

**PENDUGAAN PARAMETER PROPORSI AREA KECIL BERDASARKAN  
*GENERALIZED LINEAR MIXED MODEL***

**(Skripsi)**

**Oleh**

**NINA DAMAYANTI**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMPUNG  
2017**

## ABSTRAK

### PENDUGAAN PARAMETER PROPORSI AREA KECIL BERDASARKAN *GENERALIZED LINEAR MIXED MODEL*

Oleh

**Nina Damayanti**

Pendugaan secara langsung pada area kecil dapat menghasilkan keragaman yang besar karena informasi yang diperoleh sangat sedikit atau bahkan tidak terdapat informasi sama sekali mengenai karakteristik populasi yang akan diamati. Alternatif metode lain yang dapat digunakan yaitu melalui pendugaan tidak langsung dengan menghubungkan area kecil tersebut dengan area lain melalui model yang sesuai dengan tujuan penelitian yang dilakukan. Terdapat beberapa metode pendugaan pada area kecil, diantaranya *Empirical Bayes (EB)*, *Hierarchical Bayes (HB)* dan *Best Linear Unbiased Predictor (BLUP)*. Pada penelitian ini dilakukan pendugaan parameter proporsi area kecil menggunakan metode *BLUP* dengan menghubungkan salah satu model dasar area kecil yaitu *Basic Area Level (type A) Model* dengan *Generalized Linear Mixed Model (GLMM)*. Sebelum menduga parameter proporsi dari model area kecil, terlebih dahulu dilakukan pendugaan terhadap parameter dari *GLMM* dengan *Generalized Least Square (GLS)*. Kajian empirik dilakukan terhadap proporsi keluarga prasejahtera di Kota Bandar Lampung dengan bantuan *software R*.

**Kata Kunci :** Pendugaan Area Kecil, *Best Linear Unbiased Predictor (BLUP)*, *Generalized Linear Mixed Model (GLMM)* dan *Generalized Least Square (GLS)*.

## **ABSTRACT**

### **ESTIMATION OF PROPORTION PARAMETERS OF SMALL AREA BASE ON GENERALIZED LINEAR MIXED MODEL**

**By**

**Nina Damayanti**

Direct estimation of small area can result in great because the information obtained has little or no information about the characteristics of the population to be observed. Another alternative method can be used is through indirect estimation by connecting the small area with other areas through the model in accordance with the purpose of research conducted. There are several method of small area, including Empirical Bayes (EB), Hirarchical Bayes (HB) and Best Linear Unbiased Predictor (BLUP). In this research, the parameter of proportion of small area using BLUP method is done by connecting one of the basic model of small area, namely Basic Area Level (type A) Model with Generalized Linear Mixed Model (GLMM). Before estimating the proportion parameters of the small area model, we first estimated the parameters of GLMM with Generalized Least Square (GLS). Empirical study was conducted on the proportion of under-prosperous family in Bandar Lampung with the help of software R.

**Keyword** : Small Area Estimation, Best Linear Unbiased Predictor (BLUP), Generalized Linear Mixed Model (GLMM) and Generalized Least Square (GLS).

**PENDUGAAN PARAMETER PROPORSI AREA KECIL BERDASARKAN  
*GENERALIZED LINEAR MIXED MODEL***

**Oleh**

**NINA DAMAYANTI**

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar  
**SARJANA SAINS**

Pada

Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS LAMPUNG  
BANDAR LAMPUNG  
2017**

Judul Skripsi : **PENDUGAAN PARAMETER PROPORSI AREA  
KECIL BERDASARKAN GENERALIZED  
LINEAR MIXED MODEL**

Nama Mahasiswa : **Nina Damayanti**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1317031058**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



**Widiarti, S.Si., M.Si.**  
NIP 19800502 200501 2 003

**Amanto, S.Si., M.Si.**  
NIP 19730314 200012 2 001

2. Mengetahui

Ketua Jurusan Matematika


**Wamiliana, Dra., M.A., Ph.D.**  
NIP 19631108 198902 2 001



**MENGESAHKAN**

**1. Tim Penguji**

**Ketua : Widiarti, S.Si., M.Si.**



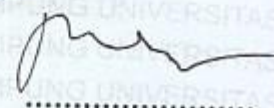
.....

**Sekretaris : Amanto, S.Si., M.Si.**



.....

**Penguji  
Bukan Pembimbing : Drs. Rudi Ruswandi, S.Si., M.Si.**



.....

**2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



**Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.**

**NIP. 19710212 199512 1 001**



**Tanggal Lulus Ujian Skripsi : 10 November 2017**

## PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : **Nina Damayanti**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1317031058**

Judul : **PENDUGAAN PARAMETER PROPORSI  
AREA KECIL BERDASARKAN  
*GENERALIZED LINEAR MIXED MODEL***

Jurusan : **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, November 2017

Penulis,



**NINA DAMAYANTI**  
**NPM. 1317031058**

## **RIWAYAT HIDUP**

Penulis bernama lengkap Nina Damayanti, anak pertama dari tiga bersaudara yang dilahirkan di Purwakarta, Jawa Barat pada tanggal 30 Juni 1995 oleh pasangan Bapak Kace Supriadi (alm) dan Ibu Herlaili.

Penulis menempuh pendidikan di Sekolah Dasar (SD) Negeri 1 Bumiratu Nuban Lampung Tengah pada tahun 2001 – 2007, Sekolah Menengah Pertama (SMP) Negeri 1 Bumiratu Nuban Lampung Tengah pada tahun 2007 – 2010, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) Negeri 1 Gunung Sugih Lampung Tengah pada tahun 2010 – 2013.

Pada tahun 2013 penulis terdaftar sebagai mahasiswa S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN).

Pengalaman organisasi penulis yaitu pada tahun 2014 - 2015 penulis pernah menjadi anggota biro kesekretariatan Himpunan Mahasiswa Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.

Pada tahun 2016 penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di PT. Anaktuha Sawit Mandiri di Dusun VII Desa Bumi Arum Kecamatan Bumiratu Nuban Lampung Tengah serta Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sidomulyo, Kecamatan Sidomulyo, Kabupaten Lampung Selatan, Provinsi Lampung.



## PERSEMBAHAN

Skripsi ini Saya persembahkan untuk:

Kedua orangtua tercinta beserta keluarga besar yang selalu memberikan semangat, mendoakan, serta memberikan motivasi.

Para sahabat - sahabat terbaik yang senantiasa memberikan semangat dan bantuannya.

Pembimbing skripsi, pembimbing akademik dan para dosen yang telah memberikan bimbingan, arahan, serta kritik dan sarannya

Almamater tercinta  
Universitas Lampung

## KATA INSPIRASI

“Jangan berkecil hati atau bersedih hati disaat mencari ilmu itu susah karena setiap kesusahan itu kelak akan diganti oleh Allah di perjalanan menuju akhirat” .

(Ust. Tengku Hanan Attaki)

“ Life isn't about finding your self but life is about creating your self “ .

(Anonymous)

## SANWACANA

Puji syukur Penulis panjatkan kehadiran Allah SWT atas karunia serta rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “**Pendugaan Parameter Proporsi Area Kecil Berdasarkan *Generalized Linear Mixed Model***”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si.) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Selesainya penulisan skripsi ini adalah berkat motivasi, pengarahan serta bimbingan dari berbagai pihak. Dengan segala kerendahan dan ketulusan hati penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I, terima kasih untuk bimbingan, bantuan, nasehat, motivasi dan kesediaan waktu selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku dosen Pembimbing II, terima kasih atas arahan, motivasi, dan bantuannya selama penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Rudi Ruswandi, S.Si., M.Si. selaku Penguji Utama, terima kasih atas kesediaan untuk menguji, saran dan kritik yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Akademik, terima kasih atas bimbingan dan pembelajaran dalam proses perkuliahan.

5. Ibu Wamiliana, Dra., M.A., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D. selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Staff Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Almarhum Bapak, Emak, Adik-adik beserta keluarga besar.
9. Sahabat-sahabat terbaik : Rifa, Galuh, Tiyas, Lia, Nafisa, Dita, Aul, Imel, Tara dan Rini, Sahabat-sahabat seperjuangan : Shela, Della dan Chaterine, serta rekan-rekan Matematika 2013.
10. Almamater tercinta Universitas Lampung.
11. Semua pihak yang telah membantu yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Bandar Lampung, November 2017  
Penulis

**Nina Damayanti**



# DAFTAR ISI

Halaman

## DAFTAR TABEL

## DAFTAR GAMBAR

## DAFTAR LAMPIRAN

### I. PENDAHULUAN

1.1.Latar Belakang dan Masalah .....	1
1.2.Tujuan .....	4
1.3.Manfaat .....	4

### II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Pendugaan Area Kecil.....	5
2.2. Model Area Kecil.....	5
2.2.1. <i>Basic Area Level (Type A) Model</i> .....	5
2.2.2. <i>Basic Unit Level (Type B) Model</i> .....	6
2.3. <i>Generalized Linear Mixed Model (GLMM)</i> .....	7
2.4. <i>Metode Best Linear Unbiased Predictor (BLUP)</i> .....	8
2.5. <i>Generalized Least Square (GLS)</i> .....	9

### III. METODE PENELITIAN

3.1. Data .....	12
3.2. Metode Penelitian.....	13

#### **IV. HASIL DAN PEMBAHASAN**

4.1. Model Area Kecil .....	15
4.2. Pendugaan Parameter <i>Generalized Linear Mixed Model (GLMM)</i> .....	16
4.3. Karakteristik Penduga Bagi .....	19
4.3.1. Takbias .....	19
4.3.2. Ragam Minimum.....	19
4.4.Pendugaan Parameter Model Area Kecil .....	21
4.5.Penerapan pada Data Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung .....	22
4.6. <i>Mean Square Error (MSE)</i> .....	27
4.7.Uji <i>Goodness of Fit</i> .....	29

#### **V. KESIMPULAN**

5.1.Kesimpulan.....	33
---------------------	----

#### **DAFTAR PUSTAKA**

#### **LAMPIRAN**

## DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
4.1 Nilai Dugaan Proporsi Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung Tahun 2015 dengan Metode Langsung .....	23
4.2 Peubah Penyerta yang Berkaitan dengan Proporsi Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung Tahun 2015 .....	24
4.3 Nilai Dugaan Parameter Pengaruh Tetap dengan Metode BLUP .....	25
4.4 Nilai Dugaan Parameter Pengaruh Acak dengan Metode BLUP.....	26
4.5 Nilai Dugaan Proporsi Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung Tahun 2015 dengan Metode BLUP.....	26
4.6 Nilai <i>MSE</i> Pendugaan Langsung dan Pendugaan Tidak Langsung .....	28
4.7 Nilai <i>t</i> Hitung dari Peubah Independen .....	32

## DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
3.1 <i>Flow Chart</i> Tahapan Pendugaan Paramater Proporsi Model Area Kecil	14
4.1 Plot Perbandingan Proporsi Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung dengan Metode Pendugaan Secara Langsung dan Tidak Langsung .....	29



## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Halaman
1. <i>Syntax</i> Program <i>Software R</i> untuk Pendugaan Proporsi Area Kecil Data Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung Tahun 2015.....	36
2. <i>Syntax</i> untuk Membuat Plot pada <i>Software R</i> .....	37
3. Data BKKBN Tentang Jumlah Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung Tahun 2015 .....	38

## I. PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang dan Masalah

Survei merupakan salah satu cara untuk memperoleh informasi, dimana informasi tersebut dapat digunakan untuk menduga karakteristik suatu populasi. Pendugaan karakteristik dari suatu populasi dapat dilakukan melalui pendugaan secara langsung (*direct estimation*) atau melalui pendugaan secara tidak langsung (*indirect estimation*). Suatu penduga dikatakan langsung jika pendugaan terhadap parameter populasinya hanya didasarkan pada informasi yang diperoleh dari area tersebut. Pendugaan langsung umumnya akan menghasilkan dugaan yang tak bias. Namun dalam kasus area kecil yang merupakan suatu area dengan sedikit informasi atau bahkan tidak memiliki informasi sama sekali mengenai karakteristik populasi yang akan diamati, pendugaan secara langsung kurang efisien untuk diterapkan disebabkan informasi yang dimiliki sangatlah terbatas sehingga akan menghasilkan nilai dugaan yang memiliki *standard error* yang besar. Metode lain yang dapat digunakan untuk menduga karakteristik populasi dari suatu area kecil adalah metode pendugaan area kecil.

Pendugaan area kecil merupakan metode pendugaan tidak langsung pada area kecil dengan cara menghubungkan area kecil tersebut dengan data dari area lain yang berhubungan dengan karakteristik populasi yang akan diamati melalui model yang sesuai dengan tujuan penelitian yang akan dilakukan. Dalam pendugaan area kecil, terdapat tiga metode yang dapat digunakan yaitu EB (*Empirical Bayes*), HB

(*Hierarchical Bayes*), dan BLUP (*Best Linear Unbiased Predictor*). EB dan HB digunakan pada kasus data diskrit, dan BLUP digunakan pada kasus data kontinu. Sedangkan untuk model pendugaan dalam area kecil dibedakan menjadi dua yaitu model berbasis area (*basic area level model*) dan model berbasis unit (*basic unit level model*) dimana kedua model tersebut merupakan model campuran.

Berdasarkan faktor yang mempengaruhi peubah responnya, model dapat dibedakan menjadi tiga macam diantaranya yaitu model tetap, model acak, dan model campuran. Model tetap merupakan model yang hanya terdiri dari pengaruh tetap (*fix effect*) sebagai faktor yang mempengaruhi peubah responnya. Berbeda dengan model tetap, model acak diartikan sebagai model yang hanya terdiri dari pengaruh acak (*random effect*) sebagai faktor yang mempengaruhi peubah responnya. Sedangkan untuk model campuran dapat diartikan sebagai model yang menggabungkan antara pengaruh tetap dan pengaruh acak kedalam satu model. Suatu pengaruh dikatakan tetap jika pengaruh tersebut dianggap telah memenuhi semua kemungkinan pengaruh yang ada dan biasanya telah ditetapkan sebelum penelitian dilakukan dan suatu pengaruh dikatakan acak apabila pengaruh tersebut diperoleh secara acak dari suatu populasi tertentu.

Penelitian ini akan membahas mengenai pendugaan parameter proporsi area kecil dengan cara menghubungkan model area kecil tersebut dengan *Generalized Linear Mixed Model* (GLMM) yang merupakan model yang menggabungkan pengaruh tetap dan pengaruh acak kedalam suatu model linear dengan peubah respon yang tidak harus menyebar normal. Model linear campuran ini biasanya digunakan pada data yang tidak saling bebas dan data yang tidak homogen.

Dalam GLMM, ada kalanya pengamatan yang dilakukan saling berkorelasi sehingga pendugaan parameter dengan metode OLS (*Ordinary Least Square*) tidak dapat diterapkan sehingga dibutuhkan metode lain untuk memperoleh nilai dugaan dari parameter tersebut yaitu dengan metode GLS (*Generalized Least Square*). Metode ini memiliki konsep yang serupa dengan metode OLS yaitu meminimumkan jumlah kuadrat galat dari model namun metode ini terlebih dahulu mentransformasi nilai ragam dari galat pengamatan agar memenuhi asumsi yang ditetapkan dalam model .

Parameter dari GLMM ini akan diduga terlebih dahulu menggunakan metode GLS, kemudian hasil yang diperoleh akan digunakan untuk menduga parameter model area kecil. Pengaplikasian data dilakukan dengan menduga nilai proporsi keluarga prasejahtera Kota Bandar Lampung. Dalam menghitung proporsi keluarga prasejahtera dari suatu kabupaten/kota dibutuhkan data proporsi keluarga prasejahtera sampai level kecamatan. Namun, sering kali sumber data yang tersedia berasal dari data survei dimana tidak semua keluarga yang berada dikecamatan tersebut diambil sebagai sampel sehingga apabila dilakukan pendugaan secara langsung dengan hanya memanfaatkan informasi yang ada akan menghasilkan dugaan yang kurang akurat. Oleh sebab itu dilakukanlah pendugaan proporsi keluarga prasejahtera dengan menambahkan 6 indikator keluarga prasejahtera BKKBN Lampung sebagai pengaruh tetap dan kecamatan yang berada di Kota Bandar Lampung sebagai pengaruh acak kedalam model pendugaan parameter proporsinya.



## **1.2. Tujuan**

Tujuan dari penelitian ini adalah memperoleh penduga parameter proporsi area kecil menggunakan metode BLUP (*Best Linear Unbiased Predictor*) berdasarkan hasil dugaan parameter GLMM menggunakan metode GLS (*Generalized Least Square*) dengan aplikasi data keluarga prasejahtera Kota Bandar Lampung

## **1.3. Manfaat**

Manfaat dari penelitian ini adalah mengetahui langkah-langkah menduga parameter proporsi area kecil menggunakan metode BLUP berdasarkan hasil dugaan parameter GLMM menggunakan metode GLS.

## II. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1. Pendugaan Area Kecil

Suatu area dikatakan kecil apabila sampel yang diambil tidak mencukupi untuk melakukan pendugaan secara langsung dengan hasil dugaan yang akurat (Rao, 2003). Pendugaan area kecil merupakan konsep terpenting dalam pendugaan parameter secara tidak langsung di suatu area yang relatif kecil dalam *survey sampling*. Metode ini digunakan untuk menduga sub-populasi (domain yang lebih kecil). Pendugaan langsung (*direct estimation*) pada sub-populasi umumnya akan menghasilkan dugaan yang tidak memiliki presisi yang memadai karena kecilnya jumlah sampel yang digunakan untuk memperoleh dugaan tersebut. Alternatif metode lain adalah dengan cara menghubungkan area tersebut dengan area lain melalui model yang sesuai dengan tujuan penelitian yang akan dilakukan, dengan demikian dugaan tersebut merupakan pendugaan tidak langsung (*indirect estimation*), dalam arti bahwa dugaan tersebut mencakup data dari domain yang lain (Sadik, 2008).

### 2.2. Model Area Kecil

#### 2.2.1. *Basic Area Level (Type A) Model*

Salah satu model dasar area kecil adalah *Basic area level (type A) model*, yaitu model yang didasarkan pada ketersediaan data pendukung yang hanya ada untuk level area tertentu. Misalkan  $x_i = (x_{1i}, \dots, x_{pi})^T$  dan parameter yang akan diduga  $\theta_i$ ,

diasumsikan mempunyai hubungan dengan  $x_i$ . Data pendukung tersebut digunakan untuk membangun model:

$$y_i = x_i^T \beta + b_i v_i \quad (2.1)$$

dengan  $i=1, \dots, m$  dan  $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$  sebagai pengaruh acak yang diasumsikan normal serta  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$  adalah vektor koefisien regresi berukuran  $p \times 1$ . Sedangkan  $b_i$  adalah konstanta bernilai positif yang diketahui. Inferensia mengenai  $\beta$  diperoleh dengan mengasumsikan bahwa model penduga langsung  $y_i$  tersedia, yaitu:

$$y_i = \mu_i + e_i \quad (2.2)$$

dimana  $i=1, \dots, m$  dengan *sampling error*  $e_i \sim N(0, \sigma_{e_i}^2)$  dan  $\sigma_{e_i}^2$  diketahui. Pada akhirnya, kedua model digabungkan dan menghasilkan model gabungan:

$$y_i = x_i^T \beta + b_i v_i + e_i \quad (2.3)$$

dimana  $i=1, \dots, m$ . Model tersebut merupakan bentuk khusus dari model linier campuran (*generalized linear mixed model*) yang terdiri dari pengaruh tetap (*fixed effect*) yaitu  $\beta$  dan pengaruh acak (*random effect*) yaitu  $v_i$  (Rao, 2003).

### 2.2.2. Basic Unit Level (Type B) Model

Merupakan suatu model dimana data pendukung yang tersedia bersesuaian secara individu dengan data respon, misal  $x_{ij} = (x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3}, \dots, x_{ijp})^T$  untuk masing-masing anggota populasi  $j$  dalam setiap area kecil  $\hat{x}_i$ . Sehingga didapatkan suatu model regresi tersarang sebagai berikut :

$$y_{ij} = x_i^T + v_i + e_{ij} \quad (2.4)$$

dengan  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, N_i$ , dengan asumsi  $v_i$  merupakan peubah acak yang berdistribusi  $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$  dan  $e_{ij} = k\tilde{e}_{ij}$  dimana konstanta  $k$  diketahui dan  $\tilde{e}_{ij}$  merupakan peubah acak saling bebas dari  $v_i$  sehingga distribusi dari  $e_{ij}$  adalah  $N(0, \sigma_e^2)$ .

### 2.3. *Generalized Linear Mixed Model (GLMM)*

Model linear campuran merupakan model yang terdiri dari pengaruh tetap (*fixed effect*) dan pengaruh acak (*random effect*). Suatu pengaruh dikatakan tetap (*fixed*) apabila dalam suatu penelitian, pengaruh tersebut dianggap telah mewakili semua tingkat kemungkinan pengaruh yang ada dan telah ditetapkan sebelumnya. Sedangkan, suatu pengaruh dikatakan acak (*random*) apabila pengaruh tersebut merupakan sampel yang diambil secara acak dari suatu populasi (Little dkk, 1996).

Rao (2003) mengaitkan model-model dasar area kecil sebagai bagian dari *Generalized Linear Mixed Model (GLMM)* yang menggabungkan antara pengaruh tetap dan pengaruh acak dalam suatu model umum. Misalkan bahwa data sampel memenuhi *Generalized Linear Mixed Model (GLMM)* :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} + \mathbf{Z} + \mathbf{e} \quad (2.5)$$

dimana  $\mathbf{y}$  adalah vektor berukuran  $n \times 1$  dari sampel pengamatan,  $\mathbf{X}$  dan  $\mathbf{Z}$  adalah matrik berpangkat penuh yang diketahui berukuran  $n \times p$  dan  $n \times h$ , serta  $\mathbf{e}$  menyebar bebas dengan mean  $\mathbf{0}$  dan matrik kovarian  $\mathbf{G}$  dan  $\mathbf{R}$  tergantung pada



parameter varian  $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_1^2, \dots, \sigma_q^2)^T$ . Asumsikan bahwa  $\boldsymbol{\Sigma}$  termasuk subset tertentu dari *Euclidean q-space* sedemikian sehingga

$$\mathbf{Var}(\mathbf{y}) = \mathbf{V} = \mathbf{V}(\boldsymbol{\Sigma}) = \mathbf{R} + \mathbf{ZGZ}^T \quad (2.6)$$

Adalah nonsingular untuk semua  $\boldsymbol{\Sigma}$  yang termasuk ke dalam subset, dimana  $\mathbf{Var}(\mathbf{y})$  di notasikan sebagai matrik varian-kovarian dari  $\mathbf{y}$ .

#### 2.4. Metode *Best Linear Unbiased Predictor* (BLUP)

Pada GLMM, dilakukan pendugaan terhadap kombinasi dari parameter yaitu  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\beta} + \mathbf{m}^T \boldsymbol{\gamma}$ , dari parameter regresi  $\boldsymbol{\beta}$  dan penerapan dari  $\boldsymbol{\gamma}$ , untuk vektor tertentu,  $\mathbf{1}$  dan  $\mathbf{m}$ , dari konstanta. Dan untuk  $\boldsymbol{\Sigma}$  tertentu yang diketahui maka penduga BLUP bagi  $\boldsymbol{\mu}$  adalah :

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}^H = \mathbf{t}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{y}) = \mathbf{1}^T \tilde{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{n}^T \tilde{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{1}^T \tilde{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{n}^T \mathbf{GZ}^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \tilde{\boldsymbol{\beta}}) \quad (2.7)$$

Dimana

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\delta}) = (\mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} \quad (2.8)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\nu}} = \tilde{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{GZ}^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \tilde{\boldsymbol{\beta}}) \quad (2.9)$$

Berdasarkan (Rao, 2008), model untuk penduga tidak langsung, adalah :

$$\hat{\theta}_i = x_i^T \boldsymbol{\beta} + b_i v_i + e_i \quad (2.10)$$

dimana  $i = 1, \dots, m$ , merupakan kasus khusus dari GLMM, yaitu :

$$Y_i = \hat{\theta}_i, X_i = x_i^T, Z_i = b_i, \text{ dan } v_i = v_i, e_i = e_i, \boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2)^T$$

sedangkan  $\mathbf{G}_i = \sigma_v^2$ ,  $\mathbf{R}_i = \sigma_e^2$

sehingga  $v_i = \sigma_e^2 + \sigma_v^2 b_i^2$  dan  $\boldsymbol{\mu}_i = x_i^T \boldsymbol{\beta} + b_i v_i$

Apabila persamaan pendugaan tidak langsung disubstitusikan ke dalam GLMM, akan diperoleh penduga BLUP bagi  $\mu_i$  atau  $\omega_i$ , yaitu :

$$\tilde{\theta}_i^H = \mathbf{x}_i^T \tilde{\boldsymbol{\beta}} + \gamma_i (\theta_i - \mathbf{x}_i^T \tilde{\boldsymbol{\beta}}), \text{ dimana } \frac{\sigma_v^2 \mathbf{b}_i^2}{\sigma_e^2 + \sigma_v^2 \mathbf{b}_i^2} \text{ dan}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\sigma_v^2) = \left[ \sum_{i=1}^m \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T}{\sigma_e^2 + \sigma_v^2 \mathbf{b}_i^2} \right]^{-1} \left[ \sum_{i=1}^m \frac{\mathbf{x}_i \hat{\theta}_i}{\sigma_e^2 + \sigma_v^2 \mathbf{b}_i^2} \right]$$

## 2.5. *Generalized Least Square (GLS)*

Adakalanya terjadi sebagian pengamatan yang digunakan dalam analisis “kurang terandalkan” dibanding dengan yang lainnya. Hal ini berarti bahwa ragam dari pengamatan tersebut tidak sama, dengan kata lain matriks  $\mathbf{V}(\ )$  tidak berbentuk  $\mathbf{I}^2$  melainkan suatu matriks diagonal dengan unsur-unsur pada diagonal utamanya tidak sama. Mungkin pula dalam beberapa kasus, unsur-unsur di luar diagonal utama matriks  $\mathbf{V}(\ )$  tidak nol, yang berarti pengamatan tersebut saling berkorelasi (Drapper dan Smith, 1992).

Dengan demikian diperlukan suatu pendekatan baru, yaitu dengan transformasi. Setelah transformasi matriks kovarian menjadi  $\mathbf{I}^2$  dan kemudian diterapkan teorema Gauss Markov pada model yang telah ditransformasikan. Hasilnya akan merupakan BLUE (*Best Linear Unbiased Estimation*). Metode pendekatan ini merupakan metode GLS (*Generalized Least Square*).

Pendekatan Transformasi :

Jika suatu matriks  $\mathbf{Q}$  adalah simetrik definit positif maka  $\mathbf{Q}$  nonsingular atau  $\mathbf{Q}^{-1}$  ada, dan karena itu ada matriks  $n \times n$  nonsingular (misal  $\mathbf{P}$ ) sedemikian rupa sehingga

$$\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} \quad (2.10)$$

Pada model linear  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$  dengan asumsi matriks kovariannya  $\mathbf{Q} = \sigma^2 \mathbf{I}$ , matriks  $\mathbf{Q}$  adalah simetris dan definit positif sehingga nonsingular, karena itu ada suatu matriks  $n \times n$  nonsingular  $\mathbf{P}$  sehingga  $\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$ . Pada model linear kalikan kedua ruas dengan matriks  $\mathbf{P}$  ini :  $\mathbf{P}\mathbf{Y} = \mathbf{P}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{P}\mathbf{u}$

Sehingga matriks pengamatan setelah ditransformasikan akan berbentuk  $[\mathbf{P}\mathbf{Y} \ \mathbf{P}\mathbf{X}]$  dengan vektor galat  $\mathbf{P}\mathbf{u}$ , dengan matriks kovarians  $\mathbf{Q} = \sigma^2 \mathbf{I}$  adalah :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{P}\mathbf{u}) &= \mathbf{P} \text{E}(\mathbf{u}\mathbf{u}') \mathbf{P}' \\ &= \sigma^2 \mathbf{P} \mathbf{P}' \\ &= \sigma^2 \mathbf{P}(\mathbf{P}\mathbf{P}')^{-1} \mathbf{P}' \\ &= \sigma^2 \mathbf{I} \end{aligned}$$

Penerapan metode kuadrat terkecil pada model transformasi akan menghasilkan persamaan normal sebagai berikut :

$$\mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{Y} = \mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{B}$$

dengan  $\mathbf{B}$  adalah kuadrat terkecil untuk  $\boldsymbol{\beta}$  berdasarkan model transformasi. Karena  $\mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{Y}$  adalah matriks definit positif jika  $\mathbf{X}$  mempunyai *full column rank* sehingga  $\mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{Y}$  adalah nonsingular dan  $\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$ .

Maka solusinya adalah :

$$\mathbf{B} = (\mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{Y})$$

atau

$$\mathbf{B} = (\mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'^{-1}\mathbf{Y})$$

Persamaan terakhir ini dinamakan penduga kuadrat terkecil umum (*Generalized Least Square*) (Usman dan Warsono, 2009) .

### III. METODE PENELITIAN

#### 3.1. Data

Data yang digunakan pada penelitian ini merupakan data sekunder tentang keluarga prasejahtera Kota Bandar Lampung Tahun 2015 yang diolah oleh BKKBN Provinsi Lampung. Data tersebut terdiri dari 20 kecamatan yang berada di Kota Bandar Lampung dengan 6 indikator yang dijadikan sebagai data penyerta, yaitu :

- a. Keluarga membeli satu stel pakaian baru untuk seluruh anggota keluarga minimal satu tahun sekali ( $x_1$ ).
- b. Seluruh anggota keluarga makan minimal dua kali sehari ( $x_2$ ).
- c. Seluruh anggota keluarga bila sakit berobat ke fasilitas kesehatan ( $x_3$ ).
- d. Seluruh anggota keluarga memiliki pakaian yang berbeda untuk dirumah, bekerja/ sekolah dan bepergian ( $x_4$ ).
- e. Seluruh anggota makan daging/ ikan/ telur minimal seminggu sekali ( $x_5$ ).
- f. Seluruh anggota keluarga menjalankan ibadah agama sesuai ketentuan agama yang dianut ( $x_6$ ).

### 3.2. Metode Penelitian

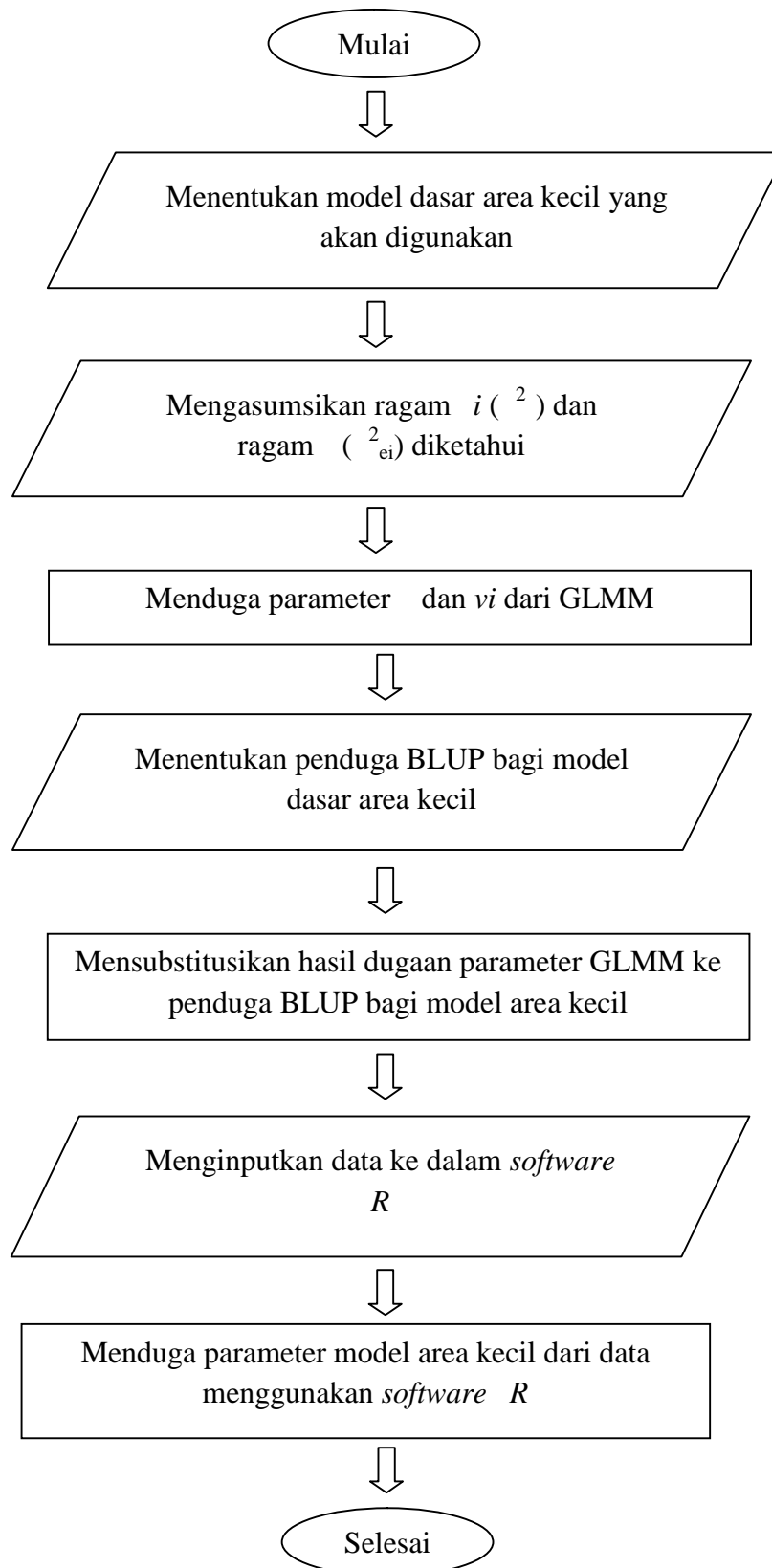
Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menentukan *Basic area level (type A) model* yaitu :

$$y_i = x_i^T \beta + b_i v_i + \epsilon_i$$

2. Mengasumsikan bahwa  $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$  sebagai pengaruh acak,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$  adalah vektor koefisien regresi berukuran  $p \times 1$ ,  $b_i$  merupakan vektor konstanta positif yang diketahui, serta ragam dari  $\epsilon_i$  ( $\sigma_{\epsilon_i}^2$ ) dan ragam dari  $v_i$  ( $\sigma_v^2$ ) diketahui.
3. Menduga parameter  $\beta$  dan  $v_i$  menggunakan metode GLS.
4. Menentukan model penduga BLUP bagi model dasar area kecil.
5. Mensubstitusikan hasil dugaan parameter  $\beta$  dan  $v_i$  ke dalam penduga BLUP.
6. Mengaplikasikan model area kecil pada data keluarga pra sejahtera Kota Bandar Lampung.
7. Menduga parameter model area kecil dari data menggunakan *software R*

Dengan *flow chart* tahapan pendugaan parameter proporsi area kecil tersaji pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1. *Flow Chart* Tahapan Pendugaan Parameter Proporsi Model Area Kecil

## V. KESIMPULAN

### 5.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian pada bab sebelumnya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Pendugaan parameter pada model area kecil menggunakan metode *Best Linear Unbiased Predictor* (BLUP) dapat dilakukan apabila asumsi komponen keragaman dari data diketahui. Sedangkan untuk menduga parameter dari pengaruh tetap dan pengaruh acak dilakukan dengan mensubstitusikan hasil yang diperoleh dari pendugaan parameter GLMM dengan metode GLS. Dugaan parameter model area kecil yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\hat{\theta}_i^{BLUP} = \mathbf{x}_i^T \hat{\beta} + \gamma_i (\hat{\theta}_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\beta})$$

Dimana  $\gamma_i = \mathbf{b}_i^2 \sigma_v^2 (\psi_i + \mathbf{b}_i^2 \sigma_v^2)^{-1}$

$$\text{Dengan } \hat{\beta} = \left[ \frac{\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i}{(\sigma_{ei} + \mathbf{b}_i^2 \sigma_v^2)} \right]^T \left[ \frac{\mathbf{x}_i^T \hat{\theta}_i}{(\sigma_{ei} + \mathbf{b}_i^2 \sigma_v^2)} \right]$$

Sebagai penduga pengaruh tetap dalam model area kecil, dan

$$\hat{v} = \gamma_i (\hat{\theta}_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\beta})$$

Sebagai penduga pengaruh acak dari model area kecil.

2. Pendugaan tidak langsung pada data keluarga prasejahtera Kota Bandar Lampung Tahun 2015 menghasilkan selisih nilai dugaan proporsi keluarga prasejahtera yang tidak terlalu jauh jika dibandingkan dengan nilai pendugaan



secara langsung. Hal ini diduga data peubah penyerta yang digunakan dalam pendugaan tidak langsung memberikan pengaruh yang tidak terlalu besar terhadap peubah respon. Model pendugaan area kecil dari data keluarga prasejahtera Kota Bandar Lampung tahun 2015 adalah sebagai berikut:

$$\hat{\theta}_i^{BLUP} = \{(-0.07054)x_1 + 1.224292x_2 + 2.160651x_3 + (-0.54542)x_4 + 0.431972x_5 + 0.856555x_6\} + \left(\frac{0,002014131}{0,002014131 + \sigma_{ei}}\right) + \{i - ((-0.07054)x_1 + 1.224292x_2 + 2.160651x_3 + (0.54542)x_4 + 0.431972x_5 + 0.856555x_6)\}.$$

## DAFTAR PUSTAKA

- Drapper, N.R. dan Smith, H. 1992. Analisis Regresi Terapan Edisi 2. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.
- Ghozali, Imam. 2001. Aplikasi Analisis Multivariate dengan Program SPSS. BP UNDIP. Semarang.
- Hoog, R.V. dan Allen, T. Craigh. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics*. Fifth Edition. Printice-Hall. International Inc, New Jersey.
- Little, Ramon C., Miliken, George A., Stroup, Walter W., dan Wolfinger, Russel D. 1996. *SAS System for Mixed Model*. SAS Institute Inc. California.
- Nissinen, K. 2009. *Small Area Estimation with Linear Mixed Model rom Unit-Level Panel and Rotating Panel Data*. Department of Mathematics and Statistics University of Jyvaskyla. Finlandia.
- Rao, J.N.K. 2003. *Small Area Estimation*. John Willey and Son, Inc. New Jersey.
- Sadik, Kusman. 2008. Parameter Quantile-like dalam pendugaan Area Kecil Melalui Pendekatan Penalized Spline. *Jurnal Statistika*, Vol. 8, No. 31-32.
- Usman, Mustofa dan Warsono. 2009. Teori Model Linear dan Aplikasinya. Sinar Baru Algensindo. Bandung.