PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK TANPA *LOOP* BERORDE LIMA DENGAN GARIS PARALEL MAKSIMAL LIMA

(Skripsi)

Oleh

NANDRA ADI PRAYOGA

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

ABSTRACT

COUNTING THE NUMBER OF CONNECTED VERTEX LABELLED GRAPH ORDER FIVE WITHOUT LOOP WITH PARALLEL EDGES MAXIMUM FIVE

By

NANDRA ADI PRAYOGA

A graph *G* is connected graph if there exists at least one path between every pair of vertices in *G*. A labelled graph is the assignment of values or label at each vertex or each edge. The label given at each vertex called vertex labeling, the label given on each edge is called the edge labeling, and if the label is given on each edge and vertex is called total labeling. A loop is a edge with a starting vertex and the same end, a parallel edge being two or more edges with equal end vertexs, and a simple graph is a graph without loops and parallel edges. If given *n* vertex and *m* edge then graph that can be formed is connected graph, disconnected graph, simple graph or not simple graph. In this research obtained the formula for counting the number of connected vertex labelled graph order five without loop with parallel edges maximum five is

$$\left(G_{n,m}\right) = \sum_{g\geq n-1}^{m} N(G_{n,m,g})\ ;\ m \geq g$$

with g is the number of edge rather than parallel edges.

Keywords: graph, connected graph, labelled graph, loop, and parallel edges

ABSTRAK

PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK TANPA *LOOP* BERORDE LIMA DENGAN GARIS PARALEL MAKSIMAL LIMA

Oleh

NANDRA ADI PRAYOGA

Suatu graf G disebut graf terhubung jika terdapat sekurang-kurangnya ada satu *path* yang menghubungkan sepasang titik di G. Graf berlabel adalah graf yang setiap titik atau garisnya diberi nilai atau label. Label yang diberikan pada titik disebut sebagai pelabelan titik, label yang diberikan pada tiap garis disebut pelabelan garis, dan jika label diberikan pada tiap garis dan titik disebut sebagai pelabelan total. *Loop* adalah garis yang titik awal dan ujungnya sama, garis paralel adalah dua garis atau lebih yang titik-titik ujungnya sama, dan graf sederhana adalah suatu graf tanpa *loop* dan garis paralel. Jika diberikan n titik dan m garis, banyak graf yang dapat dibentuk adalah graf terhubung, graf tidak terhubung, graf sederhana ataupun graf tidak sederhana. Pada penelitian ini diperoleh rumus untuk menghitung banyaknya graf terhubung berlabel titik tanpa *loop* berorde lima dengan garis paralel maksimal lima adalah

$$N\left(G_{n,m}\right) = \sum_{g\geq n-1}^{m} N(G_{n,m,g})\ ;\ m \geq g$$

dengan g adalah jumlah garis bukan paralel.

Kata kunci : graf, graf terhubung, graf berlabel, *loop*, dan garis paralel

PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK TANPA *LOOP* BERORDE LIMA DENGAN GARIS PARALEL MAKSIMAL LIMA

Oleh

NANDRA ADI PRAYOGA

Skripsi
Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS
Pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Skripsi	: **PENENTUAN BANYAKNYA GRAF TERHUBUNG BERLABEL TITIK TANPA *LOOP* BERORDE LIMA DENGAN GARIS PARALEL MAKSIMAL LIMA**
Nama Mahasiswa	: **NANDRA ADI PRAYOGA**
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1417031081
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

2. Mengetahui

Ketua Jurusan Matematika

Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **20 Desember 2017**

PERNYATAAN

Nama : Nandra Adi Prayoga

Nomor Induk Mahasiswa : 1417031081

Program Studi : Matematika

Jurusan : Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Tanpa *Loop* Berorde Lima dengan Garis Paralel Maksimal Lima"** adalah hasil karya saya sendiri. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 20 Desember 2017

Penulis

Nandra Adi Prayoga
NPM. 1417031081

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Nandra Adi Prayoga, dilahirkan di Seputih Raman pada tanggal 27 Januari 1996, dan merupakan anak kedua dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Sujimin dan Ibu Muszaidah. Penulis memiliki kakak perempuan bernama Erly Pratama Dahmintika dan adik laki-laki bernama Mohamad Irvan Salim.

Penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri 1 Bratasena Adiwarna Tulang Bawang pada tahun 2008, pendidikan menengah pertama di SMP Negeri 2 Kotagajah Lampung Tengah yang diselesaikan pada tahun 2011, pendidikan menengah atas di SMA Negeri 3 Metro Kota Metro yang diselesaikan pada tahun 2014. Pada tahun 2014 penulis melanjutkan pendidikan Strata Satu (S1) Program Studi S1 Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung Bandar Lampung melalui jalur SBMPTN.

Penulis menjadi anggota bidang Keilmuan HIMATIKA FMIPA Universitas Lampung pada periode 2015-2016 dan 2016. Pada bulan Januari – Februari 2017 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Segala Mider Kecamatan Pubian Kabupaten Lampung Tengah. Pada bulan Juli – Agustus 2017 melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Kantor Pos Indonesia Pahoman Bandar Lampung.

KATA INSPIRASI

Orang lain saja bisa melakukannya kenapa kamu sudah berkata tidak bisa, berusahalah semaksimal mungkin pasti kamu juga bisa.

(Muszaidah)

Tetap tersenyumlah walau kau sedang merasa sakit, tetap berusahalah walau kata orang itu sia-sia, sesungguhnya usaha tak akan menghianati hasil.

(Nandra)

Usaha dan keberanian tidaklah cukup tanpa tujuan dan arah perencanaan

(John F. Kennedy)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil 'alamiin dengan penuh rasa syukur kepada Allah SWT yang telah memberikan petunjuk dan kemudahan untuk menyelelsaikan studi Ku ini, kupersembahkan hasil karyaku untuk orang-orang yang selalu mengasihi, menyayangi, dan memotivasiku dalam segala hal.

Bapak dan Ibu Ku tercinta yang selalu mendidik, mendoakan, memberi semangat dan motivasi, dan hal lain yang tak dapat Ku ungkapkan dengan kata-kata .

Kakak-kakak dan Adik-adik tercinta yang banyak membantu,menemani, memotivasi dan memberi kasih sayang kepadaku agar aku bisa menjadi seseorang yang bermanfaat bagi kalian dan orang lain.

Dosen Pembimbing dan Penguji yang sangat berjasa dan selalu memberikan motivasi kepada penulis untuk segera menyelesaikan tugas-tugas Ku.

Sahabat dan teman-teman ku, Terimakasih atas kebersamaan, keceriaan, canda dan tawa serta doa dan semangat yang telah diberikan kepadaku.

Almamater Universitas Lampung.

SANWACANA

Alhamdulillahi Robbil ‘alamin, Puji dan syukur Penulis ucapkan kepada Allah SWT, yang selalu melimpahkan rahmat dan kasih sayang-Nya, sehingga Penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Titik Tanpa *Loop* Berorde Lima dengan Garis Paralel Maksimal Lima” yang menjadi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains (S.Si.) pada program studi S1 Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung. Sholawat serat salam senantiasa tetap tercurah kepada nabi Muhammad SAW, tuntunan dan tauladan utama bagi seluruh umat manusia.

Dalam penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu penulis dalam memberikan bimbingan, dorongan, dan saran-saran dalam menyelesaikan skripsi ini. Sehingga dengan segala ketulusan dan kerendahan hati pada kesempatan ini Penulis terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I yang telah meluangkan waktu, memberikan saran, memotivasi, dan membimbing Penulis selama penulisan skripsi.
2. Ibu Dra. Wamiliana, MA., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing II dan Ketua Jurusan Matematika yang telah meluangkan waktu, memberikan saran, memotivasi dan membimbing dalam menyelesaian skripsi ini.

3. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji dan koordinator Skripsi Jurusan Matematika yang telah memotivasi, mengevaluasi dan memberikan saran dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Ibu Dian Kurniasari, M.Si., M.Sc. selaku pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan, memotivasi dan bimbingan selama perkuliahan.
5. Bapak Prof. Warsito, S.SI., D.E.A., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
6. Bapak Prof. Dr. Hasriadi Mat Akin, M.P., selaku Rektor Universitas Lampung.
7. Kedua Orang Tua dan keluarga besar penulis yang senantiasa mendukung dan mengupayakan segala hal yang terbaik untuk penulis tanpa mengenal lelah.
8. Darma, Lucia, Nourma, Vivin, dan Izul yang selama ini selalu memberi semangat, keceriaan, motivasi, dan semua kenangan indah.
9. Kasandra, Otin, Septi, Riyana, Rere, Annisa TW, Shelvi, Fara, Vindi, Nevi, Zhofar, Agus, Rahmad, Ketut dan seluruh mahasiswa jurusan Matematika Angkatan 2014 dan semua pihak yang terlibat dalam penyusunan skripsi ini.

Akhir kata, Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat Penulis harapkan serta semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Bandar Lampung, 20 Desember 2017
Penulis

Nandra Adi Prayoga

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu pokok bahasan yang hingga kini memiliki banyak terapan dalam berbagai bidang, diantaranya pada bidang fisika, teknik, sosial, kimia, dan biologi. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut, yaitu dengan menyatakan objek tersebut sebagai titik (noktah atau bulatan) dan hubungan antara objek sebagai garis atau sisi.

Konsep teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonard Euler pada tahun 1736, ketika menyelesaikan permasalahan jembatan Konigsberg, Kaliningrad, Rusia. Di kota tersebut terdapat sungai Pregal yang membelah kota menjadi empat daratan yang terpisah. Daratan tersebut dihubungkan oleh tujuh jembatan. Warga kota tersebut ingin melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat awal. Euler menyatakan dengan permodelan tertentu bahwa hal tersebut tidak mungkin terjadi. Hal tersebut dapat terjadi jika banyaknya jembatan berjumlah genap. Bentuk permodelan tersebut yang kemudian menjadi latar belakang munculnya konsep teori graf yang ada saat ini.

Setelah masa Euler, bermunculan peneliti-peneliti yang mengkaji tentang teori graf baik murni maupun terapan. Sebagai contoh penelitian yang dilakukan oleh Harary dan Palmer yang di publikasikan pada tahun 1973 mengenai perhitungan banyaknya graf. Namun penelitian yang dilakukannya belum bisa memberikan banyak solusi untuk perhitungan graf seperti untuk menghitung banyaknya graf terhubung maupun tak terhubung yang berlabel tanpa garis *loop* yang dapat dibentuk dari n titik dan m garis yang diberikan. Zuliana (2016) berhasil menentukan banyaknya graf terhubung berlabel tanpa garis paralel dengan $n = 5$ serta $m \geq 4$. Oleh karenanya penulis tertarik untuk meneliti banyaknya graf terhubung berlabel titik tanpa *loop* dengan $n = 5$ serta $m \geq 4$ dan garis paralel maksimal 5.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan banyaknya graf terhubung berlabel titik tanpa *loop* dengan $n = 5$ serta $m \geq 4$ dan garis paralel maksimal 5.

1.3 Manfaat

Adapun manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah :

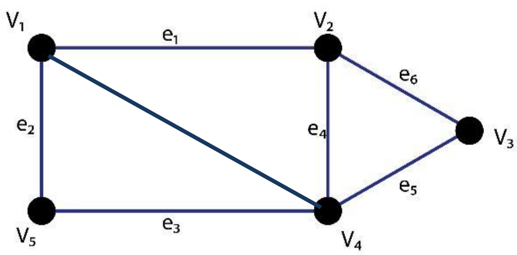
1. Memperluas pengetahuan teori graf khususnya graf terhubung.
2. Sebagai rujukan atau sumber referensi bagi pembaca untuk penelitian selanjutnya dan dapat memberikan motivasi dalam mempelajari dan mengembangkan ilmu matematika di bidang teori graf.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi, istilah-istilah yang berhubungan dengan materi yang akan dibahas pada penelitian ini.

2.1 Konsep Dasar Teori Graf

Istilah - istilah yang digunakan pada sub bab ini merujuk pada Deo (1989). Suatu graf G terdiri dari dua struktur *V(G)* dan *E(G)* dengan *V(G)* adalah himpunan tak kosong yang elemen-elemennya berupa titik dan *E(G)* adalah himpunan pasangan tak terurut dari titik-titik di *V(G)* yang disebut sebagai garis atau *edge*. Banyaknya himpunan titik *V(G)* disebut orde dari suatu graf *G*.

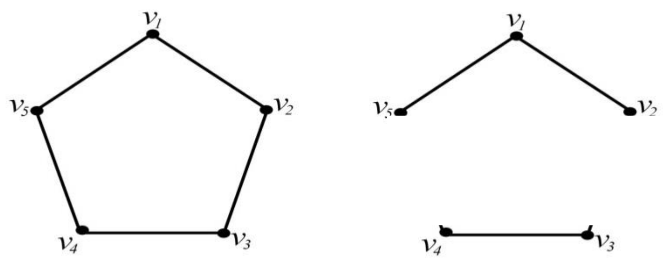


Gambar 2.1. Graf dengan 5 titik dan 6 sisi

Adapun konsep dasar teori graf yang perlu diketahui sebelumnya adalah mengenai graf, graf terhubung dan tak terhubung, *loop*, garis paralel, dan graf sederhana, *adjacent* (bertetangga) dan *incident* (menempel), *walk*, *path*, dan *cycle*, serta *degree* (derajat) dan isomorfis.

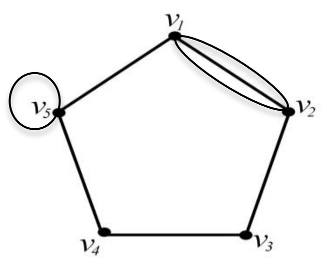
Walk adalah barisan berhingga dari suatu titik dan garis yang dimulai dan diakhiri dengan titik, sedemikian sehingga setiap garis menempel pada titik sebelum dan sesudahnya. *Walk* yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *close walk*. *Walk* yang melewati titik yang berbeda-beda disebut sebagai *path* (lintasan). *Path* yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *cycle*.

Suatu graf G disebut graf terhubung (*connected graph*) jika terdapat sekurang-kurangnya ada satu *path* yang menghubungkan sepasang titik di G. Suatu graf tidak terhubung G merupakan graf yang terdiri dari dua atau lebih graf terhubung.

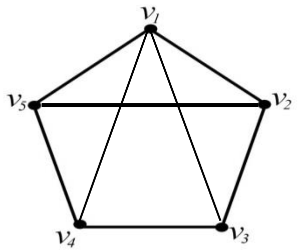


Gambar 2.2 Contoh graf terhubung dan graf tak terhubung

Loop adalah garis yang titik awal dan ujungnya sama sedangkan garis paralel adalah dua garis atau lebih yang titik-titik ujungnya sama (Gambar 2.3). Graf sederhana adalah suatu graf tanpa *loop* dan garis paralel (Gambar 2.4).



Gambar 2.3 Contoh graf dengan *loop* dan garis parallel



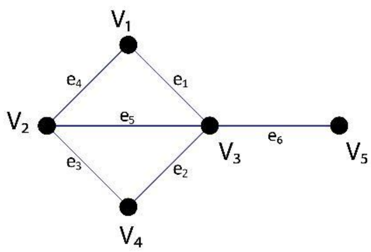
Gambar 2.4 Contoh graf sederhana

Suatu garis dikatakan menempel (*incident*) dengan titik u jika titik u merupakan salah satu ujung dari garis tersebut. Dua titik u, v dikatakan bertetangga (*adjacent*) satu sama lain jika kedua titik tersebut dihubungkan oleh garis yang sama dan dinotasikan dengan (u,v).

Derajat suatu titik pada graf G adalah banyaknya sisi yang menempel dengan titik v yang dinotasi $d(v)$. Titik terpencil adalah titik dengan $d(v) = 0$, karena tidak ada satupun garis yang menempel dengan garis tersebut. Satu garis yang kembali ke titik semula (merupakan *loop*) dihitung berderajat dua. Secara umum, jika terdapat g *loop* dan e sisi bukan *loop* yang menempel dengan titik *v*, maka derajat titik *v* adalah :

$$d(v) = 2g + e$$

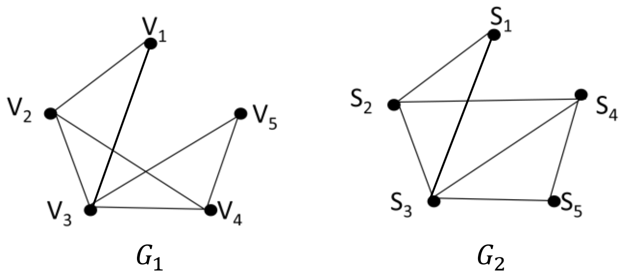
Titik yang berderajat satu disebut daun. Dengan kata lain, daun hanya bertetangga dengan satu titik.



Gambar 2.5 Derajat pada graf

Contoh: Pada Gambar 2.5, $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 4$, $d(v_4) = 2$, $d(v_5) = 1$ dan v_5 merupakan daun, karena $d(v_5) = 1$.

Dua graf dikatakan isomorfis jika memiliki jumlah garis dan titik yang sama dan mempertahankan sifat ketetanggaannya walaupun digambarkan dengan cara yang berbeda.



Gambar 2.6 Contoh graf yang saling isomorfis

Kedua graf pada Gambar 2.6 isomorfis karena:

1. Banyaknya titik dan garisnya sama yaitu 5 titik dan 7 garis.
2. Banyaknya derajat tiap titiknya sama yaitu 2 titik berderajat 2, 2 titik berderajat 3, dan 1 titik berderajat 4.
3. Mempertahankan ketetanggaan. Hal ini dapat dilihat dengan mendefinisikan suatu fungsi bijektif. Untuk contoh pada Gambar 2.6 fungsi bijektif didefinisikan sebagai berikut :
   - $x: V(G_1) \to V(G_2)$ dan $y : E(G_1) \to E(G_2)$

     Dalam G_1, ada 4 garis yang keluar dari v_3. Titik yang memiliki sifat seperti itu dalam G_2 adalah titik s_3 , sehingga dibuat fungsi *x* sedemikian sehingga :

$$x(v_3) = s_3\,, x(v_1) = s_1\,, x(v_2) = s_2\,, x(v_4) = s_4\,, x(v_5) = s_5$$

fungsi *y* adalah sebagai berikut :

$$y\big((v_1, v_2)\big) = (s_1, s_2)\ ;\ y\big((v_1, v_3)\big) = (s_1, s_3)$$

$$y\big((v_2, v_4)\big) = (s_2, s_4)\ ;\ y\big((v_2, v_3)\big) = (s_2, s_3)$$

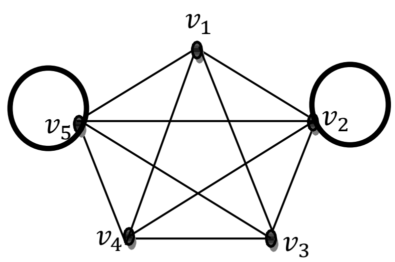
$$y\big((v_3, v_4)\big) = (s_3, s_4)\ ;\ y\big((v_3, v_5)\big) = (s_3, s_5)$$

$$y\big((v_4, v_5)\big) = (s_4, s_5)$$

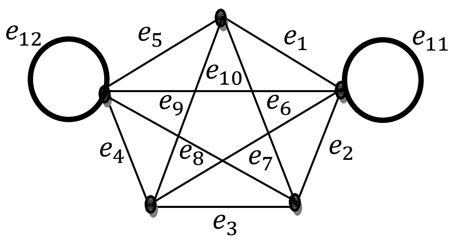
Pada fungsi *x* dan *y* dapat dilihat bahwa G_1isomorfis dengan G_2

2.2 Pelabelan Graf

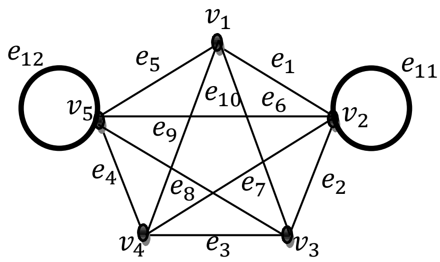
Graf berlabel adalah graf yang setiap titik atau garisnya diberi nilai atau label. Label pada tiap titik dapat berbeda-beda bergantung pada masalah yang dimodelkan dengan graf. Label yang diberikan pada titik disebut sebagai pelabelan titik (Gambar 2.7), label yang diberikan pada tiap garis disebut pelabelan garis (Gambar 2.8), dan jika label diberikan pada tiap garis dan titik disebut sebagai pelabelan total (Gambar 2.9).



Gambar 2.7 Contoh graf dengan pelabelan titik



Gambar 2.8 Contoh graf dengan pelabelan garis



Gambar 2.9 Contoh graf dengan pelabelan total

2.3 Konsep Dasar Teknik Pencacahan

Adapun yang menjadi konsep dasar teknik pencacahan adalah:

1. Faktorial

Misalkan *n* adalah bilangan bulat positif. Besaran n faktorial (symbol $n!$) didefinisikan sebagai hasil kali semua bilangan bulat antara *n* hingga 1. Untuk *n* = 0, nol faktorial didefinisikan =1 (Siang,2002).

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$$

$$0! = 1$$

2. Kombinasi

Misalkan himpunan S memiliki $|S| = n$ elemen. Banyaknya himpunan bagian S yang terdiri dari r ($r \leq n$) disebut kombinasi *n* objek yang diambil sebanyak r objek sekaligus. Simbolnya adalah $\binom{n}{r}$ atau C(*n*,*r*) atau ${}_nC_r$. Banyaknya kombinasi yang dimaksud dapat dinyatakan dalam persamaan

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Dalam himpunan bagian yang dipilih, urutan kemunculan anggotannya tidaklah diperhatikan. Hal yang diperhatikan adalah objek yang muncul (Siang,2002).

3. Permutasi

Permutasi r objek dari n objek adalah suatu urutan r objek yang diambil dari n objek yang berbeda yang dapat dibentuk. Dalam permutasi, pengulangan tidak dperbolehkan. Artinya, objek yang telah dipilih tidak dapat dipilih kembali. Secara umum, permutasi r objek dari n buah objek dapat dihitung dengan persamaan

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Jika r = n, maka persamaan menjadi

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

$P(n,n)$ sering disebut permutasi n objek karena permutasi tersebut menyusun keseluruhan objek yang ada (Siang,2002).

4. Barisan Aritmatika Orde Tinggi

Barisan aritmatika tingkat ke-p adalah sebuah barisan yang memiliki selisih yang sama setiap suku berurutannya setelah p tingkatan. Tingkatan pada barisan aritmatika akan menghasilkan persamaan dengan pangkat tertingginya adalah p. Pangkat tertinggi dari suatu persamaan merupakan orde dari persamaan tersebut.

Fungsi polinomial adalah fungsi yang mengandung banyak suku (polinom) dalam variabel bebasnya. Bentuk umum persamaan polinomial pada deret aritmatika orde ke-p adalah

$$\mathrm{P}_p(m) = \alpha_p m^p + \alpha_{p-1} m^{p-1} + \alpha_{p-2} m^{p-2} + \cdots + \alpha_2 m^2 + \alpha_1 m + \alpha_0$$

Dengan koefisien tertentu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha_p, \alpha_{p+1}$. Polinom ini mempunyai derajat sebesar *p*, jika koefisien penentunya $\alpha_1 \neq 0$ (Conte dan Boor, 1980).

5. *Cramer's Rule*

Metode berikut memberikan rumus untuk solusi dari sistem linear tertentu dengan *n* persamaan dan *n* faktor yang tidak diketahui (Anton dan Rorres, 2004). Jika $Ax = b$ adalah suatu sistem dari *n* persamaan linear dengan *n* faktor yang tidak diketahui sedemikian rupa sehingga $\det(\mathrm{A}) \neq 0$, maka sistem ini memiliki solusi yang unik. Solusinya adalah

$$x_1 = \frac{\det(\mathrm{A}_1)}{\det(\mathrm{A})}, x_2 = \frac{\det(\mathrm{A}_2)}{\det(\mathrm{A})}, \dots\dots, x_n = \frac{\det(\mathrm{A}_n)}{\det(\mathrm{A})}$$

dimana A_j adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri-entri pada kolom ke-*j* dari A dengan entri-entri pada matriks $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, dengan *j* = 1, 2,…,*n*

III. METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan diberikan tempat dan waktu penelitian, penelitian yang telah dilakukan yang berkaitan, serta metode yang digunakan dalam penelitian ini.

3.1 Penelitian yang Telah Dilakukan

Diberikan $n, m \in N$ dengan $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$

1. Graf g_n yang merupakan graf sederhana dengan n buah titik, maka banyaknya graf g_n adalah

$$g_n = 2^{\binom{n}{2}}$$

2. Graf $g_n\ (m)$ dari graf sederhana dengan n buah titik dan m buah garis, maka banyaknya graf $g_n(m)$ adalah

$$g_n\ (m) = \binom{\binom{n}{2}}{m}$$

(Agnarsson dan Greenlaw, 2007).

Alkarim (2014) mendapat hasil sebagai berikut :

Banyaknya graf yang tidak memuat *loop* yang terbentuk jika diberikan n titik dan m garis dengan n = 2, 3, 4 dan m = 1, 2, 3,…,9 maka dapat disimpulkan rumus graf yang berlabel tanpa *loop* dengan k tertentu adalah :

$$N\left(G_{n,m,k}\right) = \binom{m-1}{k-1}\binom{\binom{n}{2}}{k}$$

Dengan

$N\left(G_{n,m,k}\right)$ = Banyaknya graf berlabel tanpa *loop*

m = banyaknya garis yang diberikan

n = banyaknya titik yang diberikan

k = banyaknya sisi yang menempel pada titik (sisi rangkap dihitung 1)

Zuliana (2016) mendapat hasil sebagai berikut :

Diberikan $n, m \in N$ dengan $4 \leq m \leq 10$

Berdasarkan observasi dari banyaknya graf terhubung berlabel tanpa garis paralel dengan orde 5 berdasarkan jumlah *g*, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Untuk *n = 5* ; *g = 4*

$$N\left(Gl_{n,m,4}\right) = 125 \times \binom{m}{4}$$

2. Untuk *n = 5* ; *g = 5*

$$N\left(Gl_{n,m,5}\right) = 222 \times \binom{m-1}{4}$$

3. Untuk *n = 5* ; *g = 6*

$$N\left(Gl_{n,m,6}\right) = 205 \times \binom{m-2}{4}$$

4. Untuk *n = 5* ; *g = 7*

$$N\left(Gl_{n,m,7}\right) = 110 \times \binom{m-3}{4}$$

5. Untuk *n = 5* ; *g = 8*

$$N\left(Gl_{n,m,8}\right) = 45 \times \binom{m-4}{4}$$

6. Untuk *n = 5* ; *g = 9*

$$N\left(Gl_{n,m,9}\right) = 10 \times \binom{m-5}{4}$$

7. Untuk *n = 5* ; *g = 10*

$$N\left(Gl_{n,m,10}\right) = 1 \times \binom{m-6}{4}$$

Jumlah graf terhubung berlabel tanpa garis paralel berorde lima secara umum adalah:

$$N\left(Gl_{n,m}\right) = \sum_{g \geq n-1}^{m} N(Gl_{n,m,g})$$

dengan:

n = jumlah titik pada graf

m = jumlah garis pada graf

g = jumlah garis bukan *loop*

Wamiliana,dkk. (2016) mendapat hasil sebagai berikut :

Jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 5$ dan $m \geq 1$ dapat dirumuskan secara umum, yaitu:

$$\begin{aligned} N\left(G'_{5,m}\right) &= N\left(G'_{5,m}\right) + \sum_{g=1}^{6} N(G'_{5,m,g}) \\ &= \binom{m+4}{4} + N\left(G'_{5,m,1}\right) + N\left(G'_{5,m,2}\right) + N\left(G'_{5,m,3}\right) + N\left(G'_{5,m,4}\right) + \\ &\quad N\left(G'_{5,m,5}\right) + N(G'_{5,m,6}) \\ &= \binom{m+4}{4} + 10 \binom{m+3}{4} + 45 \times \binom{m+2}{4} + 120 \times \binom{m+1}{4} + \\ &\quad 85 \times \binom{m}{4} + 30 \times \binom{m-1}{4} + 5 \times \binom{m-2}{4} \end{aligned}$$

Dengan:

$N(G'_{5,m})$ = jumlah graf tak terhubung berlabel tanpa garis paralel untuk $n = 5$ dan $m \geq 1$.

3.2 Waktu dan Tempat

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung pada semester ganjil pada tahun ajaran 2017/2018.

3.3 Metodologi Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

1. Mengumpulkan bahan literatur serta studi kepustakaan yang berhubungan dengan graf.
2. Menggambar graf terhubung berlabel titik tanpa garis *loop* untuk $n = 5$ dengan $4 \leq m \leq 10$ dimana n adalah titik dan m adalah garis.
3. Mengelompokkan graf terhubung untuk n titik dan m garis yang sama.
4. Menghitung jumlah graf terhubung yang terbentuk.
5. Melihat pola banyaknya graf yang terbentuk.
6. Menentukan rumus umum.
7. Membuktikan rumus yang terbentuk.
8. Menarik kesimpulan

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan observasi dari graf terhubung berlabel titik tanpa *loop* berorde lima dengan garis paralel maksimal lima berdasarkan jumlah g, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Untuk n= 5 ; g = 4

$$N(G_{n,m,4}) = 125 \times C_3^{(m-1)}$$

2. Untuk n= 5 ; g = 5

$$N(G_{n,m,5}) = 222 \times C_4^{(m-1)}$$

3. Untuk n= 5 ; g = 6

$$N(G_{n,m,6}) = 205 \times C_5^{(m-1)}$$

4. Untuk n= 5 ; g = 7

$$N(G_{n,m,7}) = 110 \times C_6^{(m-1)}$$

5. Untuk n= 5 ; g = 8

$$N(G_{n,m,8}) = 45 \times C_7^{(m-1)}$$

6. Untuk n= 5 ; g = 9

$$N(G_{n,m,9}) = 10 \times C_8^{(m-1)}$$

7. Untuk n= 5 ; g = 10

$$N(G_{n,m,10}) = 1 \times C_9^{(m-1)}$$

Jumlah graf terhubung berlabel titik tanpa *loop* berorde lima dengan garis paralel maksimal lima secara umum dapat dicari dengan

$$N(G_{n,m}) = \sum_{g \geq n-1}^{m} N(Gp_{n,m,g})$$

dengan:

n = jumlah titik pada graf

m = jumlah garis pada graf

g = jumlah garis bukan paralel

5.2. Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan untuk menentukan rumus umum jumlah graf terhubung berlabel berorde lebih besar dari lima tanpa *loop*.

DAFTAR PUSTAKA

Agnarsson, Geir and Raymond Greenlaw . 2007. *Graph Theory Modeling, Applications, And Algorithms.* Pearson/Prentice education Inc., New Jerse.

Alkarim, Hasby. 2014. Penentuan Banyaknya Graf Berlabel Tanpa *Loop*. Skripsi. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Bandar Lampung.

Anton, Howard and Chris Rorres. 2005. *Aljabar Linier Elementer edisi 8.* Erlangga. Jakarta.

Conte, S.D. and Carl de Boor. 1980. *Dasar-dasar analisis numerik suatu pendekatan algoritma*. Edisi Ketiga. Erlangga, Jakarta.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall Inc., New York.

Harary, F. and Palmer, E.M. 1973. *Graphical Enumeration.* Academic Press, Inc. (London) Ltd., London.

Siang, Jong Jek. 2002. Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada ilmu Komputer. Andi Offset. Yogyakarta.

Wamiliana, Amanto, dan Grita Tumpi N. 2016. *Counting the Number of Disconnected Labeled Graphs of Order Five Without Paralel Edges*. Journal INSIST Vol.1, No.1, eISSN. Page 4-7.

Zuliana, Eni. 2016. Penentuan Banyaknya Graf Terhubung Berlabel Berorde lima tanpa garis paralel. Skripsi. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung, Bandar Lampung.