APLIKASI METODE ANALISIS HOMOTOPI (HAM) PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL $u_t - v_x + (u + v) = 0;\ v_t - u_x + (u + v) = 0$

(Proposal Penelitian)

Oleh

FAUZIA ANISATUL FARIDA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

ABSTRACT

HOMOTOPY ANALYSIS APPLICATION METHOD FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEM

$$\boldsymbol{u_t - v_x + (u + v) = 0;\ v_t - u_x + (u + v) = 0}$$

By

FAUZIA ANISATUL FARIDA

The nonlinier problem usually difficult to besolved by analytical or numerical methods. Alow, there is a method which way solve PDE systems, ie: homotopy analysis method. This method more effective as it does not depend on choiship parameter.

The reivets show that the solution of this system approaches the exact solution. The conclusions from this experiment close to exact solution for $h = 1$.

Keyword: HAM, exact solution, PDEsystem

ABSTRAK

APLIKASI METODE ANALISIS HOMOTOPI (HAM) PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

$$\boldsymbol{u_t - v_x + (u + v) = 0;\ v_t - u_x + (u + v) = 0}$$

Oleh

FAUZIA ANISATUL FARIDA

Masalah nonlinear biasanya sulit diselesaikan baik secara analitik maupun secara numerik. Oleh sebab itu, maka dibutuhkan metode-metode yang dapat menyelesaikan persamaan diferensial parsial ini. Metode analisis homotopi berhasil diterapkan dalam menyelesaikan berbagai tipe persamaan dan sistem persamaan tak linier, homogen atau tak homogen.

Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial parsial dengan metode baru yaitu metode analisis homotopi (HAM) yang memiliki beberapa keunggulan dibandingkan dengan metode sebelumnya. Untuk memperlihatkan bahwa solusi dari metode homotopi mendekati solusi eksak dalam penelitian ini juga dilakukan investigasi numerik. Dari penelitian ini di peroleh kesimpulan bahwa solusi homotopi mendekati solusi eksak untuk $h = -1$.

Kata Kunci: HAM, solusi eksak, sistem PDE

APLIKASI METODE ANALISIS HOMOTOPI (HAM) PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL
$$u_t - v_x + (u+v) = 0;\ v_t - u_x + (u+v) = 0$$

Oleh

FAUZIA ANISATUL FARIDA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Skripsi	:	**APLIKASI METODE ANALISIS HOMOTOPI (HAM) PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL** $u_t - v_x + (u + v) = 0;$ $v_t - u_x + (u + v) = 0$
Nama Mahasiswa	:	*Fauzia Anisatul Farida*
No. Pokok Mahasiswa	:	1417031050
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.	Dorrah **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**
NIP 19620513 198603 1 003	NIP 19610128 198811 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.** ....

   Sekretaris : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.** ....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

   Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
   NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **21 November 2017**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Fauzia Anisatul Farida**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1417031050**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Aplikasi Metode Analisis Homotopi (HAM) Pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial** $\boldsymbol{u_t - v_x + (u+v) = 0;\ v_t - u_x + (u+v) = 0}$

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagai persyaratan penyelesaian studi pada universitas atau institut lain.

Bandar lampung, 21 November 2017

Yang Menyatakan

Fauzia Anisatul Farida

NPM. 1417031050

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Pringsewu, Kecamatan Pringsewu Timur, Kabupaten Pringsewu pada tanggal 02 Februari 1996, sebagai anak ke-satu dari tiga bersaudara, buah hati dari pasangan Bapak Ayub Sarwiyanto (Alm) dan Ibu Nur Rahayu. Merupakan anak pertama dan kakak dari Fadila Amelia Karima dan Qori Hikmah Faranida.

Penulis memulai pendidikan di Taman Kanak-kanak Aisyah 2 Pringmbo II; Sekolah Dasar Muhammadiyah Pringsewu pada tahun 2000-2006; Sekolah Menengah Pertama Negeri 1 Gedong Tataan pada tahun 2006-2009; Sekolah Menengah Atas Negeri 1 Pringsewu pada tahun 2009-2012. Penulis diterima sebagai mahasiswi Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada tahun 2014 melalui (SBMPTN), kemudian penulis mendapat beasiswa BIDIKMISI sejak semester pertama.

Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu di dunia kerja, penulis telah melaksanakan Kerja Praktik (KP) selama 40 hari di Kantor BPS Provinsi Lampung. Dan sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis telah melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Desa Sinar Seputih, Kecamatan Bangunrejo, Lampung Tengah.

Pengalaman Organisasi penulis yaitu sebagai Anggota Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Lampung, Anggota dan Pimpinan UKM Rohani Islam Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univeritas Lampung, serta menjadi Anggota, Staff Bentif dan Pimpinan Badan Eksekutif Mahasiswa. Penulis pernah menjadi Asisten praktikum mata kuliah Algoritma Pemrograman dan Analisis Numerik.

MOTTO

"Allah berfirman: "Janganlah kamu berdua khawatir,sesungguhnya Aku beserta kamu berdua, Aku mendengar dan melihat"

(Q.S. Thaha:46)

"Bersabarlah terhadap kerasnya sikap seorang guru.
Sesungguhnya gagalnya mempelajari ilmu karena memusuhinya.
Barangsiapa belum merasakan pahitnya belajar walau sebentar,
Ia akan merasakan hinanya kebodohan sepanjang hidupnya.
Dan barangsiapa ketinggalan belajar di masa mudanya,
Maka bertakbirlah untuknya empat kali karena kematiannya.
Demi Allah hakekat seorang pemuda adalah dengan ilmu dan takwa.
Bila keduanya tidak ada maka tidak ada anggapan baginya."

(Imam Syafi'i)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap syukur kepada Allah SWT atas segala nikmat yang tak terhingga yang selalu dilimpahkan kepadaku sehingga aku dapat menyelesaikan karya kecilku ini.

Ibu..., (alm) Bapak...

Kupersembahkan skripsiku ini sebagai wujud rasa cinta dan terima kasihku untuk setiap do'a, kasih sayang dan perhatian, serta semangat yang tak pernah putus diberikan di setiap hariku.

Untuk kedua adikku tersayang yang selalu memberikan semangat dan dukungan serta do'a yang tak pernah henti untukku.

SANWACANA

Alhamdulillahi robbil 'alamin, puji dan syukur penulis kepada Allah SWT atas izin serta ridho-Nya dalam menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Aplikasi Metode Analisis Homotopi (HAM) Pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial $\boldsymbol{u_t - v_x + (u+v) = 0;\ v_t - u_x + (u+v) = 0}$".** Shalawat serta salam kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menjadi suri tauladan yang baik bagi kita.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan, bantuan, dan kerjasama dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D., selaku dosen pembimbing utama yang senantiasa membimbing dan memberikan arahan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si.. selaku dosen pembimbing kedua yang telah memberikan bimbingan serta saran yang membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., selaku pembahas sekaligus Ketua Jurusan Matematika FMIPA UNILA.
4. Ibu Dra. Wamiliana, MA, Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D., selaku dekan FMIPA Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
7. Untuk Ibu, (alm) Bapak yang telah banyak memberikan banyak hal positif dalam hidup penulis, serta kedua adikku Fadila Amelia Karima dan Qori

Hikmah Faranida yang memberikan do’a dan perhatian serta semangat yang tak terhingga kepada penulis.

8. Seluruh keluarga besarku Hadi Sumarto fam’s, terimakasih atas semua do’a dan dukungannya serta kasih sayang yang telah banyak diberikan.
9. Sahabat-sahabat satu perjuangan (Anakan Gajah) di kampus Abdul Kodir, Aldi Kurnia Tama, Abdillah Zul Karnain, Amanda Yona Ningtyas, Annisa Rizki Utami, Clara Septyan, Suci Milantika, Lesda Dhea Rafilia, Rahma Aulia Marzuki, Vanesha Putri Mardiana dan Vivi Nur Utami yang telah banyak memberikan semangat dan dukungan.
10. Sahabat-sahabat syurgaku (aamiin...) “wonder women” afifah, eka, mega, nurul, khodijah, fatiya, fa’ni, lasmi, titin, citra, cocom, “akhwat 14 MIPA”, “mejelis ilmu”, “XYZ”, “Pimpinan ROIS’16”, “Pimpinan BEM’17”, dan terkhusus untuk murabbiyahku yang senantiasa memberikan kesabarannya dalam perjalanan hijrahku.
11. Sahabat-sahabat kosan Edelwish yang telah memberikan pembelajaran dan semangat kepada penulis terkhusus untuk mbaku fentri.
12. Teman-teman Matematika 2014 atas kebersamaan serta keceriaaan yang telah diberikan kepada penulis selama menempuh pendidikan di Universitas Lampung.
13. Seluruh pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Bandar Lampung, 21 November 2017

Penulis

Fauzia Anisatul Farida

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Matematika merupakan ratu bagi ilmu pengetahuan lain, dimana perkembangan ilmu matematika memiliki peran yang sangat penting dan bermanfaat bagi kehidupan sehari-hari serta merupakan penunjang bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Dalam kehidupan sehari-hari banyak ditemui permasalahan yang berhubungan dengan matematika. Permasalahan ini biasanya berhubungan dengan persamaan diferensial, khususnya persamaan diferensial parsial, baik diferensial parsial linear maupun nonlinear. Masalah nonlinear ini biasanya sulit diselesaikan baik secara analitik maupun secara numerik. Oleh sebab itu, maka dibutuhkan metode-metode yang dapat menyelesaikan persamaan diferensial parsial ini.

Beberapa penelitian difokuskan pada penemuan metode untuk memperoleh solusi dari masalah yang dimodelkan dalam persamaan nonlinear. Beberapa metode yang digunakan antara lain, metode homotopi, persamaan aljabar, persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Selain itu, metode analisis homotopi adalah metode yang bebas, artinya tidak memperhatikan kecil atau besarnya suatu parameter. Metode analisis homotopi berhasil diterapkan dalam menyelesaikan berbagai tipe persamaan dan sistem persamaan tak linier, homogen atau tak homogen. Oleh karena itu, penulis menggunakan metode homotopi dalam menyelesaikan permasalahan sistem persamaan diferensial parsial ini.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini berdasarkan atas perumusan masalah diatas adalah:

1. Mempelajari metode analisis homotopi.
2. Menyelesaikan sistem persamaan diferensial parsial

   $u_t - v_x + (u + v) = 0; v_t - u_x + (u + v) = 0$

1.3 Manfaat

Adapun manfaat yang didapatkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menambah pengetahuan tentang metode analisis homotopi (HAM).
2. Menambah pengetahuan tentang sistem persamaan diferensial parsial.
3. Mempergunakan metode analisis homotopi (HAM) untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial parsial

   $u_t - v_x + (u + v) = 0; v_t - u_x + (u + v) = 0.$
4. Memahami cara menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan diferensial parsial dengan menerapkan metode analisis homotopi

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan suatu fungsi yang dicari dan turunannya. Suatu persamaan diferensial adalah suatu persamaan diferensial biasa (PDB) jika fungsi yang tidak diketahui hanya terdiri dari satu variabel independen. Jika fungsi yang dicari terdiri dari dua atau lebih variabel independen, persamaan tersebut disebut persamaan diferensial parsial (PDP) (Bronson dan Costa, 2007). Persamaan berikut adalah persamaan-persamaan diferensial yang melibatkan fungsi y yang tidak diketahui:

1. $\frac{dy}{dx} = 5x + 3$
2. $e^y \frac{d^2y}{dx^2} + 2(\frac{dy}{dx})^2 = 1$
3. $4\frac{d^3y}{dx^2} + (sinx)(\frac{dy}{dx})^2 + 5xy = 0$
4. $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 4\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = 0$

Persamaan 1 sampai 3 merupakan persamaan diferensial biasa karena fungsi y yang tidak diketahui hanya pada variabel independen x. Persamaan 4 merupakan persamaan diferensial parsial karena fungsi y yang tidak diketahui terdiri dari variabel independen t dan x.

2.2 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan parsial dengan dua atau lebih variabel bebas. Orde dari persamaan diferensial parsial adalah tingkat tertinggi dari derivatif yang ada dalam persamaan diferensial. Derajat dari persamaan diferensial parsial adalah pangkat tertinggi dari turunan tingkat tertinggi yang ada dalam persamaan diferensial.

- Persamaan diferensial orde 1

$$\frac{\partial c}{\partial x} - a\frac{\partial c}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

- Persamaan diferensial orde 2

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + Dc\frac{\partial c}{\partial y} = 0 \tag{2.2}$$

- Persamaan diferensial orde 3

$$(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.3}$$

Persamaan diferensial parsial berikut merupakan bentuk persamaan diferensial orde dua:

$$a(\cdot)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2b(\cdot)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(\cdot)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d(\cdot) = 0 \tag{2.4}$$

Selain itu, persamaan diferensial parsial juga digolongkan menjadi persamaan linear, kuasilinear dan taklinear dengan penjelasan sebagai berikut:

1. Apabila koefisien pada persamaan (2.4) adalah konstan atau fungsi hanya terdiri dari variabel bebas saja $[(\cdot) = (x, y)]$ maka persamaan itu disebut persamaan linear.

2. Apabila koefisien pada persamaan (2.4) adalah fungsi dari variabel tak bebas dan/atau merupakan turunan dengan pangkat yang lebih rendah daripada persamaan diferensialnya $[(\cdot) = (x, y; u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})]$, maka persamaan itu disebut persamaan kuasilinear.
3. Apabila koefisien pada persamaan (2.4) adalah fungsi dengan turunan sama dengan pangkatnya $\left[(\cdot) = \left(x, y; u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\right]$ maka persamaan itu disebut persamaan tak linear.

2.3 Konsep Deret Taylor

Deret Taylor adalah bentuk khusus dari suatu fungsi yang dapat digunakan sebagai pendekatan dari integral suatu fungsi yang tidak memiliki anti turunan elementer dan dapat digunakan untuk menyeselaikan persamaan diferensial.

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial (Madani dan. Faitzah, 2010).

Definisi 1:

Bentuk umum deret Taylor:

$$f(x_i + 1) = f(x_i) + f^{'}(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + f^{''}(x_i)\frac{\Delta x}{2!} + f^{'''}(x_i)\frac{\Delta x}{3!} + \cdots + f_n(x_i)\frac{\Delta x^n}{n!} + Rn \qquad (2.5)$$

Jika suatu fungsi $f(x)$ diketahui di titikx_i dan semua turunan f terhadap x diketahui pada titik tersebut, maka dengan deret Taylor dapat dinyatakan nilai f pada titik $x_i + 1$ yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i.

$f(x_i)$: fungsi di titik x_i

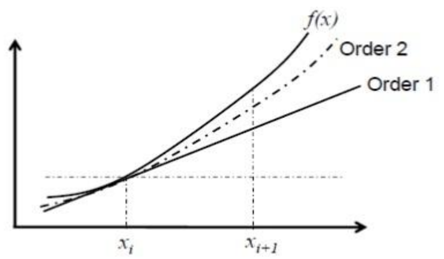
$f(x_{i+1})$: fungsi di titik x_{i+1}

$f', f'', \ldots, f^n$: turunan pertama, kedua, ..., ke *n* dari fungsi

Δx : jarak antara x_i dan x_{i+1}

Rn : kesalahan pemotongan

! : operator faktorial



Gambar 1. Grafik fungsi deret Taylor dan keterangannya

Dalam praktek, sulit menghitung semua suku pada deret Taylor tersebut dan biasanya hanya diperhitungkan beberapa suku pertama saja.

1. Menghitung satu suku pertama (orde nol)

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) \tag{2.6}$$

artinya nilai f pada titik $x_i + 1$ sama dengan nilai pada x_i. Perkiraan tersebut benar jika fungsi yang diperkirakan konstan. Jika fungsi tidak konstan, maka harus diperhitungkan suku-suku berikutnya dari deret Taylor.

2. Memperhitungkan dua suku pertama (orde satu)

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} \tag{2.7}$$

3. Memperhitungkan tiga suku pertama (orde dua)

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i)\frac{\Delta x}{2!} \tag{2.8}$$

Definisi 2:

Misalkan $f(x)$ fungsi sebarang yang dapat dinyatakan sebagai suatu deret pangkat sebagai berikut:

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a) + \cdots \tag{2.9}$$

dengan

b_n, n=1, 2, 3, ... menyatakan koefisien deret pangkat dan a menyatakan titik pusatnya.

Jika fungsi $f(x)$ dinyatakan dalam bentuk deret berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \tag{2.10}$$

maka deret tersebut disebut deret Taylor dari fungsi yang berpusat di a.

2.4 Metode Analisis Homotopi (HAM)

Metode analisis homotopi (HAM) pertama kali dirancang pada tahun 1992 oleh Shijun Liao dari Shanghai Jiaotong University dalam disertasi PhD-nya dan dimodifikasi lebih lanjut pada tahun 1997 untuk memperkenalkan parameter tambahan nol-nol atau disebut sebagai parameter konvergensi-kontrol yang dilambangkan dengan $\boldsymbol{c_0}$untuk membangun homotopi pada sistem diferensial dalam bentuk umum. Metode analisis homotopi (HAM) adalah teknik semianalitis untuk memecahkan masalah taklinear biasa atau persamaan diferensial parsial.

Metode analisis homotopi (HAM) yang diusulkan oleh Shijun Liao (1992) didasarkan pada konsep dalam topologi dan diferensial geometri untuk menghasilkan kekonvergenan deret dari sistem taklinear. Konsep homotopi tersebut kemudian ditelusuri kembali ke Jules Henri Poincare, seorang matematikawan Perancis. Homotopi menjelaskan semacam variasi deformasi dalam matematika. Sebagai contoh sebuah lingkaran dapat dideformasikan secara kontinu menjadi elips, dan bentuk dari cangkir kopi dapat dideformasikan secara kontinu menjadi bentuk donat. Pada intinya, homotopi didefinisikan sebagai suatu penghubung antara benda yang berbeda dalam matematika yang memiliki karakteristik yang sama diberbagai aspek.

Definisi 1:

Suatu homotopi dua fungsi yang kontinu f(x) dan g(x) dari suatu ruang topologi X ke ruang topologi Y dinotasikan sebagai fungsi $H : X\, x\, [0,1] \rightarrow Y$ dari produk ruang X dengan interval [0,1] ke Y sedemikian sehingga jika $x \in X$ maka

$$H(x;0) = f(x) \text{ dan } H(x;1) = g(x) \qquad (2.12)$$

Definisi 2:

Parameter *benaman* q ∈[0,1] di dalam suatu fungsi atau persamaan homotopi disebut parameter homotopi.

Definisi 3:

Diberikan suatu persamaan ε_1, yang mempunyai paling sedikit satu solusi u. Ambil ε_0 sebagai persamaan awal yang solusinya diketahui u_0. Persamaan homotopi $\varepsilon(q){:}\, \varepsilon_0 {\sim} \varepsilon_1$ dengan parameter homotopi $q \in [0,1]$ naik dari 0 menuju 1, $\varepsilon(q)$ dideformasikan secara kontinu dari persamaan awal ε_0 ke persamaan asli ε_1 di mana solusinya berubah secara kontinu dari solusi yang diketahui u_0 dari ε_0 ke solusi yang tidak diketahui u dari ε_1. Jenis dari persamaan homotopi ini disebut persamaan deformasi orde nol.

Definisi 4:

Diberikan sebuah persamaan taklinear dinotasikan oleh ε, yang paling tidak memiliki satu solusi $u(z,t)$, dimana z dan t merupakan variabel bebas. $q \in [0,1]$ menunjukkan homotopi parameter dan $\varepsilon(q)$ menunjukkan persamaan deformasi orde nol, yang menghubungkan persamaan asli ε, dan persamaan awal ε_0 dengan aproksimasi awal yang diketahui $u_0(z,t)$.

Asumsikan bahwa persamaan orde nol $\varepsilon(q)$ memiliki solusi dan analitik di $q = 1$, sehingga diperoleh homotopi deret Maclaurin:

$$\emptyset(z,t;q) \sim u_0(n,t) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z,t) q^n, \qquad q \in [0,1] \tag{2.13}$$

dan deret homotopi:

$$\emptyset(z,t;1) \sim u_0(z,t) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z,t) \tag{2.14}$$

Persamaan yang berhubungan dengan $u_n(z,t)$ yang nilainya tidak diketahui disebut persamaan deformasi orde ke-n.

Definisi 5:

Jika solusi $\varphi(z,t;q)$ dari persamaan deformasi orde nol $\varepsilon(q): \varepsilon_0 \sim \varepsilon_1$ ada dan analitik di dalam $q \in [0,1]$, maka diperoleh solusi deret homotopi dari persamaan asli ε_1:

$$u(z,t) = u_0(z,t) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n\,(z,t) \tag{2.15}$$

dan aproksimasi homotopi orde ke-m:

$$u(z,t) \approx u_0(z,t) + \sum_{n=1}^{M} u_n\,(z,t) \tag{2.16}$$

(Liao, S, 2012)

Misalkan terdapat persamaan diferensial berikut,

$$N_i[z_i(x,t)] = 0 \quad ; i = 1,2,\dots,n$$

Dimana N_i adalah operator nonlinear yang mewakili seluruh persamaan, x dan t adalah variable bebas dan $z_i(x,t)$ adalah fungsi yang tidak diketahui. Dengan cara mengeneralisasi metode homotopi sederhana, Liao menyusun persamaan deformasi orde nol.

$$(1-q)L\big[\phi_i(x,t;q) - z_{i,0}(x,t)\big] = qh_iN_i\,[\phi_i(x,t;q)] \tag{2.17}$$

Dimana $q\epsilon\ [0,1]$ adalah parameter *benaman hi* adalah fungsi bantu tak nol tambahan, L adalah operator linear tambahan, $z_{i,0}(x,t)$ adalah tebakan awal dari $z_i(x,t)$ dan $\phi(x,t;q)$ adalah fungsi yang tidak diketahui. Penting untuk diingat bahwa, bebas untuk memilih objek tambahan seperti h_i dan L pada HAM. Terlihat jelas bahwa saat $q = 0$ dan $q = 1$, keduanya menghasilkan

$$\phi_i(x,t;0) = z_{i,0}(x,t) \text{ dan } \phi_i(x,t;1) = z_i(x,t). \tag{2.18}$$

Maka, sejalan dengan meningkatnya q dari 0 ke 1, solusi $\phi_i(x,t;q)$berubah dari tebakan awal $z_{i,0}(x,t)$ ke solusi $z_i(x,t)$. Memperluas $\phi_i(x,t;q)$ dalam deret Taylor terhadap q, akan menghasilkan

$$\phi_i(x,t;q) = z_{i,0}(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} z_{i,m}(x,t)q^m \tag{2.19}$$

Dimana

$$z_{i,m} = \frac{1}{m!}\frac{\delta^m\phi_i(x,t;q)}{\delta q^m}\bigg|_{q=0} \tag{2.20}$$

Jika operator linear tambahan, tebakan awal, parameter tambahan h_i, dan fungsi tambahan dipilih dengan benar, maka deret pada persamaan (2.18) konvergen ke $q = 1$ dan

$$\phi_i(x,t;1) = z_{i,0}(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} z_{i,m}(x,t) \tag{2.21}$$

Yang merupakan satu dari solusi – solusi persamaan – persamaan nonlinear aslinya, seperti yang telah dibuktikan oleh Liao. Jika $h_i = -1$, persamaan (2.17) menjadi

$$(1-q)L\left[\phi_i(x,t;q) - z_{i,0}(x,t)\right] + qN_i\left[\phi_i(x,t;q)\right] = 0 \qquad (2.22)$$

Berdasarkan (2.19), persamaan yang dibentuk dapat di deduksi dari persamaan deformasi orde nol (2.17). Kita definisikan vektor

$$\overrightarrow{z_{i,n}} = \{ z_{i,0}(x,t), z_{i,1}(x,t), \dots, z_{i,n}(x,t) \} \qquad (2.23)$$

Mendiferensialkan (2.17) sebanyak m kali terhadap parameter *benaman q* dan lalu masukkan $q = 0$ dan akhirnya membaginya dengan $m!$, kita dapatkan yang disebut dengan persamaan deformasi orde ke-m.

$$L\left[z_{i,m}(x,t) - X_m z_{i,m-1}(x,t)\right] = h_i R_{i,m}(\overrightarrow{z_{i,m-1}}) \qquad (2.24)$$

Dimana

$$R_{i,m}(\overrightarrow{z_{i,m-1}}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\delta^{m-1} N_i[\phi_i(x,t;q)]}{\delta q^{m-1}}\bigg|_{q=0} \qquad (2.25)$$

Dan

$$X_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \qquad (2.26)$$

Harus ditekankan bahwa $z_{i,m}(x,t)(m \geq 1)$ dibentuk oleh persamaan linear (2.24) dengan syarat batas linear yang didapat dari masalah awalnya, yang dapat dengan mudah dipecahkan oleh *software* komputer seperti *Maple*.

2.5 Operator Linear

Operator linear sering digunakan dalam perumusan masalah matematika, dalam bentuk persamaan untuk diselesaikan atau fungsi untuk dioptimumkan. Selain kelinearan, perlu dipelajari sifat lainnya.

1

a. Kemiripan dengan masalah yang penyelesaiannya diketahui.

b. Kemiripan dengan masalah ber-dimensi hingga.

Operator = pemetaan, transformasi, fungsi, fungsional (bergantung pada domain dan kodomainnya).

Operator dikatakan sebagai linear jika, untuk setiap pasangan fungsi f dan g dan skalar t,

$$L(f+g) = Lf + Lg$$

dan

$$L(tf) = tLf$$

(Weisstein, 2017)

2.6 Deformasi

Deformasi merupakan perubahan bentuk, dimensi dan posisi dari suatu materi baik dari suatu materi baik merupakan bagian dari alam ataupun buatan manusia dalam skala waktu dan ruang (Taufiq, 2005).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2017/2018, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam menyelesaikan permasalahan diferensial parsial dengan menggunakan metode analisis homotopi (HAM) adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan bahan literatur serta studi pustaka seperti buku dan jurnal dari perpustakaan dan internet.
2. Merumuskan masalah dalam bentuk persamaan diferensial parsial tak linear.

Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial parsial $u_t - v_x + (u + v) = 0$ dan $v_t - u_x + (u + v) = 0$ dengan metode analisis homotopi adalah sebagai berikut :

1. Misalkan diberikan suatu persamaan nilai awalnya

$$u(x,t) = \sinh x\,, \qquad v(x,t) = \cosh x \tag{3.1}$$

2. Menyelesaikan persamaan (3.1) menggunakan metode analisis homotopi dengan operator bantu linear L.
   a. Menjelaskan operator linear L.
   b. Menentukan persamaan deformasi orde nol.
   c. Menentukan rangkaian solusi dari komponen yang telah diperoleh melalui perkiraan awal jika $q = 0,\ q = 1$.
   d. Mengkontruksikan persamaan deformai orde-m.
   e. Menentukan solusi persamaan deformasi pada persamaan yang diperoleh dari langkah ke (d) untuk setiap m= 1, 2, 3, ..., n.
   f. Mensubtitusikan hasil ini kedalam deret homotopi, sehingga diperoleh solusi homotopi.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan penguraian langkah-langkah yang telah dikerjakan dalam metode homotopi ini, diperoleh kesimpulan bahwa solusi dari persamaan diferensial parsial $u_t - v_x + (u + v) = 0$ dan $v_t - u_x + (u + v) = 0$ yang diperoleh berdasarkan metode analisis homotopi dengan hasil $u(x,t) = \sinh(x - t)$, $v(x,t) = \cosh(x - t)$ sama dengan solusi eksaknya jika $h = -1$.

5.2 Saran

Saran pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Pada penelitian ini penulis hanya mencari $u(x,t)$ dan $v(x,t)$ sampai dengan $m = 5$, diharapkan untuk penelitian selanjutnya dapat dicari $m > 5$.
2. Diharapkan metode analisis homotopi ini dapat dikerjakan untuk persamaan diferensial parsial yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Bataineh, Noorani, dan Hashim. 2007. Approximate Analytical Solutions of System of PDEs by Homotopy Analisis Method. *Journal of Computers and Mathematics with Applications,* Malaysia. No. 55: 2913-2923.

Bronson, R dan Costa, G.2007.Persamaan Diferensial. Erlangga, Jakarta.

Kreyzig, E. 1999. *Advanced Engineering Mathematics 8th Edition*. John Wiley, New York.

Liao, S. 2012. *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equation*. Beijing: Higher Education Press.

Purcell, E. J dan Varberg, D. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Erlangga, Jakarta.

Taufiq. 2005. *Deformasi.* http://dtaufiqnr.blogspot.co.id/2012/04/deformasi.html. Diakses pada tanggal 29 September pukul 20.00 WIB.

Weisstein, E. 2017. *Linear Operator.* http://mathworld.wolfram.com/ . Diakses pada tanggal 29 September 2017 pukul 20.00 WIB.