PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI *ERLANG-1* MENGGUNAKAN METODE *PROBABILITY WEIGHTED MOMENT, METHOD OF MOMENT,* DAN *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

(Skripsi)

Oleh

AFIF LUTFI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

ABSTRAK

PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI *ERLANG-1* MENGGUNAKAN METODE *PROBABILITY WEIGHTED MOMENT, METHOD OF MOMENT,* DAN *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

Oleh

Afif Lutfi

Distibusi Erlang merupakan distribusi peluang kontinu yang merupakan salah satu kasus khusus dari distribusi Gamma dengan parameter skala $\theta > 0$ dan paramter bentuk $r > 0$ (r bilangan bulat). Berkaitan dengan pendugaan parameter distribusi kontinu terdapat beberapa metode pendugaan yang cukup dikenal antara lain *method of moment*, metode *maximum likelihood estimation* dan *probability weighted moment*. Pada penelitian ini didiskusikan hasil dugaan parameter distribusi Erlang-1 ($r = 1$) menggunakan *method of moment, maximum likelihood estimation* dan *probability weighted moment* dengan melihat karakteristik ketakbiasan parameter θ. Ragam, bias, dan selang kepercayaan penduga θ diperiksa dengan melakukan simulasi dugaan parameter θ untuk beberapa ukuran sampel yaitu 30, 50, 70, 100, 120, 150 dan 200. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa parameter θ memiliki karakteristik penduga yang tak bias untuk semua metode pendugaan yang digunakan. Selain itu nilai ragam,bias, dan selang kepercayaan semakin kecil untuk nilai sampel yang semakin besar.

Kata Kunci: Distribusi Erlang, *Method of Moment, Maximum Likelihood Estimaton, Probability Weighted Moment*

ABSTRACT

ESTIMATION OF PARAMETER FOR ERLANG – 1 DISTRIBUTION WITH PROBABILITY WEIGHTED MOMENT, METHOD OF MOMENT, AND MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION

By

Afif Lutfi

Erlang distribution is a continuous opportunity distribution which is one special case of Gamma distribution with parameter scale $\theta > 0$ and form parameter $r > 0$ (r integer). There are several well known estimation methods related to the parameter estimation for continuous distributions such as moment method, maximum likelihood estimation and probability weighted moment method. In this research, we discussed the result of Erlang-1 distribution parameter assumption ($r = 1$) using moment, maximum likelihood estimation and probability weighted moment methods by looking at the characteristics of parameter θ. The variation, bias, and confidence interval of estimation θ are checked by performing simulated alleged parameters θ for some sample sizes of 30, 50, 70, 100, 120, 150 and 200. The results obtained show that the parameter θ has an unbiased characteristic for all methods of estimation used. In addition, the value of variety, bias, and confidence interval are smaller when the sample values are larger.

Keyword: Erlang Distribution, Method of Moment, Maximum Likelihood Estimaton, Probability Weighted Moment

PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI *ERLANG-1* MENGGUNAKAN METODE *PROBABILITY WEIGHTED MOMENT, METHOD OF MOMENT,* DAN *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

Oleh

Afif Lutfi

Skripsi

Sebagai Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul : : **PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI *ERLANG-1* MENGGUNAKAN METODE *PROBABILITY WEIGHTED MOMENT, METHOD OF MOMENT,* DAN *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION***

Nama Mahasiswa : Afif Lutfi

NPM : 1317031002

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI,

1. Komisi Pembimbing

Pembimbing II,	Pembimbing I,
Dra.Wamiliana, MA, Ph.D.	**Ir. Warsono, M.S., Ph.D.**
NIP. 19631108198902 2 001	NIP. 19630216 198703 1 003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dra.Wamiliana, MA, Ph.D

NIP. 19631108198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Ir. Warsono, M.S., Ph.D** ....

Sekretaris : **Dra.Wamiliana, MA, Ph.D.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Mustofa Usman, MA, Ph.D** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.É.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 00 1

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **13 Oktober 2017**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul "Pendugaan Parameter Distribusi *Erlang-1* Menggunakan Metode *Probability Weighted Moment, Method of Moment,* dan *Maximum Likelihood Estimation"* adalah hasil pekerjaan saya sendiri bukan hasil orang lain. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan perartuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 13 Niovember 2017

Yang menyatakan

Afif Lutfi

NPM. 1317031002

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Way Jepara pada tanggal 20 Maret 1995, sebagai anak ke dua dari empat bersaudara, dari Bapak Mutris dan Ibu Dadiarti.

Pendidikan Taman Kanak-Kanak (TK) Al – Muslimun diselesaikan tahun 2001, Sekolah Dasar Negeri (SDN) 01 Labuhan Ratu Dua diselesaikan pada tahun 2007, Sekolah Menengah Pertama Negeri (SMPN) 01 Way Jepara diselesaikan pada tahun 2010, dan Sekolah Menengah Atas Negeri (SMAN) 01 Way Jepara diselesaikan pada tahun 2013.

Tahun 2013 Penulis terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA melalui Jalur SNMPTN. Selama menjadi Mahasiswa penulis aktif organisasi pada periode 2014/2015 sebagai anggota kaderisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA), sebagai anggota Biro Khusus Bimbingan Baca Qur'an (BK-BBQ) Unit Kegiatan Mahasiswa Rohani Islam (ROIS), dan staff Departemen Komunikasi dan Informasi Badan Eksekutif Mahasiswa Fakultas Matematika dan Ilmu Pegetahuan Alam (BEM FMIPA) Unila. Pada periode 2015/2016 menjabat sebagai Kepala Departemen Kesejahteraan Mahasiswa BEM FMIPA Unila. Sedangkan untuk periode 2016/2017 menjabat sebagai Anggota Komisi III Dewan Perwakilan Mahasiswa Universitas Keluarga Besar Mahasiswa Universitas Lampung (DPM U KBM Unila). Pada tanggal 18 Januari – 14

Februari 2016 penulis melakukan kerja Praktek di Badan Pusat Statistik (BPS) Kabupaten Lampung Timur, dan pada tanggal 25 Juli – 25 Agustus 2016 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Tempuran, Kecamatan Trimurjo, Kabupaten Lampung Tengah.

PERSEMBAHAN

Dengan Mengucap Alhamdulillah, Puji Syukur Kehadirat Allah SWT

Kupersembahkan skripsi ini kepada :

Kedua Orang Tua Tercinta

Ayahanda Mutris dan Ibunda Dadiarti

Orang yang telah merawat, membesarkan, dan mendidik saya hingga saat ini, yang senantiasa memberikan dukungan moril dan materil selama menempuh pendidikan hingga saat ini. Terima kasih atas segala do’a dan harapan besar kepada saya, atas segala cinta dan kasih sayang yang tulus ikhlas, menjadi teladan dan pembimbing yang baik dalam setiap langkah ini.

Uny Anissa Aulia Rahmi dan Adik -Adik Abdul Rofi dan Rida Nadila Fitriya.

Kakak dan adik kandung yang selalu memberikan motivasi dari canda tawa, dan tingkah laku kalian. Terima kasih telah membuat saya menjadi kuat dan semangat dalam menjalani hari-hari.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

MOTTO

Sabar memiliki dua sisi, sisi yang satu adalah sabar, sisi yang lain adalah bersyukur kepada Allah

(Ibnu Mas'ud)

Raihlah ilmu, dan untuk meraih ilmu belajarlah untuk tenang dan sabar

(Khalifah Umar)

Tujuan adalah hasil dari usaha dan perbuatan yang baik

(A.L)

SANWACANA

Alhamdulillah, Segala puji dan syukur penulis curahkan kehadirat Allah SWT karena atas rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyusun dan menyelesaikan Skripsi ini.Skripsi dengan judul “Pendugaan Parameter Distribusi *Erlang-1* Menggunakan Metode *Probability Weighted Moment, Method of Moment,* dan *Maximum Likelihood Estimation*” adalah salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana Sains di Universitas Lampung.

Dalam proses penyusunan Skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu dalam memberikan bimbingan, motivasi, serta saran yang tentunya bermanfaat sehingga skripsi ini dapat terselesaikan oleh penulis. Oleh Karena itu, itu penulis mengucapkan rasa terima kasih kepada :

1. Bapak Ir. Warsono, M.S., Ph.D. selaku dosen pembimbing utama yang telah meluangkan waktu untuk membimbing, mengarahkan, dan memotivasi penulis hingga skripsi ini dapat terselesaiakan .
2. Dra.Wamiliana, MA, Ph.D. selaku pembimbing pembantu sekaligus Ketua Jurusan Matematika FMIPA Univeristas Lampng yang memberikan bantuan, saran, serta motivasi dalam penyelesaian skripsi ini.

3. Bapak Drs. Mustofa Usman, MA, Ph.D., selaku dosen penguji atas kritik dan saran yang diberikan untuk skripsi ini.
4. Bapak Prof. Warsito, S.Si.,D.E.A., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung .
5. Ayah danIbu tercinta yang senantiasa memberikan dukungan dan do’a terbaik dalam menyelesaikan skripsi ini
6. Uny Anis, Rofi, dan Dila yang memberikan Semangat tersendiri bagi penulis.
7. Sahabat seperjuangan Ksatria Baja Hitam (Suyitno, Arief, Ijal, Ansori, Pranoto, Rosyad, Agum, Aiman, Dimas, Hamid, Zainuri,Wahyudi), teman teman se bimbingan (Rini, Ega, Tara, Hanggita, Dafri), Sahabat SMA (Alim,Ijal, Iting, Ari, Via, Imas, Ema, Ati dkk), teman teman KKN Pance Squad, Bang Gerry, Bang Yefta, terkhusus teman teman matematika angkatan 2013 dan seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu, atas dukungannya dalam menyusun skripsi ini.

Penulis menyadari laporan ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu, penulis harapkan saran dan kritik yang membangun untuk perbaikan skripsi ini. Semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca.

Bandar Lampung, 13 November 2017

Penulis

Afif Lutfi

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada umumnya ilmu statistika dibagi menjadi dua kategori yaitu statistika deskriptif dan statistika inferensia. Statistika deskriptif adalah metode mengatur, merangkum, dan mempresentasikan data dengan cara informatif, sedangkan statistika inferensia adalah metode yang digunakan untuk mengestimasi sifat populasi berdasarkan pada sampel. Hal utama berkenaan dengan statistika inferensia yaitu untuk menemukan informasi mengenai populasi dari sampel yang diambil dari populasi tersebut atau dengan kata lain statistika inferensia adalah menemukan penduga yang baik. Suatu penduga yang baik harus memenuhi beberapa sifat penduga yang diinginkan suatu peluang, yaitu takbias, varian minimum, konsisten, serta statistik cukup dan kelengkapan.

Selanjutnya dalam menentukan penduga yang baik untuk parameter dari suatu populasi tersebut, terdapat beberapa metode pendugaan yang dapat digunakan diantaranya *Method of Moment*, metode *Maximum Likelihood* (ML), metode *Generalized Moment* (GM), metode *Probability Weighted Moment* (PWM) dan lain-lain.

Dari beberapa metode tersebut, *Method of Moment* (MM) dan *Maximum Likelihood* (ML) adalah metode yang paling sering digunakan. *Probability*

Weighted Moment (PWM) (Hoskinget.al.,1985) telah cukup dikenal secara luas sebagai salah satu alternatif metode pendugaan dari metode ML maupun metode MM yang telah cukup umum dikenal.

Dalam penerapannya metode – metode pendugaan tersebut digunakan untuk menduga parameter dari suatu distribusi peluang. Distribusi peluang berguna untuk menganalisis terjadinya suatu peristiwa, kejadian yang bersifat berhingga objek sebarannya berbeda dengan kejadian yang tak berhingga. Distribusi peluang terbagi menjadi dua bagian yaitu distribusi peluang diskrit dan distribusi peluang kontinu. Salah satu distribusi kontinu ialah distribusi Erlang. Distribusi Erlang adalah distribusi peluang kontinu yang merupakan salah satu kasus khusus dari distribusi Gamma dengan parameter $\theta > 0$ dan $r > 0$. Sehingga, dapat dikatakan distribusi Erlang adalah distribusi keluarga eksponensial dengan parameter θ. Berdasarkan hal – hal tersebut penulis tertarik untuk menerapkan serta melihat hasil dugaan parameter untuk beberapa ukuran sampel dari metode –metode pendugaan tersebut yaitu *Probability Weighted Moment* (PWM), *Method of Moment (MM), dan Maximum Likelihood Estimation (MLE)* dalam menduga parameter dari distribusi Erlang (θ, r = 1).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, hal yang menjadi permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimana prosedur dan hasil dari pendugaan parameter distibusi Erlang -1 menggunakan metode *Probability Weighted Moment* (PWM), *Method of Moment*, dan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) untuk beberapa ukuran sampel.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan penduga (θ,r) dari distribusi Erlang-1 dengan metode *Probability Weighted Moment* (PWM), *Method of Moment*, dan *Maximum Likelihood Estimation (MLE).*
2. Memeriksa karakteristik penduga yaitu ketakbiasan penduga parameter (θ,r), ragam penduga dan selang kepercayaan dari distribusi Erlang-1.
3. Memeriksa efek dari beberapa sampel dengan menggunakan program R.

1.4 Manfaat Penelitian

Pada penelitian ‘karakteristik penduga parameter distibusi Erlang-1 menggunakan metode *Probability Weighted Moment* (PWM) *Method of Moment, dan Maximum Likelihood Estimation* (MLE) bermanfaat untuk memberikan informasi tentang efek beberapa sampel terhadap pendugaan suatu parameter terhadap ragam, selang kepercayaan, dan bias dengan menggunakan metode *Probability Weighted Moment* (PWM), *Method of Moment, dan Maximum Likelihood Estimation (MLE)* pada distribusi Erlang- 1 (θ, r = 1).

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Erlang

Distribusi Erlang adalah distribusi kontinu yang merupakan distribusi khusus dari distribusi Gamma. Berkenaan dengan distribusi Erlang akan didiskusikan berikut ini.

Definisi 2.1

Variabel random X dikatakan berdistribusi Erlang dengan parameter skala $\theta > 0$ dan parameter bentuk r yaitu$X$ ~ ERL (θ, r). Fungsi densitas probabilitasnya dituliskan dengan simbol f(x) maka:

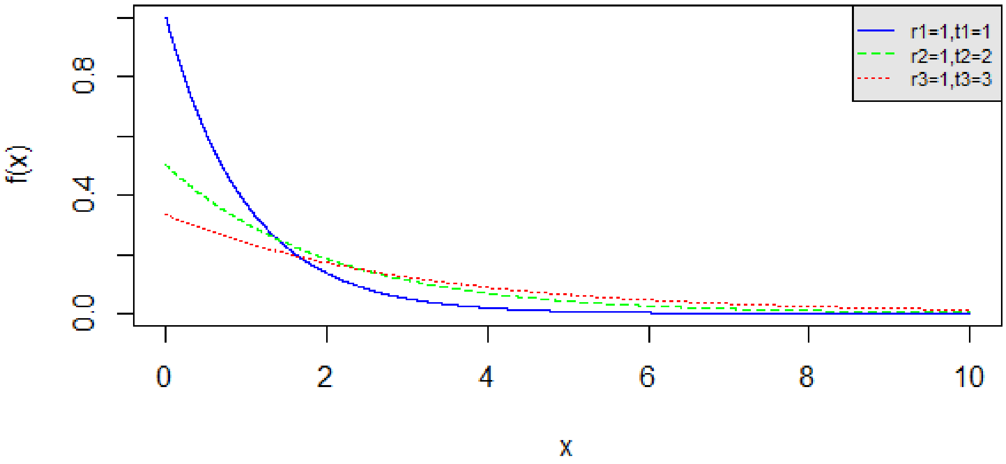
$$f(x) = \frac{1}{\theta^{r}(r-1)!}x^{r-1}e^{-\frac{x}{\theta}} \tag{2.1}$$

dengan r adalah bilangan bulat positif.

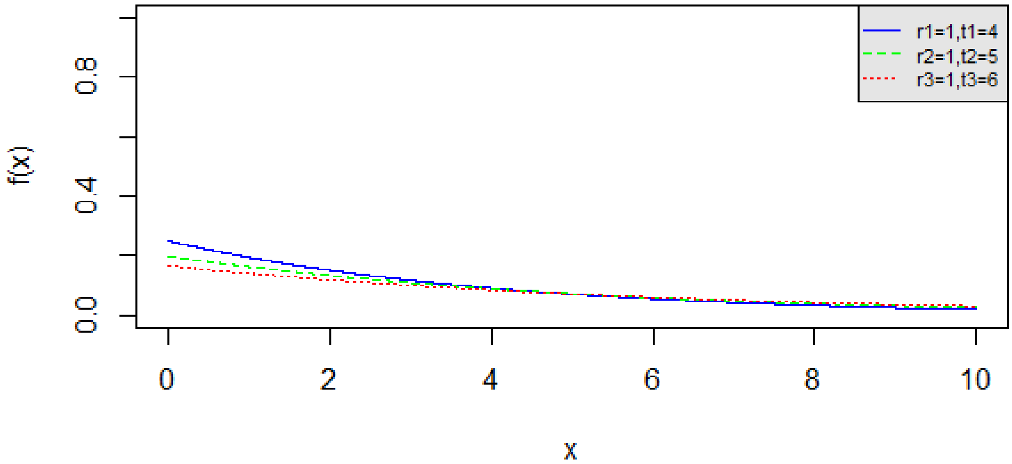
Adapun fungsi distribusi kumulatif probabilitas dari variabel random kontinu X dengan X ~ ERL (θ,r) adalah

$$F(t) = \int_0^x \frac{t^{r-1}e^{-\frac{t}{\theta}}}{\theta^{r}(r-1)}dt \tag{2.2}$$

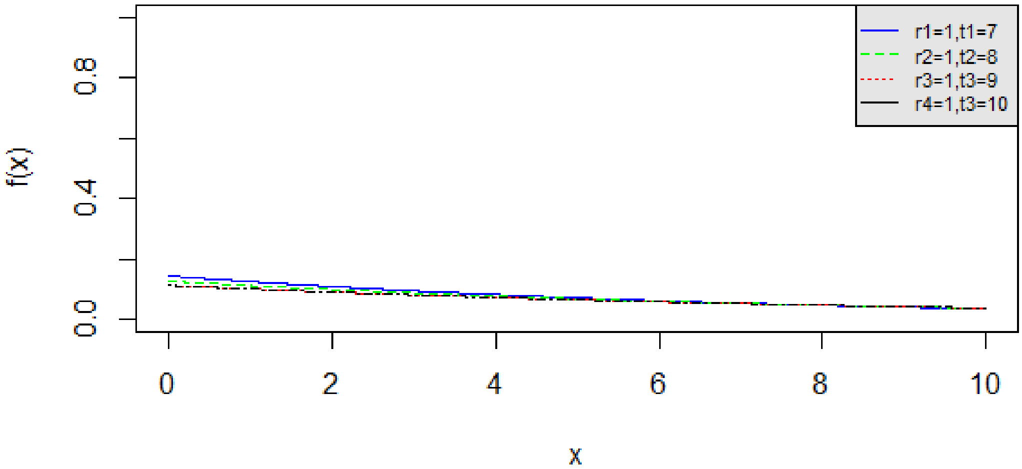
(Montgomery dan Runger, 2003)



Gambar 2.1 Grafik fungsi kepekatan distribusi Erlang $\theta = 1, 2,$ dan 3



Gambar 2.2 Grafik fungsi kepekatan distribusi Erlang $\theta = 4, 5,$ dan 6



Gambar 2.2 Grafik fungsi kepekatan distribusi Erlang $\theta = 7, 8{,}9$ dan 10

2.1.1 Nilai Harapan dari distribusi Erlang

Nilai harapan dari distribusi Erlang (θ,r) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$E[X] = \int_0^\infty x \, \frac{1}{\theta^{\,r}(r-1)!} x^{r-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

Misalkan $u = \frac{1}{\theta} x,$ maka $du = \frac{1}{\theta} dx$

Untuk $x = 0 \; maka \; u = 0,$ dan untuk $x = \infty \; maka \; u = \infty$

$$= \int_0^\infty (u\theta) \frac{1}{\theta^{\,r}(r-1)!} (u\theta)^{r-1} e^{-u} \theta \, du$$

$$= \int_0^\infty \frac{\theta^{\,1+r-1+1}}{\theta^{\,r}(r-1)!} (u)^{1+r-1} e^{-u} du$$

$$= \frac{\theta}{(r-1)!} \int_0^\infty u^{(r+1)-1} e^{-u} du$$

$$= \frac{\theta}{(r-1)!} \Gamma(r+1)$$

$$= r\,\theta$$

Jadi nilai harapan untuk variabel random kontinu X ~ ERL (θ,r) adalah

$$E[X] = r\,\theta \tag{2.3}$$

2.1.2 Ragam dari Distribusi Erlang

Ragam dari distribusi Erlang (θ,r) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\theta^{\,r}(r-1)!} x^{r-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

Misalkan $u = \frac{1}{\theta}x$, maka $du = \frac{1}{\theta}dx$

Untuk $x = 0$ $maka$ $u = 0$, dan untuk $x = \infty$ $maka$ $u = \infty$

$$= \int_0^\infty (u\theta)^2 \frac{1}{\theta^{\,r}(r-1)!} (u\theta)^{r-1} e^{-u}\theta\, du$$

$$= \int_0^\infty \frac{\theta^{\,2+r-1+1}}{\theta^{\,r}(r-1)!} (u)^{2+r-1} e^{-u} du$$

$$= \frac{\theta^2}{(r-1)!} \int_0^\infty u^{(r+2)-1} e^{-u} du$$

$$= \frac{\theta^2}{(r-1)!} \Gamma(r+2)$$

$$= r^2\theta^2 + \mathrm{r}\theta^2$$

Karena $Var(X) = E\,(X^2) - [E(X)]^2$, maka

$$Var(X) = r^2\theta^2 + \mathrm{r}\theta^2 - r^2\theta^2$$

$$Var(X) = \mathrm{r}\theta^2 \tag{2.4}$$

2.2 Karakteristik Suatu Penduga

Untuk mendapatkan penduga parameter dari suatu distribusi yang baik maka terdapat sifat - sifat suatu penduga yang baik yang harus dipenuhi. Beberapa hal berkenaan dengan pendugaan parameter akan diuraikan berikut ini.

Definisi 2.2

Misalkan suatu peubah acak X memiliki fungsi kepekatan peluang yang bergantung pada parameter tak diketahui θ dengan sebarang nilai dalam suatu himpunan ruang parameter Ω, maka dinotasikan dengan

$$f(x:\theta) \qquad \theta \epsilon \Omega$$

Definisi 2.3

Suatu statistikT = $(X_{1,} X_{2,} \dots, X_n)$ yang digunakan untuk menduga nilai $\tau(\theta)$ disebut sebagai penduga $\tau(\theta)$, dan diamati nilai dari statistik t = $(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n)$ disebut sebagai dugaan $\tau(\theta)$.

(Bain dan Engelhardt, 1992)

2.2.1 Penduga Tak Bias

Sifat ketakbiasan penduga parameter dari suatu distribusi apabila memenuhi Definisi 2.4 berikut ini:

Definisi 2.4 (Penduga Tak bias)

Seandainya $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ merupakan sampel acak dari fungsi kepekatan peluang kontinu $f_y(y;\theta)$, dimana θ merupakan parameter yang tidak diketahui.

Penduga $\hat{\theta} = [h(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)]$ dikatakan tak bias bagi θ, jika:

$$\mathrm{E}(\hat{\theta}) = \theta \text{ (semua } \theta)$$

(Larsen dan Marx, 2012).

2.3 Metode Estimasi Parameter

Keakuratan penduga parameter tergantung pada ukuran sampel dan metode yang digunakan untuk penduga parameter. Statistik yang dihitung dari sampel yang digunakan untuk menduga parameter populasi disebut penduga. Suatu penduga yang baik mempunyai sifat sifat: tak bias, konsisten dan efisien. Statistik yang digunakan untuk menduga parameter populasi θ disebut suatu penduga titik untuk θ, dinotasikan dengan $\hat{\theta}$. (Walpole, 1995).

2.3.1. Metode *Probability Weighted Moment* (PWM)

Diawali dari beberapa kelemahan dan kelebihan dari setiap metode pendugaan yang telah ada, maka penggunaan metode PWM dapat dijadikan alternatif lain dalam menduga parameter dari suatu distribusi peluang. Metode PWM merupakan modifikasi dari metode “konvensional” momen dan pertama kali dikemukakan oleh Hosking et al., (1985). Fungsi PWM dari variabel random X dengan *Cumulative Density Function* (CDF) , F(x) diDefinisikan sebagai berikut:

$$M_{r,s,t} = E[(X(F))^r \left(F(x)\right)^s \left(1 - F(x)\right)^t] \qquad (2.5)$$

Dalam hal ini r, s dan t merupakan bilangan real. Bila s = t = 0 dan r merupakan bilangan bulat yang tidak negatif maka akan menjadi $M_{r,0,0}$ merupakan momen peluang konvensional yang selama ini dikenal.

Adapun *subclass* dari fungsi PWM di atas dengan X(F) adalah invers dari fungsi distribusi kumulatif maka fungsi PWM adalah

$M_{1,s,t}$ $(r = 1, s = 0,1,2, \ldots, t = 0,1,2, \ldots)$. Sementara $M_{1,s,t}$ dapat dibagi menjadi dua bagian, yaitu s = 0 ($M_{1,0,t}$) dan t = 0 ($M_{1,s,0}$), sehingga fungsi tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$M_{1,0,t} = E[(X(F)\big(1 - F(x)\big)^t]$ dimana $M_{1,0,t} = \int_0^1 [(X(F)\big(1 - F(x)\big)^t]\, dt$ dan

$M_{1,s,0} = E[(X(F)\big(F(x)\big)^s]$ dimana $M_{1,s,0} = \int_0^1 [(X(F)\big(F(x)\big)^s]\, dt$

Selain itu fungsi PWM juga dapat ditulis secara khusus yakni

$M_{r,s,t} = B(s + 1, t + 1)E[(X^r_{(s+1),(s+t+1)}]$, dengan r,s, t adalah bilangan real dan B adalah fungsi beta. Dalam hal ini $M_{r,s,t}$ merupakan momen ke – r dari statistik tataan ke (t+1) untuk sampel berukuran (s+t+1).

Sehingga, jika r= 1, s = 0 dan t = 1 maka

$$M_{1,0,t} = B(1, t + 1)E[(X_{(1),(t+1)}]$$

$$= \frac{\Gamma(1)\Gamma(\mathrm{t} + 1)}{\Gamma(\mathrm{t} + 2)} E[(X_{(1),(t+1)}]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{t} + 1} E[(X_{(1),(t+1)}]$$

$$= \int_0^1 X(F)[1 - F(x)]^t \, dF \qquad (2.6)$$

Dengan menyelesaikan M_t akan didapat penduga bagi parameter yang masih dinyatakan dalam bentuk M_t. Adapun penduga tak bias bagi M_t diperoleh berdasarkan sampel tataan $x_{(1)} < x_{(2)} < \cdots < x_{(n)}$ dari sampel berukuran n, dan t biangan positif dengan menyelesaikan persamaan

$$\widehat{M}_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-t}\frac{\binom{n-i}{t}}{\binom{n-1}{t}}x_{(i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-t}\frac{(n-i)\dots(n-i-t+1)}{(n-1)\dots(n-t)}x_{(i)} \quad (2.7)$$

Selanjutnya dengan mengganti M_t dengan $\widehat{M}_t$akan didapat penduga parameter dari setiap parameter distribusi.

2.3.2 Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)

Definisi 2.5

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel acak berukuran n yang saling bebas stokastik indentik dari suatu distribusi yang mempunyai fungsi kepekatan peluang $f(x;\theta), \theta \in \Omega$. Fungsi kepekatan peluang bersama dari $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah $f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\dots f(x_n;\theta)$ yang merupakan fungsi kemungkinan (*likelihood function*). Untuk $x_1, x_2, \dots, x_n$ tetap, fungsi kemungkinan merupakan fungsi dari θ dan dilambangkan dengan $L(\theta)$ dan dinotasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(\tilde{x};\theta) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n;\theta) \\ &= f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\dots f(x_n;\theta), \quad \theta \in \Omega \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \quad (2.8) \end{aligned}$$

Definisi 2.6

$L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n;\theta), \theta \in \Omega$ merupakan fungsi kepekatan peluang dari $x_1, x_2, \dots, x_n$. Untuk hasil pengamatan $x_1, x_2, \dots, x_n$, nilai $\hat{\theta}$ berada dalam Ω ($\hat{\theta} \in \Omega$), dimana $L(\theta)$ maksimum yang disebut sebagai *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dari θ. Jadi, θ merupakan penduga bagi θ. Jika $f(x_1, x_2, \dots, x_n;\theta) = \max f(x_1, x_2, \dots, x_n;\theta)$, $\theta \in \Omega$, maka untuk memaksimumkan

$L\,(\theta)$ dapat diperoleh dengan mencari turunan dari $L\,(\theta)$ terhadap parameternya. Biasanya mencari turunan $L\,(\theta)$ terhadap parameternya relatif sulit, sehingga dalam penyelesaiannya dapat diatasi dengan menggunakan logaritma atau fungsi ln dari $L\,(\theta)$ yaitu:

$$\ln L\,(\theta) = \sum_{i=n}^{n} \ln f(x_i;\theta) \tag{2.9}$$

Karena fungsi ln merupakan fungsi monoton naik, maka dimaksimumkan $\ln L\,(\theta)$ setara dengan memaksimumkan $L\,(\theta)$. Untuk memaksimumkan $\ln L\,(\theta)$ adalah dengan mencari turunan dari $\ln L\,(\theta)$ terhadap parameternya, dimana hasil turunannya disamadenganakan nol.

$$\frac{\partial \ln L\,(\theta)}{\partial \theta} = 0 \tag{2.10}$$

(Hogg dan Craig, 1995).

2.3.3 Metode Momen

Definisi 2.7

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ merupakan populasi yang memiliki fungsi kepekatan peluang $f(x_1|\,\theta_1, \dots, \theta_k)$. Metode pendugaan dengan moment dilakukan dengan cara menyamakan k momen pertama sampel dengan k momen pertama yang berkaitan dari populasi dan menyelesaikan sistem tersebut secara bersama.

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^1, & \mu'_1 &= EX^1 \\ m_2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, & \mu'_2 &= EX^2 \\ &\vdots & &\vdots \\ m_k &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, & \mu'_k &= EX^k \end{aligned}$$

Moment populasi μ'_j sering ditulis sebagai fungsi dari $(\theta_1, \dots, \theta_k)$, yaitu $\mu'_j(\theta_1, \dots, \theta_k)$. Metode momen penduga $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$dari $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ di dapat dengan menyelesaikan sistem persamaan untuk $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ dalam notasi $(m_1, \dots, m_k)$ sebagai berikut:

$$
\begin{gathered}
m_1 = \mu_1(\theta_1, \dots, \theta_k), \\
m_2 = \mu_2(\theta_1, \dots, \theta_k), \\
\vdots \\
m_3 = \mu_3(\theta_1, \dots, \theta_k)
\end{gathered}
$$

(Casella dan Berger, 1990)

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun akademik 2016/2017, bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk menduga serta memeriksa efek beberapa sampel terhadap dugaan parameter distribusi Erlang-1 menggunakan metode *Probability Weighted Moment, Method of Moment,* dan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dengan memenuhi beberapa syarat sifat-sifat penduga yang baik.

Adapun langkah langkah yang dilakukan dalam penelitian ini untuk mendapatkan pendugaan yang baik dengan menggunakan metode *Probability Weighted Moment*, *Method of Moment,* dan *Maximum Likelihood Estimation* adalah sebagai berikut:

1. Pendugaan parameter dengan Metode *Probability Weighted Moment (*PWM*)*
   - Mencari fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Erlang-1.
   - Mencari invers dari distribusi Erlang-1.
   - Mencari penduga parameter (θ, r = 1) dari distribusi Erlang-1 dengan menggunakan metode PWM dan simulasi menggunakan software R versi 3.2.2.
   - Memeriksa ketakbiasan dari penduga parameter (θ, r = 1) dari distribusi Erlang.

2. Pendugaan parameter dengan *Method of Moment*
   - Mencari penduga parameter (θ, r = 1) dari distribusi Erlang-1 dengan menggunakan metode MLE dan simulasi menggunakan software R versi 3.2.2.

3. Pendugaan parameter dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)
   - Mendefinisikan Fungsi Likelihood L(θ) dari distribusi Erlang-1.
   - Menggunakan Logaritma Natural ln [L(θ)].
   - Mendifferensialkan terhadap θ dan samakan dengan nol.
   - Mencari penduga parameter (θ, r = 1) dari distribusi Erlang-1 dengan menggunakan metode MLE dan simulasi menggunakan software R versi 3.2.2
4. Memeriksa ketakbiasan hasil dugaan parameter dengan metode PWM, MM, dan MLE dari distribusi Erlang -1.

5. Memeriksa bias, ragam dan selang kepercayaan dugaan parameter dari hasil simulasi menggunakan software R versi 3.2.2.

V. KESIMPULAN

Kesimpulan yang dipeoleh adalah sebagai berikut:

1. Hasil Dugaan Parameter Erlang-1 untuk metode PWM adalah

$$\hat{\theta} = M_0/2\ \mathrm{I}\Gamma(2)$$

2. Hasil Dugaan Parameter Erlang-1 untuk MM adalah

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_n$$

3. Hasil Dugaan Parameter Erlang-1 untuk metode MLE adalah

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_n$$

4. Pada Metode PWM untuk ukuran data yang semakin besar maka selang kepercayaan penduga $\hat{\theta}$ akan semakin sempit, serta bias dan ragam penduga $\hat{\theta}$ akan semakin kecil.
5. Pada Metode MM untuk ukuran data yang semakin besar maka selang kepercayaan penduga $\hat{\theta}$ akan semakin sempit, serta bias dan ragam penduga $\hat{\theta}$ akan semakin kecil.

6. Pada Metode MLE untuk ukuran data yang semakin besar maka selang kepercayaan penduga $\hat{\theta}$ akan semakin sempit, serta bias dan ragam penduga $\hat{\theta}$ akan semakin kecil.

DAFTAR PUSTAKA

Abramowitz, M. and Stegun, LA. 1972. *Handbook of Mathematical Function With Formula, Graph, and Mathematical Table.* Departement of Comerce United State of America. Washington, D.C.

Bain,I.J. and Engelhardt, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics.* Brooks / Cole. Duxbury.

Casella, George dan Berger, L. Roger. 2002. *Statistical Inference.* Odsworth and Brooks/Cole. Duxbury.

Hogg, R.V.and Craig, A.T. 1995.*Introduction to Mathematical Statistics*. Fifth Edition. Prenticehall International Inc. New Jersey.

Hosking, J.R.M., Wood, E.F.and Wallis, J.R.1985. *Estimation of the Generalized Extreme Value Distribution by the method of Probability Weighted Moments*. Technometrics

Larsen, R. J. andMarx, M.L. 2012. *An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications*, Fifth Edition. Pearson Education Inc. United States of America.

Montgomery, C. Douglas & Runger, C. George. 2003. *Applied Statistics andProbability for Engineers*. USA: John Wiley & Son, Inc.

Walpole, R.E. and Raymond, H.M. 1995.*Ilmu Peluang Dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuawan*, edisi ke-4, Penerbit ITB, Bandung.