)^{k+2} \\ &\quad -F_{k-1}^2 + F_{k-1}F_k \\ &= F_kF_{k-1} - F_{k-1}F_{k+1} + F_{k-1}^2 + (-1)^{k+2} \\ &= F_kF_{k-1} - F_{k-1}(F_{k+1} - F_{k-1}) + (-1)^{k+2} \\ &= F_kF_{k-1} - F_{k-1}\,F_k + (-1)^{k+2} \\ &= (-1)^{k+2} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $F_n^2 - F_nF_{n-1} - F_{n-1}^2 = (-1)^{n+1}$ dengan $n \in Z$. Hal ini menjelaskan bahwa semua solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$ diberikan oleh $(x, y) = \pm(F_n, F_{n-1})$ dengan $n \in Z$.

Akibat 2

- Semua solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - xy - y^2 = -1$ diberikan oleh $(x, y) = \pm(F_{2n}, F_{2n-1})$
- Semua solusi bilangan bulat dari persamaan $x^2 - xy - y^2 = 1$ diberikan oleh $(x, y) = \pm(F_{2n+1}, F_{2n})$

Bukti

Perhatikan persamaan (2.1) pada Teorema 2.5.1, maka dengan mensubstitusikan nilai n bilangan ganjil yaitu $n = 2k + 1, k \in Z$ pada persamaan (2.1), akan diperoleh

$$F_{2k+1}^2 - F_{2k+1}F_{2k} - F_{2k}^2 = (-1)^{2k+2}$$

Nilai $(-1)^{2k+2}$ akan selalu 1, sebab $2k + 2$ merupakan pola bilangan genap dengan $k \in Z$. Sehingga semua solusi bilangan bulat dari $x^2 - xy - y^2 = 1$ dapat dinyatakan dengan $(x, y) = \pm(F_{2n+1}, F_{2n})$ dengan $n \in Z$.

Kemudian dengan cara yang sama , yaitu mensubstitusikan nilai n bilangan genap yaitu $n = 2k, k \in Z$ pada persamaan (2.1), akan diperoleh

$$F_{2k}^2 - F_{2k}F_{2k-1} - F_{2k-1}^2 = (-1)^{2k+1}$$

Nilai $(-1)^{2k+1}$ akan selalu -1, sebab $2k + 1$ merupakan pola bilangan ganjil dengan $k \in Z$. Sehingga semua solusi bilangan bulat dari $x^2 - xy - y^2 = 1$ dapat dinyatakan dengan $(x, y) = \pm(F_{2n}, F_{2n-1})$ dengan $n \in Z$.

Teorema 2.5.2

Semua solusi bilangan bulat tak negatif dari persamaan $u^2 - 5v^2 = \pm 4$ diberikan oleh $(u, v) = (L_n, F_n)$ dengan $n \geq 0$.

Bukti

Misalkan $x = \frac{(u+v)}{2}$

$y = v$

Maka akan diperoleh $x^2 - xy - y^2 = \frac{(u+v)^2}{2} - \frac{(u+v)}{2} v - v^2$

$$= \left(\frac{u^2+2uv+v^2}{4} \right) - \left(\frac{2uv+2v^2}{4} \right) - \frac{4v^2}{4}$$

$$= \left(\frac{u^2+2uv+v^2-2uv-2v^2-4v^2}{4} \right)$$

$$= \left(\frac{u^2-5v^2}{4} \right)$$

$$x^2 - xy - y^2 = \pm 1$$

Dari Teorema 1, nilai $(x, y) = \pm(F_{n+1}, F_n)$ dengan $n \geq 0$, sehingga diperoleh

$$F_{n+1} = \frac{(u+v)}{2}$$

$$y = F_n$$

atau dapat ditulis $u = 2F_{n+1} - F_n$ dan $v = F_n$. Dengan menggunakan identitas (h) yang ditulis dalam bentuk $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dan identitas (e), maka nilai u menjadi,

$$u = 2F_{n+1} - F_n$$

$$u = L_n$$

Jadi, terbukti bahwa semua solusi bilangan bulat tak negatif dari persamaan $u^2 - 5v^2 = \pm 4$ diberikan oleh $(u, v) = (L_n, F_n)$ dengan $n \geq 0$.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2016/2017, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan simulasi sebagai aplikasi untuk menjelaskan teori yang didapat. Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Membuat persamaan Diophantine $x^2 - 5F_n xy - 5(-1)^n y^2 = \pm L_{n,}^2 x^2 - L_n xy + (-1)^n y^n = \pm 5F_n^2\ dan\ x^2 - L_n xy + (-1)^n y^2 = \pm F_n^2$ ke dalam bentuk baku.
2. Memeriksa persamaan Diophantine pada langkah 1 mempunyai solusi penyelesaian atau tidak dengan menggunakan identitas bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas. Jika mempunyai solusi maka dilanjutkan pada langkah 3.
3. Menyelesaikan persamaan Diophantine yang didapat dengan menggunakan identitas bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 KESIMPULAN

Berdasarkan penguraian yang telah dikerjakan dari hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa solusi persamaan Diophantine nonlinear yang berbentuk $x^2 + axy + by^2 = c$ dapat ditunjukkan dalam bentuk bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas. Hal ini disebabkan karna solusi persamaan Diophantine merupakan bilangan bulat yang sama hal nya dengan bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas yang juga bilangan bulat.

Solusi bilangan bulat Persamaan Diophantine $x^2 - 5F_n xy - 5(-1)^n y^2 = \pm L_{n,}^2 x^2 - L_n xy + (-1)^n y^n = \pm 5F_n^2 \; dan \; x^2 - L_n xy + (-1)^n y^2 = \pm F_n^2$ ini diselesaikan dengan modifikasi aljabar. Dalam keterkaitannya hanya akan didapat satu solusi. Hal ini disebabkan karena nilai solusi persamaan-persamaan tersebut bergantung pada nilai n, dalam hal ini nilai n yang didapat hanya satu nilai saja. Oleh karena itu, jumlah solusi yang didapat hanya satu solusi saja.

5.2 Saran

Pada penelitian ini penulis hanya menyelesaikan persamaan Diophantine $x^2 - 5F_n xy - 5(-1)^n y^2 = \pm L_{n,}^2 x^2 - L_n xy + (-1)^n y^n = \pm 5F_n^2\ dan\ x^2 - L_n xy + (-1)^n y^2 = \pm F_n^2$ menggunakan bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas. Diharapkan untuk peneliti selanjutnya dapat menyelesaikan persamaan Diophantine dengan bentuk Non Linear yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Andreescu, T & D. Andrica. 2002. *An Introduction to Diophantine Equation.* Gil Publishing House. Zalau, Romania.

Dunlap, R. A. 1997. *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. USA.

Demirturk, B. and Keskin, R. 2009. Integer Solutions of Some Diophantine Equations via Fibonacci and Lucas Numbers. *Journal of Integer Sequences.* **13**: 15-16.

Graham, M. 1975. *Modern Elementary Mathematicsl.* Harcort Brace Jonanovich, Inc., New York.

Koshy, T. 2001. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. John Wiley and Sons, Proc., New York-Toronto.

Peterson, J.A. Hashisaki, and Joseph. 1967. *Theory Of Arithmetics.* Jhon Willy & Sons, Inc., New York.

V. E. Jr. Hoggatt. 1969. *Fibonacci and Lucas Numbers*. Hounghton Mifflin Company. Boston.

Vadja, S. 1989. *Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section*. Ellis Horwood Limited Publ., England.

Wirasto, R.M. 1972. *Pengantar Ilmu Bilangan.* Yayasan Pembina Fkie-IKIP Yogyakarta, Yogyakarta.