METODE ANALISIS HOMOTOPI PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL LINEAR TAK HOMOGEN ORDE SATU

(Skripsi)

Oleh

ATIKA FARADILLA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

ABSTRAK

METODE ANALISIS HOMOTOPI PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL LINEAR TAK HOMOGEN ORDE SATU

Oleh

ATIKA FARADILLA

Pada tahun 1992, Liao mengusulkan sebuah metode analisis untuk memecahkan masalah – masalah persamaan maupun sistem persamaan, yaitu metode analisis homotopi. Metode analisis homotopi ini digunakan untuk memecahkan masalah dengan langkah yang sesuai dan memudahkan penentuan konvergensi deret. Dalam beberapa tahun belakangan ini, metode ini telah berhasil dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan berbagai persamaan linear maupun tak línear dan yang homogen maupun non homogen. Dengan menerapkan metode analisis homotopi ke dalam sistem persamaan diferensial parsial linear non homogen $u_t - v_x - (u-v) = -2$, $v_t + u_x - (u-v) = -2$ dengan syarat awal $u(x,0) = 1 + e^x$ dan $v(x,0) = -1 + e^x$, didapatkan solusi homotopi yang konvergen ke solusi $u(x,t) = 1 + e^{x+t}$ dan $v(x,t) = -1 + e^{x-t}$ apabila nilai $h = -1$.

Kata kunci: metode analisis homotopi, persamaan linear non homogen, sistem persamaan diferensial parsial

ABSTRACT

HOMOTOPY ANALYSIS METHOD IN THE FIRST ORDER NON HOMOGENEOUS LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL SYSTEM

By

ATIKA FARADILLA

In 1992, Liao suggested an analytical method to solve many types of equations or systems of equations, called homotopy analysis method. This method is used to solve problems and makes it easier to determine the convergence of the series solution. In recent years, this method has been successful on solving linear or nonlinear, and homogeneous or non homogeneous equations. By applying homotopy analysis method into non homogeneous linear partial differential system $u_t - v_x - (u - v) = -2$, $v_t + u_x - (u - v) = -2$ with the initial conditions $u(x,0) = 1 + e^x$ and $v(x,0) = -1 + e^x$, obtained homotopy solutions which converge to the solutions $u(x,t) = 1 + e^{x+t}$ and $v(x,t) = -1 + e^{x-t}$ if the value of $h = -1$.

Keywords: homotopy analysis method, non homogeneous linear equation, partial differential system

METODE ANALISIS HOMOTOPI PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL LINEAR TAK HOMOGEN ORDE SATU

(Skripsi)

Oleh

Atika Faradilla

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Skripsi : **METODE ANALISIS HOMOTOPI PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL LINEAR TAK HOMOGEN ORDE SATU**

Nama Mahasiswa : *Atika Faradilla*

NPM : 1417031026

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Drs. Suharsono S.,M.S.,M.Sc.,Ph.D.	**Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**
NIP. 19620513 198603 1 003	NIP. 19760411 200012 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dra. Wamiliana, M.A., Ph. D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.**	....
Sekretaris	: **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS LAMPUNG
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 1995121 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **27 November 2017**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : **Atika Faradilla**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1417031026**

Judul : **METODE ANALISIS HOMOTOPI PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL LINEAR TAK HOMOGEN ORDE SATU**

Jurusan : **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 12 Desember 2017

METERAI TEMPEL
6000
ENAM RIBU RUPIAH

ATIKA FARADILLA
NPM. 1417031026

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Atika Faradilla, anak pertama dari dua bersaudara yang dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 17 Maret 1997 oleh pasangan Bapak Hendry dan Ibu Sri Murnitasari.

Menempuh pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Fransiskus 2 Rawalaut pada tahun 2000 - 2002, Sekolah Dasar (SD) di SD Fransiskus 2 Rawalaut pada tahun 2002 - 2008, kemudian bersekolah di SMP Xaverius 2 Bandar Lampung pada tahun 2008 - 2011, dan bersekolah di SMA Tunas Mekar Indonesia pada tahun 2011 - 2014.

Pada tahun 2014 penulis terdaftar sebagai mahasiswi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui Jalur SBMPTN tes tertulis.

Pada tahun 2017 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Nambah Rejo Kecamatan Kota Gajah, Kabupaten Lampung Tengah, Provinsi Lampung dan pada tahun yang sama penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di Kantor Perwakilan Wilayah Bank Indonesia Provinsi Lampung.

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap puji dan syukur kehadirat Allah SWT kupersembahkan karya kecil dan sederhana ini untuk :

Ayah dan Ibu tercinta yang selalu mendoakan, memberi kasih sayang, dan telah memotivasi penulis agar bisa menjadi seseorang yang bisa dibanggakan.

Adik tercinta, Ardian Fauzan yang selalu berbagi canda dan tawa, serta senantiasa menjadi penyemangat terbaik.

Dosen Pembimbing dan Penguji yang sangat berjasa dan selalu memberikan motivasi dan semangat kepada penulis.

Sahabat-sahabat tersayang. Terimakasih atas kebersamaan, keceriaan, canda dan tawa serta doa dan semangat yang telah diberikan.

Almamater Universitas Lampung.

KATA INSPIRASI

"Niscaya Allah akan mengangkat (derajat) orang-orang yang beriman diantaramu dan orang-orang yang diberi ilmu beberapa derajat."

(Q.S. Al-Mujadilah : 11)

"Ketidaktahuan adalah kutukan Tuhan sedangkan pengetahuan merupakan sayap yang akan membawamu terbang menuju surga."

(William Shakespeare)

"Agama tanpa ilmu adalah buta. Ilmu tanpa agama adalah lumpuh.."

(Albert Einstein)

SANWACANA

Puji syukur penulis panjatkan atas kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah – Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Metode Analisis Homotopi pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Linear Tak Homogen Orde Satu”. Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari dukungan dan kerjasama berbagai pihak yang telah memberikan bimbingan, kritik, dan saran yang bermanfaat bagi penulis. Oleh sebeb itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I yang telah dengan sabar membimbing, menyemangati, dan memotivasi penulis.
2. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, kritik, dan saran yang membangun.
3. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si. selaku Dosen Pembahas atas kesediaannya dalam menguji, dan dengan sabar memberikan kritik dan saran.
4. Bapak Drs. Rudi Ruswandi, M.Si. selaku Pembimbing Akademik atas bimbingan dan pembelajarannya dalam menjalani perkuliahan.
5. Ibu Dra. Wamiliana, M.A., Ph. D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., DEA., Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
8. Kedua orangtua penulis, Adik Acai, dan Ko Engki yang tak henti – hentinya mendo'akan yang terbaik, memberikan kasih sayang, sehingga memotivasi penulis untuk selalu memberikan yang terbaik.
9. Yeti Rahmawati, Syifa Rohmadhona, Annisa Hevita, Tri Wulandari, Fauzia Anissatul Farida, Shelvi Rukmana, Abdul Kodir, Kiki Alendra, Camelia Hana Fitri, dan seluruh rekan – rekan matematika angkatan 2014 atas canda dan tawa yang telah membuat hidup penulis lebih berwarna.
10. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khusunya dan bagi pembaca pada umumnya. Terimakasih.

Bandar Lampung, ... Desember 2017

Penulis

<u>Atika Faradilla</u>
NPM. 1417031026

DAFTAR ISI

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

V. KESIMPULAN DAN SARAN

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam bidang ilmu matematika, sering kali ditemukan berbagai macam permasalahan. Contohnya adalah permasalahan yang dimodelkan ke dalam persamaan diferensial, baik persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial parsial dijumpai dalam kaitan dengan berbagai masalah fisik dan geometris bila fungsi yang terlibat tergantung pada dua atau lebih peubah bebas. Tidak berlebihan jika dikatakan bahwa hanya sistem fisik yang paling sederhana yang dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial biasa, sedangkan masalah-masalah yang lebih rumit, seperti topik-topik dalam fisika lanjut, harus dimodelkan dengan persamaan diferensial parsial.

Kenyataannya, persamaan – persamaan tersebut sulit untuk diselesaikan dengan menggunakan persamaan diferensial parsial analitik biasa. Sehingga dikembangkan berbagai metode yang dapat menyelesaikan persamaan diferensial parsial ini, seperti metode pemisahan variabel, metode transformasi Laplace, metode transformasi Fourier, metode beda hingga, metode garis, dan sebagainya.

Pada tahun 1992, Liao mengusulkan sebuah metode dalam disertasi PhD-nya, bernama metode analisis homotopi atau HAM. Metode ini kemudian dimodifikasi lebih lanjut pada tahun 1997 untuk memperkenalkan parameter yang membangun homotopi pada sistem diferensial dalam bentuk umum. Dalam beberapa tahun belakangan ini, metode ini dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan berbagai sistem persamaan linear maupun tak linear dan yang homogen maupun tak homogen.

Metode analisis homotopi ini digunakan untuk menyelesaikan masalah dengan menggunakan penentuan konvergensi deret. Metode analisis homotopi tidak bergantung pada besar kecilnya parameter. Kenyataannya adalah metode homotopi lebih mudah digunakan dalam menyelesaikan masalah yang sulit. Berdasarkan hal-hal tersebut, maka penulis mencoba menerapkan metode analisis homotopi pada sistem persamaan diferensial linear tak homogen.

Misalkan diberikan suatu persamaan linear tak homogen

$$u_t - v_x - (u - v) = -2 \tag{1.1}$$

dan

$$v_t - u_x - (u - v) = -2 \tag{1.2}$$

dengan kondisi awal

$$u(x, 0) = 1 + e^x \quad \text{dan} \quad v(x, 0) = -1 + e^x \tag{1.3}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (1.1) – (1.3) akan digunakan metode analisis homotopi dengan operator linear sebagai berikut.

$$L[\phi_i(x,t;q)] = \frac{\partial\phi(x,t;q)}{\partial t}$$

Karya tulis ini ditulis berdasarkan jurnal internasional pada tahun 2007 karya A. Sami Bataineh, M.S.M. Noorani, dan I. Hashim yang berjudul *Approximate Analytical Solutions of Systems of PDEs by Homotopy Analysis Method.*

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menjelaskan tentang metode analisis homotopi.
2. Menerapkan metode analisis homotopi pada sistem persamaan diferensial parsial linear tak homogen $u_t - v_x - (u - v) = -2$, $v_t - u_x - (u - v) = -2$.
3. Menyelesaikan sistem persamaan diferensial parsial linear tak homogen $u_t - v_x - (u - v) = -2$, $v_t - u_x - (u - v) = -2$ hingga diperoleh solusinya.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menambah pengetahuan mengenai metode analisis homotopi.
2. Memahami cara menyelesaikan masalah persamaan diferensial parsial linear tak homogen dengan menggunakan metode analisis homotopi.
3. Alternatif untuk memecahkan masalah yang berkaitan dengan persamaan lainnya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan terhadap satu atau lebih dari variabel-variabel bebas. Berdasarkan jumlah variabel bebasnya persamaan differensial dibagi dalam dua kelas, yaitu persamaan differensial biasa (PDB) dan persamaan differensial parsial (PDP). Jika turunan fungsi itu hanya tergantung pada satu variabel bebas, maka disebut persamaan differensial biasa. Sedangkan, jika turunan fungsi itu tergantung pada lebih dari satu variabel bebas disebut persamaan differensial parsial (Bronson dan Costa, 2007).

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat lebih dari satu turunan parsial. Persamaan diferensial parsial ini merupakan persamaan yang menghubungkan fungsi yang memiliki lebih dari satu variabel turunan parsialnya. Persamaan diferensial muncul secara alami dalam sains fisika, model matematika, dan dalam matematika itu sendiri. Persamaan diferensial parsial digolongkan berdasarkan unsur yang sama, yaitu orde, linearitas dan kondisi batas. Orde dari persamaan diferensial parsial ditentukan oleh orde dari turunan tertinggi dari persamaan diferensial parsial tersebut.

Persamaan diferensial orde 1

$$\frac{\partial c}{\partial x} - a\frac{\partial c}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

Persamaan diferensial orde 2

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + Dc\frac{\partial c}{\partial y} = 0 \tag{2.2}$$

Persamaan diferensial orde 3

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.3}$$

Persamaan diferensial parsial berikut merupakan bentuk persamaan diferensial orde dua :

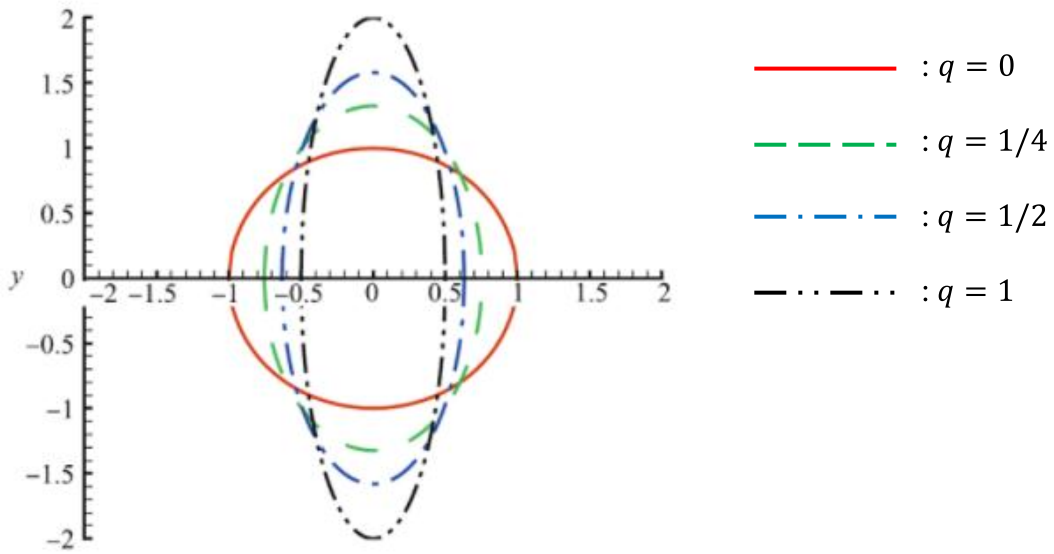
$$a(\cdot)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2b(\cdot)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(\cdot)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d(\cdot) = 0 \tag{2.4}$$

Selain itu, persamaan diferensial juga digolongkan menjadi persamaan linear, kuasilinear dan tak linear dengan penjelasan sebagai berikut :

1. Apabila koefisien pada persamaaan (2.4) adalah konstan atau fungsi hanya terdiri dari variabel bebas saja $[(\cdot) = (x, y)]$ maka persamaan itu disebut persamaan linear.
2. Apabila koefisien pada persamaaan (2.4) adalah fungsi dari variabel tak bebas dan/atau merupakan turunan dengan pangkat yang lebih rendah daripada diferensialnya $\left[(\cdot) = \left(x, y; u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$, maka persamaan itu disebut persamaan kuasilinear.
3. Apabila koefisien pada persamaaan (2.4) adalah fungsi dengan turunan sama dengan pangkatnya $\left[(\cdot) = \left(x, y; u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\right]$, maka persamaan itu disebut persamaan tak linear (Sasongko, 2010).

2.2 Deformasi

Deformasi adalah perubahan bentuk sebuah benda dari kondisi semula ke kondisi terkini. Makna dari "kondisi" dapat diartikan sebagai serangkaian posisi dari semua partikel yang ada di dalam benda tersebut. Sebagai contoh sebuah lingkaran dapat dideformasikan secara kontinu menjadi elips, dan bentuk dari cangkir kopi dapat dideformasikan secara kontinu menjadi bentuk donat.



Gambar 1. Deformasi kontinu dari solusi $y(x;q)$ dari persamaan (2.5)

Misalkan terdapat suatu persamaan

$$\varepsilon(q) : (1+3q)x^2 + \frac{y^2}{(1+3q)} = 1, \qquad q \in [0,1] \qquad (2.5)$$

dengan $q \in [0,1]$ adalah parameter homotopi.

Jika $q = 0$, maka akan didapat persamaan lingkaran

$$\varepsilon_0 : \; x^2 + y^2 = 1 \tag{2.6}$$

solusinya merupakan lingkaran $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Jika $q = 1$, maka didapat persamaan elips

$$\varepsilon_1 : \; 4x^2 + y^2/4 = 1 \tag{2.7}$$

solusinya merupakan elips $y = \pm\, 2\sqrt{1 - 4x^2}$.

Sehingga, seiring dengan bertambahnya parameter homotopi q dari 0 ke 1, persamaan (2.5) berubah secara kontinu dari persamaan lingkaran ε_0 menjadi persamaan elips ε_1, sementara solusinya y deformasi secara kontinu dari lingkaran $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ menjadi elips $y = \pm\, 2\sqrt{1 - 4x^2}$, seperti dapat dilihat pada Gambar 1. Maka, solusi y dari (2.5) tidak hanya bergantung kepada x tapi juga bergantung kepada $q \in [0,1]$, sehingga persamaan (2.5) dapat ditulis dengan lebih tepat sebagai

$$\varepsilon(q) : (1 + 3q)x^2 + \frac{y^2(x;q)}{(1+3q)} = 1, \qquad q \in [0,1] \tag{2.8}$$

yang mendefinisikan dua homotopi: pertama, homotopi dari persamaan

$$\varepsilon(q) : \; \varepsilon_0 \sim \varepsilon_1 \tag{2.9}$$

dimana ε_0 dan ε_1 secara berturut – turut dinotasikan dalam (2.6) dan (2.7). Yang kedua adalah homotopi dari fungsi

$$y(x;q) = \pm\sqrt{1 - x^2} \sim \; \pm\; 2\sqrt{1 - 4x^2} \tag{2.10}$$

Dengan kata lain, solusi $y(x;q)$ dari (2.8) juga merupakan homotopi. Deformasi kontinu secara lengkap telah dinotasikan dalam (2.8). Untuk lebih sederhananya, (2.8) dapat disebut sebagai deformasi orde – nol. Konsep yang sama dapat diterapkan kedalam berbagai jenis persamaan lainnya, seperti persamaan diferensial, persamaan integral, dan lain – lain (Liao, 2012).

2.3 Metode Analisis Homotopi

Misalkan terdapat persamaan differensial berikut,

$$N_i[z_i(x,t)] = 0 \quad ; i = 1,2,\dots,n \tag{2.11}$$

dengan N_i adalah operator tak linear yang mewakili seluruh persamaan, x dan t adalah variabel bebas dan $z_i(x,t)$ adalah fungsi yang tidak diketahui. Dengan cara mengeneralisasi metode homotopi sederhana, Liao menyusun persamaan deformasi orde nol.

$$(1-q)\, L\big[\phi_i(x,t;q) - z_{i,0}(x,t)\big] = q\, h_i\, N_i\,[\phi_i(x,t;q)] \tag{2.12}$$

Untuk $q \in [0,1]$ adalah parameter homotopi, h_i adalah fungsi taknol tambahan, L adalah operator linear tambahan, $z_{i,0}(x,t)$ adalah syarat awal dari $z_i(x,t)$ dan $\phi(x,t;q)$ adalah fungsi yang tidak diketahui. Penting untuk diingat bahwa, bebas untuk memilih objek tambahan seperti h_i dan L pada metode analisis homotopi. Terlihat jelas bahwa saat $q = 0$ dan $q = 1$, keduanya menghasilkan

$$\phi_i(x,t;0) = z_{i,0}(x,t) \text{ dan } \phi_i(x,t;1) = z_i(x,t) \tag{2.13}$$

Maka, seiring dengan bertambahnya nilai q dari 0 ke 1, solusi $\phi_i(x,t;q)$ berubah dari syarat awal $z_{i,0}(x,t)$ ke solusi $z_i(x,t)$. Mengekspansikan $\phi_i(x,t;q)$ ke dalam deret Taylor terhadap q, akan menghasilkan

$$\phi_i(x,t;q) = z_{i,0}(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} z_{i,m}(x,t)\, q^m \tag{2.14}$$

dengan

$$z_{i,m} = \frac{1}{m!} \left. \frac{\delta^m \phi_i(x,t;q)}{\delta q^m} \right|_{q=0} \tag{2.15}$$

Jika operator linear tambahan, syarat awal, parameter tambahan h_i, dan fungsi tambahan dipilih dengan benar, maka deret pada persamaan (2.14) konvergen ke $q = 1$ dan

$$\phi_i(x,t;1) = z_{i,0}(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} z_{i,m}(x,t) \tag{2.16}$$

merupakan salah satu dari solusi – solusi persamaan tak linear, seperti yang telah dibuktikan oleh Liao. Jika $h_i = -1$, persamaan (2.12) menjadi

$$(1-q)\, L\big[\phi_i(x,t;q) - z_{i,0}(x,t)\big] + q\, N_i\, [\phi_i(x,t;q)] = 0 \tag{2.17}$$

merupakan persamaan yang paling sering digunakan dalam metode analisis homotopi.

Berdasarkan (2.15), persamaan tersebut dapat di deduksi dari persamaan deformasi orde nol (2.12). Didefinisikan vektor

$$\overrightarrow{z_{i,n}} = \{ z_{i,0}(x,t), z_{i,1}(x,t), \dots, z_{i,n}(x,t) \} \tag{2.18}$$

Mendiferensialkan (2.12) sebanyak m kali terhadap parameter homotopi q dan substitusikan $q = 0$ dan akhirnya membaginya dengan $m!$, maka diperoleh persamaan deformasi orde ke- m.

$$L\left[\, z_{i,m}(x,t) - \chi_m\, z_{i,m-1}(x,t) \,\right] = h_i\, R_{i,m}(\overrightarrow{z_{\iota,m-1}}) \qquad (2.19)$$

untuk

$$R_{i,m}\left(\overrightarrow{z_{\iota,m-1}}\right) = \frac{1}{(m-1)!}\, \frac{\delta^{m-1} N_i[\phi_i(x,t;q)]}{\delta\, q^{m-1}} \Bigg|_{q=0} \qquad (2.20)$$

dan

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

Perhatikan bahwa $z_{i,m}(x,t)$ $(m \geq 1)$ berdasarkan persamaan linear (2.19) dengan kondisi batas linear yang didapat dari masalah awalnya (Bataineh, Noorani, dan Hashim, 2007).

2.4 Deret Taylor

Deret Taylor adalah bentuk khusus dari suatu fungsi yang dapat digunakan sebagai pendekatan dari integral suatu fungsi yang tidak memiliki anti turunan elementer dan dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial.

Definisi 2.4.1

Bentuk umum Deret Taylor:

$$f(x_i + 1) = f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i)\frac{\Delta x}{2!} + f'''(x_i)\frac{\Delta x}{3!} + \cdots + f_n(x_i)\frac{\Delta x^n}{n!} + Rn \qquad (2.21)$$

Jika suatu fungsi $f(x)$ diketahui di titik x_i dan semua turunan f terhadap x diketahui pada titik tersebut, maka dengan deret Taylor dapat dinyatakan nilai f pada titik $x_i + 1$ yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i.

Dalam praktek, sulit memperhitungkan semua suku pada deret Taylor tersebut dan biasanya hanya diperhitungkan beberapa suku pertama saja.

1. Memperhitungkan satu suku pertama (orde nol)

$$f(x_i + 1) \approx f(x_i) \qquad (2.22)$$

   artinya nilai f pada titik $x_i + 1$ sama dengan nilai pada x_i. Perkiraan tersebut benar jika fungsi yang diperkirakan konstan. Jika fungsi tidak konstan, maka harus diperhitungkan suku-suku berikutnya dari deret Taylor.

2. Memperhitungkan dua suku pertama (orde satu)

$$f(x_i + 1) \approx f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} \qquad (2.23)$$

3. Memperhitungkan tiga suku pertama (orde dua)

$$f(x_i + 1) \approx f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i)\frac{\Delta x}{2!} \qquad (2.24)$$

Definisi 2.4.2

Misalkan $f(x)$ fungsi sebarang yang dapat dinyatakan sebagai suatu deret pangkat sebagai berikut:

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a) + \cdots \tag{2.25}$$

dengan b_n, n=1,2,3 menyatakan koefisien deret pangkat dan a menyatakan titik pusatnya.

Jika fungsi $f(x)$ dinyatakan dalam bentuk deret berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \tag{2.26}$$

maka deret tersebut disebut deret Taylor dari fungsi yang berpusat di a (Kreyszig, 1998).

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2017/2018 bertempat di gedung Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Langkah - Langkah Penelitian

Misalkan diberikan suatu persamaan linear tak homogen

$$u_t - v_x - (u - v) = -2 \tag{3.1}$$

dan

$$v_t - u_x - (u - v) = -2 \tag{3.2}$$

dengan syarat awal

$$u(x,0) = 1 + e^x \text{ dan } v(x,0) = -1 + e^x \tag{3.3}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (3.1) – (3.3) digunakan metode analisis homotopi dengan operator linear sebagai berikut.

$$L[\phi_i(x,t;q)] = \frac{\partial \phi(x,t;q)}{\partial t}$$

Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan operator linear L dan mengkontruksikan persamaan deformasi orde ke-nol.
2. Menentukan rangkaian solusi dari komponen yang telah diperoleh melalui perkiraan awal jika q=0, dan q=1.
3. Mengkontruksikan persamaan deformasi orde-m.
4. Menentukan solusi persamaan deformasi pada persamaan yang diperoleh dari langkah ke (3) untuk setiap m = 1,2,…,n.
5. Mensubtitusikan hasil ini ke dalam deret homotopi, sehingga diperoleh solusi homotopi.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Pada sistem persamaan diferensial parsial linear non homogen $u_t - v_x - (u - v) = -2$, $v_t + u_x - (u - v) = -2$ dengan syarat awal $u(x, 0) = 1 + e^x$ dan $v(x, 0) = -1 + e^x$, didapatkan solusi homotopi yang konvergen ke solusi $u(x, t) = 1 + e^{x+t}$ dan $v(x, t) = -1 + e^{x-t}$ apabila nilai $h = -1$.

5.2 Saran

Pada tulisan ini, metode analisis homotopi hanya diterapkan ke dalam sistem persamaan diferensial parsial linear non homogen orde satu. Oleh karena itu, diharapkan dapat digunakan sebagai referensi dalam menerapkan metode analisis homotopi ke dalam sistem persamaan diferensial parsial lainnya yang lebih rumit.

DAFTAR PUSTAKA

Bataineh, Noorani, dan Hashim. 2007. Approximate Analytical Solutions of Systems of PDEs by Homotopy Analysis Method. *Journal of Computers and Mathematics with Applications*, Malaysia. No.55: 2913–2923.

Bronson, R. dan Costa, G. 2007. *Persamaan Differensial*. Erlangga, Jakarta.

Kreyzig, E. 1998. *Advanced Engineering Mathematics.* Eighth Edition. John Wiley, New York.

Liao, S. 2012. *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equation*. Higher Education Press, Beijing.

Sasongko, S.B. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab*. Andi, Yogyakarta.