PERBANDINGAN METODE HEUN DAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT PADA MODEL PEMURNIAN ZAT TERLARUT DENGAN 2 TANGKI

(Skripsi)

Oleh

CAMELIA HANA FITRI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

ABSTRAK

PERBANDINGAN METODE HEUN DAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT PADA MODEL PEMURNIAN ZAT TERLARUT DENGAN 2 TANGKI

Oleh

CAMELIA HANA FITRI

Fenomena perubahan merupakan bentuk dari persamaan diferensial. Pemodelan matematika tentang fenomena perubahan yang sangat sering digunakan yaitu laju pertumbuhan dan laju penyusutan. Salah satunya pada proses pemurnian suatu zat. Dalam proses pemurnian maka akan terjadi pengurangan konsentrasi zat tersebut.

Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan metode Heun dan metode Runge-Kutta orde 4 pada model pemurnian zat terlarut dengan 2 tangki. Peneliti terfokus pada jumlah zat terlarut yang ada pada setiap tangki, sehingga dalam beberapa waktu jumlah zat terlarut semakin berkurang / mendekati nilai kemurnian (error $\leq$ 0,09).

Sehingga didapatkan kesimpulan bahwa Metode Runge Kutta orde 4 lebih baik daripada metode Heun, karena hasil solusi hampiran metode Runge-Kutta orde 4 cukup mewakili hasil solusi eksak dan memiliki nilai error(kesalahan) yang kecil serta garis yang terdapat pada grafik metode Runge-Kutta orde 4 dan grafik metode analitik terletak berhimpit. Sehingga hampir mendekati nilai sesungguhnya (eksak).

Kata kunci: Metode Analitik, Metode Numerik, Metode Heun, dan Metode Runge-Kutta Orde 4.

ABSTRACT

COMPARISON OF HEUN METHOD AND FOURTH ORDER RUNGE-KUTTA METHOD ON SOLUTE PURIFICATION MODEL WITH 2 TANKS

By

CAMELIA HANA FITRI

Phenomenon of change is a form of differential equation. Mathematical modeling about phenomenon of change that frecuently used are grouth rate and depriciation rate. One of the examples is purification process of a substance. In purification prosess, reduction of the corresponding substance will occur.

The purpose of this research is to compare Heun method and 4^{th} order Runge-Kutta method on solute purification model with 2 tanks. The researchers are focused on the amount of the solute in each tank, so in some time, the solute concentration will continue to decrease / approaching purity value (error $\leq$ 0,09).

So the conclusion is 4^{th} order Runge Kutta method is better than Heun method, because the result of 4^{th} order Runge Kutta method's range is enough to represent the exact solution and it has a little error so the line of 4^{th} order Runge Kutta method's graph and the line of analytic method's graph coincide. So it can be concluded that the result is approaching the exact value.

Keywords: Analytical Method, Numerical Method, Heun Method, and 4^{th} Order Runge Kutta Method.

PERBANDINGAN METODE HEUN DAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT PADA MODEL PEMURNIAN ZAT TERLARUT DENGAN 2 TANGKI

Oleh

CAMELIA SANA FITRI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Skripsi : **PERBANDINGAN METODE HEUN DAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT PADA MODEL PEMURNIAN ZAT TERLARUT DENGAN 2 TANGKI**

Nama Mahasiswa : CAMELIA HANA FITRI

NPM : 1417031032

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI,

1. Komisi Pembimbing

Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.	**Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**
NIP.19700831 199903 1 002	NIP.19720227 199802 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.
NIP.19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	:	**Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**	……….
Sekretaris	:	**Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si..**	……….
Penguji Bukan Pembimbing	:	**Amanto, S.Si., M.Si.**	……….

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 1995121 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **20 Desember 2017**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Camelia Hana Fitri**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1417031032**
Judul	: **PERBANDINGAN METODE HEUN DAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT PADA MODEL PEMURNIAN ZAT TERLARUT DENGAN 2 TANGKI**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, Desember 2017

Camelia Hana Fitri
NPM. 1417031032

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Pringsewu pada tanggal 10 Februari 1996, sebagai anak ketiga dari enam bersaudara, yang merupakan putri dari Bapak Hanafi dan Ibu Fitri Yeni.

Penulis menyelesaikan pendidikan Taman Kanak-Kanak di TK Islamiyah Sukoharjo pada tahun 2002 dan Sekolah Dasar di SDN 4 Sukoharjo pada tahun 2008. Sekolah Menengah Pertama di SMPN 1 Sukoharjo pada tahun 2011 dan Sekolah Menengah Atas di SMAN 1 Pringsewu pada tahun 2014. Pada tahun yang sama Penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Unila melalui jalur SBMPTN (Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri). Pada tahun 2017 Penulis melakukan Praktik Kerja Lapangan di Kantor Wilayah Bank Indonesia (Kanwil BI) Provinsi Lampung.

Penulis juga aktif di organisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unila, BEM FMIPA Unila dan ROIS FMIPA Unila. Magang Biro KRT HIMATIKA periode 2014/2015 dan anggota Biro KRT HIMATIKA periode 2015/2016, Anggota PSDM Garuda BEM FMIPA Unila periode 2014/2015, dan anggota BK BBQ ROIS FMIPA Unila periode 2015-2016.

MOTTO

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Sesunggunya bersama kesulitan ada kemudahan. Maka apabila engkau telah selesai dari suatu urusan tetaplah bekerja keras untuk urusan yang lain".

(*Asy-Syarh*; 5-7)

"Maka nikmat Tuhan-mu yang manakah yang kamu dustakan?"

(Q.S Ar-Rahman : 77)

"...Niscaya Allah akan mengangkat (derajat) orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha Teliti apa yang kamu kerjakan".

(Q.S. Al Mujaadilah : 11)

"Lakukanlah kebaikan sekecil apapun, karena engkau tidak pernah tahu kebaikan apa yang akan memasukkanmu ke syurga".

(Imam Hasan Albashri)

"Terbanglah yang tinggi tanpa merusak sayap orang lain"

(Penulis)

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dengan menyebut nama Allah Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang dan Segala Puji dan Syukur kepada Allah SWT
Kupersembahkan Karya sederhanaku ini Teruntuk:

Kedua Orang tua ku,
Ibunda tercinta Fitri Yeni dan ayahanda Hanafi yang tak henti-hentinya memberikan kasih sayangnya, do'a, dan motivasi dalam segala hal. Dan terima kasih atas kepercayaan yang telah ibunda dan ayahanda berikan selama ini.

Kedua Kakakku:
Putri Amalia dan Muhammad Fadhli

Ketiga adikku:
Nova Novitasari Hana Fitri, Bella Cantika Hana Fitri dan Ade Intan Permata Gia Hana Fitri

Guru-guru yang slalu membagi ilmunya untukku

Seluruh keluargaku, teman dan sahabatku

Almamater Unila

SANWACANA

Assalamualaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah puji dan syukur penulis ucapkan kehadirat Allah S.W.T, serta sholawat dan salam selalu tercurah pada nabi besar kita, Nabi Muhammad SAW. Atas segala rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul **"PERBANDINGAN METODE HEUN DAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT PADA MODEL PEMURNIAN ZAT TERLARUT DENGAN 2 TANGKI".** Pada Kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada :

1. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah banyak memberikan ilmu gagasan, bimbingan, bantuan, dukungan, arahan, saran dan kritik sehingga penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan gagasan, saran dan kritik.
3. Bapak Amanto, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembahas yang telah memberikan arahan, koreksi, saran dan kritik.
4. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D, selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan semangat, motivasi, bimbingan, kritik dan saran yang sangat membangun.
5. Ibu Dra. Wamiliana, M.A., Ph. D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A, Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika FMIPA Unila.
8. Ibunda Fitri Yeni dan Ayahanda Hanafi, terima kasih atas kasih sayang, do’a, nasehat, perhatian, kepercayaan dan dukungan yang tidak henti-hentinya.
9. Uni, Abang dan Adik-adikku tercinta. Putri Amalia, Muhammad Fadhli, Nova Novitasari Hana Fitri, Bella Cantika Hana Fitri dan Ade Intan Permata Gia Hana Fitri, yang telah memberikan dukungan dan do’anya.
10. Uphay ku (Usnul, Nia, Anin, Ica, Manda dan Qori), Bebeb-bebeb ku (Hizkia, Novi, Yani, Rose, Kadek, Yolan, Shindy, Nella, Nia dan Nur), Sahabat Kebaikan ku (Kodir dan Atika), B Ajah ku (Anin, Ira, Nanda, Nise, Ratna, Raka, Kiki, Julian), *teman sebimbingan skripsi ku (Intan Cantik)*, Uni Nita, Fais, Yunika, Yutia, Susan, Tika, Rahmad, dan seluruh teman-teman matematika ’14. *You are amazing. I’m so grateful to have you guys* ⋆.
11. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Semoga Allah SWT membalas semua kebaikan yang telah mereka berikan kepada penulis, Aamiin. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, akan tetapi sedikit harapan semoga skripsi yang sederhana ini dapat berguna dan bermanfaat khususnya bagi rekan-rekan mahasiswa dan para pembaca umumnya. Aamiin.

Bandar Lampung, ... Desember 2017
Penulis

Camelia Hana Fitri
NPM. 1417031032

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fenomena perubahan merupakan bentuk dari persamaan diferensial. Fenomena perubahan di dunia nyata sangat sering kita jumpai, bahkan setiap saat dapat kita rasakan. Pemodelan matematika tentang fenomena perubahan yang sangat sering digunakan yaitu laju pertumbuhan dan laju penyusutan. Salah satunya pada proses pemurnian suatu zat. Dalam proses pemurnian maka akan terjadi penyusutan pada zat tersebut.

Zat adalah sesuatu yang menempati ruang dan memiliki massa (m/v). Terdapat tiga jenis zat yaitu cair, gas dan padat. Dalam penelitian ini penulis akan menggunakan air murni dan zat terlarut pada 2 tangki yang akan dimurnikan sehingga hanya terdapat air murni saja. Model ini akan diselesaikan dengan persamaan diferensial biasa.

Persamaan diferensial biasa dapat diselesaikan dengan metode analitik(eksak) dan metode numerik. Metode analitik merupakan metode yang memiliki nilai galat/eror yang sama dengan nol, namun tidak semua model persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan analitik. Akan tetapi dengan metode numerik model yang sulit diselesaikan dengan metode analitik dapat terselesaikan. Metode numerik merupakan solusi yang menggunakan pendekatan alternatif yaitu untuk mendapatkan hampiran (aproksimasi) ke solusi eksak dengan menggunakan prosedur numerik.

Penyelesaian persamaan diferensial biasa dengan metode numerik dapat diselesaikan dengan metode Euler, metode Heun, metode Gauss-Seddle, metode Runge-Kutta dan lain-lain. Dalam penelitian ini penulis akan membandingkan metode Heun dan metode Runge-Kutta Orde 4 pada model pemurnian zat terlarut dengan dua tangki.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah membandingkan model pemurnian zat terlarut pada dua tangki dengan menggunakan metode Heun dan metode Runge-Kutta Orde 4.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Dapat digunakan untuk menyelesaikan model pemurnian zat terlarut pada dua tangki dengan metode Runge-Kutta orde empat.
2. Mengetahui metode terbaik diantara metode Heun dan metode Runge-Kutta Orde 4 dalam penyelesaian contoh kasus.
3. Memberikan sumbangan solusi terhadap permasalahan matematika, khususnya pada metode Runge-Kutta orde empat.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Matematika

Model matematika suatu fenomena adalah suatu ekspresi matematika yang diturunkan dari fenomena tersebut. Ekspresi dapat berupa persamaan, sistem persamaan atau ekspresi-ekspresi matematika yang lain seperti fungsi maupun relasi. Model matematika digunakan untuk menjelaskan karakteristik fenomena yang dimodelkannya, dapat secara kualitatif dan kuantitatif (Edi Cahyono, 2011).

Secara umum pemodelan matematika merupakan usaha perancangan rumusan matematika yang secara potensial menggambarkan bagaimana mendapatkan penyelesaian masalah matematika yang digeneralisasikan untuk diterapkan pada perilaku atau kejadian alam (Ripno Juli Iswanto, 2012).

2.2 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat variable bebas, variable tak bebas dan derivatif-derivatif dari variable tidak bebas terhadap variable bebasnya. Tingkat (orde) persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi dari derivatif yang terdapat dalam persamaan diferensial. Derajat suatu persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dari derivatie tertinggi dalam persamaan diferensial (Wardiman, 1981).

Persamaan diferensial dibagi dalam dua kelas yaitu biasa dan parsial. Persamaan diferensial biasa, disingkat PDB, adalah suatu persamaan diferensial yang *F*(*x*,*y*,*y'*,*y"*,...,*yn*) = 0 (Didit Budi Nugroho, 2011).

2.3 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan terhadap fungsi yang memuat satu variabel bebas. Jika x adalah fungsi dari t, maka contoh persamaan diferensial biasa adalah

$$\frac{dx}{dy} = t^2 \, cosx$$

Dimana persamaan tersebut memiliki order satu. Order dari persamaan diferensial adalah turunan tertinggi pada fungsi tak diketahui (peubah tak bebas) yang muncul dalam persamaan diferensial (Campbell and Haberman,2008).

2.4 Persamaan Diferensial Biasa (PDB) Linier

Persamaan diferensial biasa linier memiliki bentuk umum

$$a_n(t)\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = f(t) \qquad (2.1)$$

Dengan $a_n \neq 0, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ disebut koefisien persamaan diferensial. Fungsi $f(t)$ disebut input atau unsur nonhomogen. Jika $f(t)$ disebut input, maka solusi dari persamaan diferensial x_t biasanya disebut output. Jika ruas sebelah kanan $f(t)$ bernilai nol untuk semua nilai *t* dalam interval yang ditinjau, maka persamaan ini dikatakan homogen, sebaliknya dikatakan nonhomogen. Contoh persamaan diferensial biasa linier adalah

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3t$$

Yang merupakan persamaan diferensial biasa linier nonhomogen order satu (Hidayat,2006).

2.5 Persamaan Diferensial Biasa (PDB) Nonlinier

Jika persamaan diferensial biasa tidak dapat dinyatakan dalam bentuk umum persamaan diferensial biasa linier, yaitu pada (2.1), maka persamaan diferensial tersebut adalah persamaan diferensial biasa nonlinier. Contoh persamaaan diferensial biasa nonlinier

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3x^2 = \sin t$$

Yang merupakan persamaan diferensial biasa nonlinier nonhomogen order dua (Hidayat,2006).

2.6 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat *n* buah persamaan diferensial, dengan *n* buah fungsi yang tidak diketahui, dimana *n* merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua. Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling keterkaitan dan konsisten.

Bentuk umum dari suatu sistem *n* persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$\frac{dx_1}{dt} = g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variabel bebas dan t adalah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, … , $x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivatif fungsi x_n terhadap t, dan g, adalah fungsi yang tergantung pada variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan t (Neuhauser,2004).

2.7 Metode Numerik

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi).Metode numerik disebut juga sebagai alternatif dari metode analitik, yang merupakan metode penyelesaian persoalan matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku atau lazim. Disebut demikian, karena adakalanya persoalan matematika sulit diselesaikan atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik sehingga dapat dikatakan bahwa persoalan matematik tersebut tidak mempunyai solusi analitik. Sehingga sebagai alternatif, persoalan matematik tersebut diselesaikan dengan metode numerik. Perbedaan antara metode analitik dan metode numerik adalah metode analitik hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sederhana dan menghasilkan solusi yang sebenarnya atau solusi sejati. Sedangkan metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sangat kompleks dan nonlinier. Solusi yang dihasilkan dari penyelesaian secara numerik merupakan solusi hampiran atau pendekatan yang mendekati solusi eksak atau solusi sebenarnya. Hasil penyelesaian yang didapatkan dari metode numerik dan metode analitik memiliki selisih, dimana selisih tersebut dinamakan kesalahan (Triatmodjo, 2002).

2.8 Metode Heun (Euler yang Disempurnakan)

Sebuah program komputer untuk metode Euler dapat dimodifikasi untuk mengimplementasikan metode Euler pada subbab 6.2, kita cukup mengganti tahap 6 yaitu:

Tahap 6: $k_1 = g(x, y)$

$$k_2 = g(x + \Delta x, y + \Delta x . k_1)$$

$$y = y + (k_1 + k_2) . \frac{\Delta x}{2}$$

$$x = x + \Delta x$$

2.9 Metode Runge-Kutta

Secara umum, Runge-Kutta digunakan dalam penyelesaian masalah yang berhubungan dengan perhitungan numerik. Model umum dari metode Runge-Kutta tersebut yaitu :

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n)h$$

Dengan a_i adalah konstan dan k_i adalah :

$k_1 = f\ (x_i\ ,\ y_i)$

$k_2 = f\ (x_i +\ p_1 . h.\ y_i +\ q_{11} . k_1 . h)$

$k_3 = f\ (x_i +\ p_2 . h.\ y_i +\ q_{21} . k_1 . h +\ q_{22} . k_2 . h)$

$k_4 = f\ (x_i +\ p_{n-1} . h.\ y_i +\ q_{n-1,1} . k_1 . h +\ q_{n-1,2} . k_2 . h + \ldots . . +$

$\quad q_{n-1,n-1} . k_{n-1} . h)$

Dengan p_{n-1} dan $q_{n-1,2}$ adalah konstan.

Persamaan diatas adalah fungsi utama dari Runge-Kutta dan k_n adalah fungsi evaluasi dari metode Runge-Kutta (Singgih dan Erna, 2015).

2.10 Metode Runge-Kutta Orde 4

Metode Runge-Kutta mempunyai galat pemotongan lokal yang sebanding dengan Δx^5. Metode yang sangat terkenal untuk mengaproksimasi solusi masalah nilai awal orde pertama adalah metode Runge-Kutta orde ke empat. Prosedur metode Runge-Kutta orde ke empat untuk menyelesaikan masalah nilai awal tersebut sebagai berikut :

Tahap 1. Bagilah interval $x_0 \leq x \leq b$ menjadi p subinterval dengan menggunakan titik-titik yang berspasi sama :

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

$$\vdots$$

$$x_p = x_{p-1} + \Delta x = b$$

Tahap 2. Untuk $= 1, 2, 3, \dots, p$, dapatkan barisan aproksimasi berikut :

$$y_n = y_{n-1} + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}$$

dimana

$K_1 = g(x_{n-1}, y_{n-1}) \ \Delta x$

$K_2 = g\left(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, y_{n-1} + \frac{K_1}{2}\right) \ \Delta x$

$K_3 = g\left(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, y_{n-1} + \frac{K_2}{2}\right) \ \Delta x$

$K_4 = g(x_{n-1} + \Delta x, y_{n-1} + K_3) \ \Delta x$

Tahap 3. $K_1 = g(x, y) \ \Delta x$

$K_2 = g(x + 0{,}5 \ \Delta x \ , \ y + 0{,}5 \ \Delta x \ K_1) \ \Delta x$

$K_3 = g(x + 0{,}5 \ \Delta x \ , \ y + 0{,}5 \ \Delta x \ K_2) \ \Delta x$

$K_4 = g(x + \Delta x \ , \ y + \Delta x \ K_3) \ \Delta x$

$y = y + \left(\frac{1}{6}\right)(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$

$x = x + \Delta x$ (Kartono, 2011).

2.11 Metode Penyelesaian dengan Matriks

Pada sistem persamaan diferensial linier homogen 2 x 2 dengan koefisien konstanta berikut:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by \tag{5.2.5}$$

$$\frac{dy}{dt} = px + qy$$

di mana konstanta a, b, p, q diasumsikan bilangan riil. Sistem (5.2.5) dapat disajikan dalam bentuk matriks adalah

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{5.2.6}$$

di mana $x' = \frac{dx}{dt}$ dan $y' = \frac{dy}{dt}$

sistem (5.2.6) secara ringkas dapat ditulis dengan memperkenalkan vektor-vektor $X', X,$ dan matriks A, yaitu:

$$X' = A\,X \tag{5.2.7}$$

Setiap sistem linier homogen dengan koefisien konstanta mempunyai sebuah himpunan solusi fondamental. Himpunan fondamental ini adalah himpunan solusi yang bebas linier. Solusi umum untuk sistem linier homogen 2x2 dengan koefisien konstanta dinyatakan oleh

$$X(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t) \tag{5.2.8}$$

di mana C_1 dan C_2 adalah konstanta sembarang, $X_1(t)$ dan $X_2(t)$ adalah dua solusi yang bebas linier. Jadi $\{ X_1(t),\ X_2(t) \}$ adalah himpunan solusi fondamental untuk suatu sistem jika dan hanya jika merupakan himpunan yang bebas linear.

Karena dari bentuk sistem linier (5.2.7), kita dapat mengasumsikan sebagai solusi berbentuk

$$X = K\, e^{\lambda t} \text{ atau } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1\, e^{\lambda t} \\ k_2\, e^{\lambda t} \end{bmatrix} \qquad (5.2.9)$$

Kita hanya tertarik pada solusi tak trivial karena kita mencoba mendapatkan himpunan fondamental. Jadi himpunan itu tidak dapat memuat vektor nol (karena vektor nol adalah vektor tak bebas linier), k_1 dan k_2 keduanya tak nol. Agar dapat menentukan konstanta tak diketahui λ, k_1, dan k_2, maka solusi (5.2.9) harus memenuhi sistemnya. Dengan mendeferensialkan dan melakukan substitusi pada setiap kompenen vektor itu, kita memperoleh

$$\lambda\, k_1\, e^{\lambda t} = a\, k_1\, e^{\lambda t} + b\, k_2\, e^{\lambda t} \qquad (5.2.10)$$

$$\lambda\, k_2\, e^{\lambda t} = p\, k_1\, e^{\lambda t} + q\, k_2\, e^{\lambda t}$$

atau

$$(a-\lambda)k_1 + b\, k_2 = 0 \qquad (5.2.11)$$

$$p\, k_1 + (q-\lambda)k_2 = 0$$

atau dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ p & q-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.2.12}$$

Sistem (5.2.12) merupakan sistem persamaan linier homogen dan agar kita mendapat solusi tak trivial maka haruslah

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ p & q-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5.2.13}$$

$$\lambda^2 - (a+q)\,\lambda + (aq - bp) = 0 \tag{5.2.14}$$

Persamaan (5.2.14) dinamakan persamaan karakteristik dari sitem itu. Akar-akar dari persamaan karakteristik ini dinamakan nilai karakteristik dan dapat berbentuk bilangan riil berbeda, bilangan riil kembar serta bilangan kompleks.

Kasus 1. Solusi umum untuk nilai-nilai karakteristik riil dan berbeda ($\lambda_1 \neq \lambda_2$, riil)

Untuk setiap nilai karakteristik λ menghasilkan sebuah vektor karakteristikyang bersesuaian K (yang kompenen-kompenennya adalah k_1 dan k_2), yang berperanan menentukan vektor solusi

$$X = K\, e^{\lambda t} \tag{5.2.15}$$

Dalam cara ini kita mendapatkan himpunan solusi $\{ X_1,\ X_2 \}$ di mana

$$X_1 = K_1\, e^{\lambda_1 t} \tag{5.2.16}$$

$$X_2 = K_2\, e^{\lambda_2 t} \tag{5.2.17}$$

Karena $\lambda_1 \neq \lambda_2$ maka tidaklah mungkin untuk mendapatkan sebuah konstanta C untuk mana

$$X_1 = C\, X_2 \qquad (5.2.18)$$

(kehadiran konstanta C yang demikian akan mengakibatkan bahwa $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}$ adalah konstanta yang jelas tidak mungkin). Jadi $\{X_1,\ X_2\}$ adalah sebuah himpunan fondamental yang mengarah kepada solusi umum

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 \qquad (5.2.19)$$

Di mana C_1 dan C_2 adalah konstanta sembarang.

Dalam masalah nilai awal dan misalkan syarat awal

$$x(0) = x_0 \text{ dan } y(0) = y_0 \qquad (5.2.20)$$

Diberikan maka konstanta C_1 dan C_2 dapat ditentukan dengan menyelesaikan sistem aljabar 2x2 yang dihasilkan dari pensubstitusian syarat-syarat awal itu kedalam solusi umum (5.2.19)

Kasus 2. Solusi umum untuk nilai karakteristik riil dan berulang ($\lambda_1 = \lambda_2$, riil)

Untuk sistem persamaan diferensial linier homogen 2x2 dengan koefisien konstanta

$$\frac{dx}{dt} = ax + by \qquad (5.2.21)$$

$$\frac{dy}{dt} = px + qy$$

Kita mensubstitusikan solusi yang dicoba $x = k_1\, e^{\lambda t}$ dan $y = k_2\, e^{\lambda t}$ seperti sebelumnya maka kita mempunyai persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - (a+q)\,\lambda + (aq - bp) = 0 \qquad (5.2.22)$$

Jika deskriminan persamaan kwadratik ini adalah nol maka nilai-nilai λ adalah riil dan berulang. Jadi, $\lambda = (a+q)/2$ adalah akar riil dan berulang.

Kasus 3. Solusi umum untuk nilai karakteristik bilangan kompleks

Untuk sistem linier homogen 2x2 dengan koefisien konstanta (5.2.21), jika deskriminan persamaan kwadratik (5.2.22) adalah negatif maka nilai-nilai λ adalah bilangan kompleks konjugat. Himpunan fondamental diperoleh berdasarkan teorema yang berbunyi: jika $\lambda = a + ib$ merupakan sebuah nilai karakteristik dari sistem homogen 2x2 dan misalkan B_1 dan B_2 menotasikan vektor-vektor kolom dengan kompenen-kompenen riil dan K adalah vektor karakteristik yang bersesuaian dengan λ maka

$$X_1 = e^{at}(B_1 \cos bt + B_2 \ \sin bt) \qquad (5.2.23)$$

$$X_2 = e^{at}(B_2 \cos bt + B_1 \ \sin bt)$$

adalah sebuah himpunan fondamental dari solusi riil untuk sistem tersebut.

2.12 Sistem Otonom

Yang dimaksud dengan sistem otonom dua variabel mempunyai bentuk

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x,y) \qquad (5.3.1)$$

Dimana diasumsikan bahwa fungsi F dan G bersama-sama dengan turunan-turunan parsial pertama $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}$ merupakan fungsi kontinu atas daerah yang sesuai pada bidang $-xy$. Sistem fisis dikatakan otonom jika persamaan differensialnya tidak mengandung perubah bebas secara ekspisit. Penyelesaian $x(t), y(t)$ dari sistem otonom menyatakan suatu kurva C dalam bidang $-xy$. Persamaan differensial ini berorde dua,

$$f(y, y', y'') = 0 \tag{5.3.2}$$

Dapat dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan differensial orde pertama dengan mengambil transformasi

$$y' = v \tag{5.3.3}$$

dan oleh karena itu

$$y'' = v' \tag{5.3.4}$$

Persamaan (5.3.3) dan (5.3.4) membentuk sistem persamaan diferensial orde pada pertama

$$y' = v$$

$$v' = g(y, v) \tag{5.3.5}$$

dan penyelesaiannya adalah $y(t), v(t)$ yang menyatakan kurva pada bidang-yv (Kartono, 2012).

2.13 Jenis Titik Kritis

Selanjutnya kita akan menyelidiki jenis titik kritis secara analitik yaitu bagaimana menentukan jenis suatu titik kritis terasing P_0 dari suatu sistem otonom (5.3.1) tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan bahwa P_0 adalah titik $(0,0)$. Cara yang sering dipakai untuk menyelidiki jenis titik kritis ini adalah dengan cara pelinearan sebagai berikut :

Karena P_0 : $(0,0)$ adalah titik kritis maka $F(0,0) = 0$ dan $G(0,0) = 0$, akibatnya F dan G tidak mempunyai konstanta. Dari sisi kita dapat menuliskan suku linearnya secara eksplisit

$$x' = a_1x + b_1y + F_1(x, y)$$
$$y' = a_2x + b_2y + G_2(x, y) \qquad (5.3.7)$$

Sistem linier yang dihasilkan dengan pelinieran sistem (5.3.7) ini yaitu dengan menghilangkan F_1 dan G_2, sehingga diperoleh

$$x' = a_1x + b_1y$$
$$y' = a_2x + b_2y \qquad (5.3.8)$$

Atau dinyatakan dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (5.3.9)$$

Jika $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ maka jenis dan kestabilan P_0 sama dengan jenis dan kestabilan titik kritis (0 , 0) dari sistem linier. Dengan mensubtitusikan

$x = A\ e\lambda t$ dan $y = B\ e\lambda t$ (5.3.10)

Ke dalam sistem linear (5.3.8) dan menghilangkan faktor $e\lambda t$ maka kita mempunyai sistem persamaan linier homogen

$$\begin{bmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (5.3.11)$$

Sistem persamaan linier (5.3.11) akan mempunyai solusi non trival jika determinan matriks koefisiennya sama dengan nol, yaitu

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.3.12)$$

Jadi kita mempunyai persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \qquad (5.3.13)$$

Sekarang kita tulis dengan notasi yang baku,

$$p = a_1 + b_2 \,, q = a_1 b_2 - a_2 b_1 \text{ dan } \Delta = p^2 - 4q \qquad (5.3.14)$$

Dari sini, persamaan karakteristik (5.3.13) dapat ditulis sebagai persamaan

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0 \qquad (5.3.15)$$

Jika λ_1 , λ_2 adalah akar-akar karakteristik maka kita memperoleh

$$\lambda^2 - p\lambda + q = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

(5.3.16)

Sehingga

$$p = \lambda_1 + \lambda_2 \,, q = \lambda_1 \lambda_2 \text{ dan } \Delta = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 \qquad (5.3.17)$$

Berdasarkan $p, q\ dan\ \Delta$ ini kita dapat mencirikan $P_0 : (x_0, y_0)$ sebagai berikut :

- Stabil dan atraktif jika $p < 0\ dan\ q > 0$
- Stabil jika $p \leq 0\ dan\ q > 0$
- Tak stabil jika $p > 0\ atau\ q < 0$
- Titik simpul jika $q > 0\ dan\ \Delta \geq 0$
- Titik pelana jika $q < 0$
- Titik pusat jika $p = 0\ dan\ q > 0$
- Titik spiral jika $p \neq 0\ dan\ \Delta < 0$

Contoh menggunakan kriteria ini, misalkan $\Delta < 0\ dan\ p < 0 \,, q > 0$ maka titik P_0 merupakan titik spiral yang stabil dan atraktif (Kartono, 2012).

2.14 Model Fenomena Penyusutan

Pandanglah sebuah populasi partikel yang mencemari sebuah danau. Asumsikan bahwa danau itu mempunyai volume konstan Vm^3. Jika air danau itu bercampur dengan baik maka kecemaran akan hampir seragam dan banyaknya polutan pada pada waktu t merupakan jumlah gram pencemar per m^3 dari volume danau. Misalkan $C(t)$ adalah konsentrasi polutan pada waktu t dan r menotasikan laju air mengalir keluar dari danau dalam m^3 per hari. Karena volume danau adalah konstan, maka laju air yang masuk ke danau sama dengan laju air yang keluar dari danau dan ada keseimbangan antara turunnya hujan dengan penguapannya. Model matematika yang menjelaskan fenomena ini adalah

$Laju\ perubahan\ banyaknya\ polutan = banyaknya\ polutan\ masuk - banyaknya\ polutan\ keluar\ per\ satuan\ waktu$

$$\frac{d}{dt}(C(t)V) = 0 - r\,C(t)$$

$$\frac{1}{C(t)}\,\frac{dC(t)}{dt} = -\frac{r}{v}$$

(Kartono, 2012).

2.15 Model Penyusutan dan Pencampuran Menggunakan 2 Tangki

Masalah pencampuran yang telah dibahas pada bab sebelumnya akan dikembangkan dalam masalah pencampuran yang melibatkan dua atau lebih tangki larutan yang saling dihubungkan dengan pipa. Tangki-tangki ini memuat suatu bahan kimia, terlarut dalam suatu larutan, yang masing-masing kita misalkan seperti garam dan air. Pada waktu yang diberikan, kita tertarik pada jumlah garam dalam setiap tangki. Maka diperoleh model matematika

$$\frac{dx}{dt} = -(laju\ keluarnya\ konsentrasi\ larutan\ tertentu\ dari\ A)$$
$$= -(laju\ mengalir\ dari\ air)(konsentrasi\ larutan\ tertentu\ dalam\ air)$$

$$\frac{dy}{dt} = (laju\ konsentrasi\ larutan\ tertentu\ yang\ mengalir\ masulk\ ke\ B) - (laju\ keluarnya\ konsentrasi\ larutan\ tertentu\ dari\ B)$$

(Kartono, 2012).

2.16 Pengertian Larutan

Campuran homogen antara dua zat atau lebih dikenal sebagai larutan. Suatu campuran dikatakan homogen karena susunanya seragam sehingga tidak teramati adanya bagian-bagian yang berlainan, bahkan dengan mikroskop optik.

Larutan *(solution)* terdiri atas zat pelarut *(solvent)* dan satu atau lebih zat terlarut *(solute)*. Pelarut adalah medium tempat suatu zat lain melarut. Pelarut dikenal juga sebagai zat pendispersi, yaitu tempat menyebarnya partikel-partikel zat terlarut. Zat terlarut adalah zat yang terdispersi di dalam pelarut (Sumardjo, 2009).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2017/2018 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Merumuskan model pemurnian zat terlarut dengan 2 tangki
2. Menentukan contoh kasus dari model pemurnian zat terlarut dengan 2 tangki dengan mensimulasikan beberapa parameter yang mempengaruhi model tersebut.
3. Mencari solusi umum dengan metode Matriks
4. Menentukan jenis titik kritis dan potret fase menggunakan *software* Maple 17
5. Mencari solusi analitik dari model pemurnian zat terlarut dengan 2 tangki berdasarkan nilai-nilai parameter hasil simulasi.

6. Mencari solusi numerik dengan metode Heun menggunakan *software* MATLAB berdasarkan nilai-nilai parameter hasil simulasi kasus dengan cara sebagai berikut :
   a. Mendeklarasikan parameter-parameter dari contoh kasus tersebut kedalam *software* MATLAB R2013b.
   b. Membuat program metode Heun.
7. Mencari solusi numerik dengan metode Runge-Kutta Orde 4 menggunakan *software* MATLAB berdasarkan nilai-nilai parameter hasil simulasi kasus dengan cara sebagai berikut :
   a. Mendeklarasikan parameter-parameter dari contoh kasus tersebut kedalam *software* MATLAB R2013b.
   b. Membuat program metode Runge-Kutta Orde 4.
8. Mencari nilai *error* kedua metode numerik terhadap solusi analitik dari contoh kasus tersebut.
9. Menentukan metode terbaik dalam mengaproksimasikan solusi model pemurnian zat terlarut dengan 2 tangki.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan telah diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Jenis titik kritis yang menggambarkan model pemurnian zat terlarut pada 2 tangki adalah titik simpul stabil dan atraktif.
2. Dengan semua metode, tangki A hampir mendekati kemurnian (error $\leq$ 0,09) pada iterasi ke-185 yaitu menit ke 1110 (18 jam 30 menit) dan tangki B pada iterasi ke-281 yaitu menit ke 1686 (28 jam 6 menit).
3. Metode Runge-Kutta orde 4 lebih baik daripada metode Heun, karena hasil solusi hampiran metode Runge-Kutta orde 4 cukup mewakili hasil solusi eksak sebab memiliki nilai error(kesalahan) yang kecil serta garis yang terdapat pada grafik metode Runge-Kutta orde 4 dan grafik metode analitik terletak berhimpit. Sehingga hampir mendekati nilai sesungguhnya (eksak).

5.2 Saran

Pada penelitian metode pemurnian ini hanya digunakan 2 tangki sebagai media penampung air, sebaiknya penelitian yang akan datang menggukan 3 tangki atau lebih. Bagi yang menginginkan penerapan di dunia nyata, media penelitian dapat diganti dengan sungai, yaitu pemurnian polutan yang terdapat pada sungai secara alami. Bagi peneliti yang tertarik bisa mencari perbandingan antara metode numerik dan metode eksak ataupun membandingkan antar metode numerik.

DAFTAR PUSTAKA

Campbell. Haberman. 2008. *Introduction to Differential Equations with Dynamical Systems.* Princeton University Press, New Jersey.

Hidayat. 2006. *Persamaan Diferensial Parsial*. UPT Penerbitan Universitas Jember, Jember.

Iswanto, Ripno Juli. 2012. *Pemodelan Matematika Aplikasi dan Terapannya*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Kartono. 1994. *Persamaan Diferensial*. C.V Andi Offset, Yogyakarta.

Muhammad, Singgih Tahwin. dkk. 2015. Pengkajian metode extended runge kutta dan penerapannya pada persamaan diferensial biasa. *Jurnal Sains dan Seni ITS Vol. 4, No.1, (2015) 2337-3520 (2301-928X Print).*

Neuhauser. 2004. *Calculus for Biology and Medicine*. Pearson Education, New Jersey.

Nugroho, Didit Budi. 2011. *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Sumardjo, Damin. 2009. *Pengantar Kimia: Buku Panduan Kuliah Mahasiswa Kedokteran & Program Strata I Fakultas Bioeksakta*. EGC, Jakarta.

Triatmodjo. 2012. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Beta Offset, Yogyakarta.

Wardiman. 1981. *Persamaan Diferensial*. Citra Offset, Yogyakarta.