PEMBANDINGAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE 4 DAN METODE ADAM-BASHFORT MOULTON DALAM PENYELESAIAN MODEL PERTUMBUHAN UANG YANG DIINVESTASIKAN

(Skripsi)

Oleh

INTAN PUSPITASARI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

ABSTRAK

PEMBANDINGAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE 4 DAN METODE ADAM-BASHFORT MOULTON DALAM PENYELESAIAN MODEL PERTUMBUHAN UANG YANG DIINVESTASIKAN

Oleh

Intan Puspitasari

Investasi berupa tabungan bank dapat diaplikasikan menjadi sebuah model matematika. Model tersebut berbentuk persamaan diferensial, yaitu

$$\frac{dP(t)}{dt} = r.P(t)$$

dimana P(t) merupakan besarnya tabungan pada tahun ke-t (dalam rupiah), r adalah besarnya bunga, dan t adalah tahun ke-t (dalam tahun). Model tersebut dapat diselesaikan dengan dua metode yaitu metode analitik dan metode numerik. Penelitian ini akan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan metode Adam-Bashfort Moulton dalam penyelesaian model pertumbuhan uang yang diinvestasikan. Dari kedua metode tersebut akan ditentukan metode terbaik dalam mengaproksimasi nilai penyelesaian model tersebut dengan melihat nilai galat dari kedua metode tersebut. Dari nilai galat yang didapat dari kedua metode dapat disimpulkan bahwa semakin kecil bunga pertahunnya, maka hasil aproksimasi semakin mendekati hasil eksaknya. Sebaliknya, semakin besar bunga pertahunnya, maka selisih antara hasil aproksimasi dan hasil eksaknya akan semakin besar. Metode Runge-Kutta Orde 4 lebih baik dalam mengaproksimasikan suatu nilai pada *x(i)* yang besar dibandingkan dengan metode Adam-Bashfort Moulton. Sebaliknya, dari kedua contoh kasus tersebut terlihat bahwa metode Adam-Bashfort Moulton lebih baik dalam mengaproksimasikan suatu nilai pada *x(i)* yang kecil dibandingkan metode Runge-Kutta Orde 4.

Kata kunci : Runge-Kutta, Adam-Bashfort Moulton, model matematika

ABSTRACT

PEMBANDINGAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE 4 DAN METODE ADAM-BASHFORT MOULTON DALAM PENYELESAIAN MODEL PERTUMBUHAN UANG YANG DIINVESTASIKAN

By

Intan Puspitasari

Investment in the form of bank savings can be applied into a mathematical model. The model is in the form of a differential equation, that is :

$$\frac{dP(t)}{dt} = r.P(t)$$

where P (t) is the amount of savings in year t (in rupiah), r is the interest rate, and t is the year t (in years). This research will use the fourth-order Runge-Kutta method and the Adam-Bashfort Moulton method in solving the money-invested growth model. From both methods will be determined the best method to approximate the value of completion of the model by looking at the error value of both methods. From the error rate obtained from both methods can be concluded that the smaller the interest per year, then the approximation of the approximation of the exact result. Conversely, the greater the interest per year, then the difference between the approximation and the exact results will be greater. The Runge-Kutta Method of Order 4 is preferable in approximating a value at x (i) that is large compared to the Adam-Bashfort Moulton method. In contrast, from both case examples it appears that the Adam-Bashfort Moulton method is better at estimating a value on x (i) than the Runge-Kutta method of Order 4.

Keywords : Runge-Kutta, Adam-Bashfort Moulton, mathematical model

PEMBANDINGAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE 4 DAN METODE ADAM-BASHFORT MOULTON DALAM PENYELESAIAN MODEL PERTUMBUHAN UANG YANG DIINVESTASIKAN

Oleh

INTAN PUSPITASARI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar
Sarjana Sains

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Skripsi	:	**PEMBANDINGAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE 4 DAN METODE ADAM BASHFORT MOULTON DALAM PENYELESAIAN MODEL PERTUMBUHAN UANG YANG DIINVESTASIKAN**
Nama Mahasiswa	:	INTAN PUSPITASARI
NPM	:	1417031059
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI,

1. Komisi Pembimbing

Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.
NIP.19700831 199903 1 002

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP.19620704 198803 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Dra. Wamiliana., MA, Ph.D.
NIP.19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** .....

Sekretaris : **Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.** .....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** .....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 1995121 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **20 Desember 2017**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	:	**Intan Puspitasari**
Nomor Induk Mahasiswa	:	**1417031059**
Judul	:	**PEMBANDINGAN METODE RUNGE KUTTA ORDE 4 DAN METODE ADAM BASHFORT MOULTON DALAM PENYELESAIAN MODEL PERTUMBUHAN UANG YANG DIINVESTASIKAN**
Jurusan	:	**Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan sayaa sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, Desember 2017

METERAI TEMPEL CE439AEF785902049 6000 ENAM RIBU RUPIAH

INTAN PUSPITASARI
NPM. 1417031059

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bandar Lampung, pada tanggal 18 November 1996, sebagai anak kedua dari empat bersaudara, putri dari bapak Sugiharto dan ibu Sunarti. Jenjang pendidikan diawali dari TK Shandy Putra (TELKOM), diselesaikan pada tahun 2002. Kemudian, Penulis melanjutkan pendidikan Sekolah Dasar (SD) di SDN 2 Rawa Laut (TELADAN), diselesaikan pada tahun 2008. Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMP Negeri 4 Bandar Lampung diselesaikan pada tahun 2011, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA Negeri 3 Bandar Lampung, diselesaikan pada tahun 2014. Tahun 2014, penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Unila melalui jalur SNMPTN (Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri).

Pada tahun 2017 Penulis melakukan Praktek Kerja Lapangan di Perum BULOG Divre Lampung, Bandar lampung. Selama menjadi mahasiswa Penulis aktif di organisasi Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unila sebagai Anggota Bidang Keilmuan periode 2015/2016

Dengan menyebut nama Allah yang maha pengasih lagi maha penyayang dan Segala Puji dan Syukur kepada Allah SWT

Kupersembahkan Karya sederhanaku ini Teruntuk

Kedua Orang tuaku,

Bapak Sugiharto dan Ibu Sunarti yang senantiasa selalu memberikan rasa kasih saayang, cinta, pengorbanan, serta selalu memanjatkan do'a indah untukku. Semoga Allah selalu melimpahkan kasih sayang dan kalian selalu dalam lindungan Allah SWT

Kakak dan Adik-adikku yang telah mendo'akan dan mendukung penuh penulis dalam membuat karya tulis ini

Seluruh keluarga besarku, teman dan sahabatku

Yang selalu aku cintai, Ahmad Ridho Syihab

Alamamater tercinta

Universitas Lampung

MOTTO

Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Maka apabila engkau telah selesai dari suatu urusan tetaplah bekerja keras untuk urusan yang lain.
(*Asy-Syarh*; 5-7)

Dia yang tau, tidak bicara. Dia yang bicara, tidak tahu.
(Lao Tse)

Terkadang manusia cinta akan dirinya, tersembunyilah baginya aib dirinya, tidak kelihatan olehnya walaupun nyata. Kecil di pandangannya walaupun bagaimana besarnya.
(Jalinus At Thabib)

Bersikaplah kukuh seperti batu karang yang tidak putus-putusnya dipukul ombak. Ia tidak saja tetap berdiri kukuh, bahkan ia menentramkan amarah ombak dan gelombang itu.
(Marcus Aurelius)

Banyak kegagalan dalam hidup dikarenakan orang-orang tidak menyadari betapa dekatnya mereka dengan keberhasilan saat mereka menyerah.
(Thomas Alfa Edison)

MOTTO

Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Maka apabila engkau telah selesai dari suatu urusan tetaplah bekerja keras untuk urusan yang lain.
(*Asy-Syarh*; 5-7)

Dia yang tau, tidak bicara. Dia yang bicara, tidak tahu.
(Lao Tse)

Terkadang manusia cinta akan dirinya, tersembunyilah baginya aib dirinya, tidak kelihatan olehnya walaupun nyata. Kecil di pandangannya walaupun bagaimana besarnya.
(Jalinus At Thabib)

Bersikaplah kukuh seperti batu karang yang tidak putus-putusnya dipukul ombak. Ia tidak saja tetap berdiri kukuh, bahkan ia menentramkan amarah ombak dan gelombang itu.
(Marcus Aurelius)

Banyak kegagalan dalam hidup dikarenakan orang-orang tidak menyadari betapa dekatnya mereka dengan keberhasilan saat mereka menyerah.
(Thomas Alfa Edison)

SANWACANA

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah segala puji dan syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT, karena berkat rahmat, ridho dan karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini Shalawat Serta salam tidak lupa penulis haturkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan umat manusia.

Skripsi dengan judul "Pembandingan Metode Runge-Kutta Orde 4 dan Metode Adam-Bashfort Moulton pada Penyelesaian Model Pertumbuhan Uang yang diinvestasikan" adalah salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

Pada kesempatan ini, penulis menyampaikan terima kasih setulus-tulusnya kepada:

1. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing I yang telah dengan sabar membimbing, menyemangati, dan memotivasi penulis.
2. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. selaku Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, kritik, dan saran yang membangun.

3. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembahas atas kesediaannya untuk menguji, dan dengan sabar memberikan kritik dan saran.
4. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Akademik atas bimbingan dan pembelajarannya dalam menjalani perkuliahan.
5. Ibu Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., DEA, Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
8. Teristimewa untuk kedua orang tuaku yang sangat aku cintai dan banggakan bapak Sugiharto dan ibu Sunarti, terima kasih bapak dan ibu atas segala bentuk pengorbanan, cinta yang begitu besar dan kasih sayangmu yang tulus. Terima kasih atas segala kebaikan, keikhlasan, kerja keras dan segala perjuangan kalian yang telah diberikan kepadaku.
9. Kakak dan adik-adikku, terima kasih atas bantuan dan dukungannya selama ini.
10. Rahmat Riyanto, teman seangkatan dan asdos mata kuliah Metode Numerik yang telah meluangkan waktu serta memberikan banyak saran selama penulis menyusun skripsi ini.
11. Yang tercinta, Ahmad Ridho Syihab, yang selama ini selalu menemani dan membantu penulis dalam segala hal.

12. Sahabat-sahabatku “PANCE” yaitu Andan, Susan, Tiara, Uti, dan Yutia yang telah memberikan kebahagian, keceriaan, dan selalu membantu Penulis sejak awal perkuliahan, semoga persahabatan kita dapat tetap abadi.
13. Sahabat seperjuangan skripsi penulis, Camelia Hana Fitri, terimakasih selalu menjadi tempat berkeluh kesah, memberi saran dan selalu bersama selama penulis menyusun skripsi ini
14. Rekan-rekan dan keluargaku Matematika Angkatan 2014 yang telah memotivasi dan memberikan dukungan kepada penulis.
15. Almamater tercinta, Universitas Lampung
16. Semua pihak yang telah membantu penulis selama kuliah, penelitian, hingga penulisan skripsi ini.

Semoga Allah SWT membalas kebaikan mereka serta senantiasa menjaga mereka dalam lindungan-Nya. *Aamiin*. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan kesalahan, untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun demi perbaikan penulisan di masa datang.

Bandar Lampung, Desember 2017
Penulis

Intan Puspitasari

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah.....1
1.2 Tujuan Penelitian 3
1.3 Manfaat Penelitian 4

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Matematika.....5
2.2 Persamaan Diferensial 5
2.3 Persamaan Diferensial Biasa 6
2.4 Persamaan Diferensial Biasa (PDB) Linier 6
2.5 Persamaan Diferensial Biasa (PDB) Nonlinier.....7
2.6 Persamaan Diferensial sebagai Model Matematika.....7
2.7 Metode Numerik 8
2.8 Metode Runge-Kutta.....9
2.9 Metode Runge-Kutta Orde 4.....9
2.10 Metode Adam-Bashfort-Multon 11
2.11 Model Pertumbuhan Uang yang diinvestasikan 12
2.12 Investasi 12
2.13 Jenis-Jenis Investasi.....12

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian.....15
3.2 Metode Penelitian 15

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Penyelesaian Model dengan Metode-Runge Kutta Orde 4.....17
4.2 Penyelesaian Model dengan Metode Adam-Bashfort Moulton.....18
4.3 Penerapan Metode Runge-Kutta pada Model

Pertumbuhan Uang yang diinvestasikan.....19
4.3.1 Contoh Kasus 1 (Bunga per annum/pertahun) 19
4.3.2 Contoh Kasus 2 (Bunga harian) 23

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan 24
5.2 Saran 25

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 1. Grafik Perbandingan Nilai Aproksimasi dengan Metode Runge-Kutta dan Solusi Analitik pada Contoh Kasus 1.....22

Gambar 2. Grafik Perbandingan Nilai Aproksimasi dengan Metode Adam-Bashfort Moulton dan Solusi Analitik pada Contoh Kasus 1.....22

Gambar 3. Grafik Perbandingan Nilai Aproksimasi dengan Metode Runge-Kutta dan Solusi Analitik pada Contoh Kasus 2.....26

Gambar 4. Grafik Perbandingan Nilai Aproksimasi dengan Metode Adam-Bashfort Moulton dan Solusi Analitik pada Contoh Kasus 2.....27

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 1. Hasil Aproksimasi dengan menggunakan Metode Runge-Kutta Orde 4 dan Metode Adam-Bashfort Moulton (Contoh Kasus 1) 19

Tabel 2. Nilai Galat dari Metode Runge-Kutta Orde 4 dan Metode Adam-Bashfort Moulton (Contoh Kasus 1).....20

Tabel 3. Hasil Aproksimasi dengan menggunakan Metode Runge-Kutta Orde 4 dan Metode Adam-Bashfort Moulton (Contoh Kasus 2) 24

Tabel 4. Nilai Galat dari Metode Runge-Kutta Orde 4 dan Metode Adam-Bashfort Moulton (Contoh Kasus 2).....25

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Persamaan diferensial sering kali diterapkan pada berbagai model matematika yang menggambarkan masalah dalam kehidupan nyata, salah satunya dalam bidang finansial yaitu investasi. Secara umum, investasi pada hakikatnya merupakan penempatan sejumlah dana yang ada saat ini dengan harapan untuk memperoleh keuntungan di masa mendatang.

Investasi memiliki berbagai jenis, diantaranya yaitu saham, deposito berjangka, emas, tabungan bank, dan masih banyak lagi. Namun, yang akan dibahas pada penelitian ini hanyalah investasi berupa tabungan bank. Investasi berupa tabungan bank ini dapat diaplikasikan menjadi sebuah model matematika.

Model tersebut berbentuk persamaan diferensial, yaitu

$$\frac{dP(t)}{dt} = r.P(t)$$

dimana P(t) merupakan besarnya tabungan pada tahun ke-t (dalam rupiah), r adalah besarnya bunga, dan t adalah tahun ke-t (dalam tahun). Model tersebut dapat diselesaikan dengan dua metode yaitu metode analitik dan metode numerik.

Metode analitik disebut juga metode sejati karena memberikan solusi sejati atau solusi yang sesungguhnya, yaitu solusi yang memiliki galat sama dengan nol. Namun, metode analitik hanya unggul untuk sejumlah persoalan yang terbatas sehingga solusi dari berbagai model tidak selalu dapat diselesaikan dengan metode analitik. Oleh karena itu, dibutuhkan metode numerik untuk mengaproksimasikan solusi dari model tersebut.

Metode numerik adalah satu-satunya metode alternatif yang ada dalam upaya menyelesaikan persoalan-persoalan matematis dengan mengkaji parametrik dari persoalan dari medan yang bersifat sembarang. Dalam metode numerik keputusan menerima atau menolak suatu jawaban pendekatan didasarkan kepada toleransi kedekatan yang disepakati. Toleransi yang dibuat menyangkut kesepakatan galat yang ditimbulkan oleh rumus. Tentu semakin kecil galat yang digunakan oleh pengguna maka semakin baik hasil aproksimasi yang dihasilkan.

Kompleksitas dan order konvergensi suatu metode numerik menjadi penentu dari kelayakan metode tersebut dalam menyelesaikan suatu model. Pada umumnya, digunakan ekspansi Taylor untuk menurunkan metode numerik dari suatu model. Akan tetapi, ekspansi Taylor akan membutuhkan turunan tingkat tinggi yang menyebabkan kompleksitas perhitungan bertambah.

Berbeda dengan ekspansi Taylor, skema Runge-Kutta adalah alternatif dari metode numerik untuk mendapatkan konvergensi tinggi tanpa memerlukan turunan tingkat tinggi. Metode Runge-Kutta yang paling mendekati konvergen

ialah yang berorde empat. Metode Runge-Kutta Orde 4 merupakan metode langkah tunggal yang memiliki nilai galat terkecil, sedangkan pada metode langkah ganda dapat digunakan metode Adam-Bashfort Moulton untuk mengaproksimasikan penyelesaian model tersebut dengan galat terkecil. Oleh karena itu, penelitian ini akan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan metode Adam-Bashfort Moulton dalam penyelesaian model pertumbuhan uang yang diinvestasikan. Dari kedua metode tersebut akan ditentukan metode terbaik dalam mengaproksimasi nilai penyelesaian model tersebut dengan melihat nilai galat dari kedua metode tersebut.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menerapkan metode Runge-Kutta orde 4 dan metode Adam-Bashfort Moulton dalam upaya penyelesaian contoh kasus model pertumbuhan uang yang diinvestasikan.
2. Menentukan metode terbaik dalam mengaproksimasikan nilai penyelesaian model pertumbuhan uang yang diinvestasikan.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Dapat digunakan untuk menyelesaikan model pertumbuhan uang yang diinvestasikan dengan metode Runge-Kutta orde 4 dan metode Adam-Bashfort Moulton.
2. Memberikan sumbangan solusi terhadap permasalahan matematika, khususnya pada metode langkah tunggal (Runge-Kutta).

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Matematika

Model matematika suatu fenomena adalah suatu ekspresi matematika yang diturunkan dari fenomena tersebut. Ekspresi dapat berupa persamaan, sistem persamaan atau ekspresi-ekspresi matematika yang lain seperti fungsi maupun relasi. Model matematika digunakan untuk menjelaskan karakteristik fenomena yang dimodelkannya, dapat secara kualitatif dan kuantitatif (Edi Cahyono, 2011).

Secara umum pemodelan matematika merupakan usaha perancangan rumusan matematika yang secara potensial menggambarkan bagaimana mendapatkan penyelesaian masalah matematika yang digeneralisasikan untuk diterapkan pada perilaku atau kejadian alam (Ripno Juli Iswanto, 2012).

2.2 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat variable bebas, variable tak bebas dan derivatif-derivatif dari variable tidak bebas terhadap variable bebasnya. Tingkat (orde) persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi dari derivatif yang terdapat dalam persamaan diferensial. Derajat suatu persamaan diferensial adalah

pangkat tertinggi dari derivatie tertinggi dalam persamaan diferensial (Wardiman, 1981).

Persamaan diferensial dibagi dalam dua kelas yaitu biasa dan parsial. Persamaan diferensial biasa, disingkat PDB, adalah suatu persamaan diferensial yang $F(x,y,y',y'',...,yn) = 0$ (Didit Budi Nugroho, 2011).

2.3 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan terhadap fungsi yang memuat satu variabel bebas. Jika x adalah fungsi dari t, maka contoh persamaan diferensial biasa adalah

$$\frac{dx}{dt} = t^2 \cos x$$

Dimana persamaan tersebut memiliki order satu. Order dari persamaan diferensial adalah turunan tertinggi pada fungsi tak diketahui (peubah tak bebas) yang muncul dalam persamaan diferensial (Campbell and Haberman, 2008).

2.4 Persamaan Diferensial Biasa (PDB) Linier

Persamaan diferensial biasa linier memiliki bentuk umum

$$a_n(t)\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = f(t) \qquad (2.1)$$

Dengan $a_n \neq 0, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ disebut koefisien persamaan diferensial. Fungsi $f(t)$ disebut input atau unsur nonhomogen. Jika $f(t)$ disebut input, maka solusi

dari persamaan diferensial x_t biasanya disebut output. Jika ruas sebelah kanan $f(t)$ bernilai nol untuk semua nilai t dalam interval yang ditinjau, maka persamaan ini dikatakan homogen, sebaliknya dikatakan nonhomogen. Contoh persamaan diferemsial biasa linier adalah

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3t$$

Yang merupakan persamaan diferensial biasa linier nonhomogen order satu (Hidayat, 2006).

2.5 Persamaan Diferensial Biasa (PDB) Nonlinier

Jika persamaan diferensial biasa tidak dapat dinyatakan dalam bentuk umum persamaan diferensial biasa linier, yaitu pada (2.1), maka persamaan diferensial tersebut adalah persamaan diferensial biasa nonlinier. Contoh persamaaan diferensial biasa nonlinier

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3x^2 = sin\ t$$

Yang merupakan persamaan diferensial biasa nonlinier nonhomogen order dua (Hidayat, 2006).

2.6 Persamaan Diferensial sebagai Model Matematika

Banyak sekali fenomena yang jika dibawa ke dalam model matematika bentuknya berupa persamaan diferensial biasa (PDB) maupun persamaan diferensial parsial (PDP). Fenomena yang demikian disebut lump problems yang dapat dimodelkan

dengan PDB. Dapat diartikan bahwa lumps problems menjadi masalah-masalah yang tak terdistribusi sebagai lawan dari masalah-masalah terdistribusi (Edi Cahyono, 2011).

2.7 Metode Numerik

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Metode numerik disebut juga sebagai alternatif dari metode analitik, yang merupakan metode penyelesaian persoalan matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku atau lazim. Disebut demikian, karena adakalanya persoalan matematika sulit diselesaikan atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik sehingga dapat dikatakan bahwa persoalan matematik tersebut tidak mempunyai solusi analitik. Sehingga sebagai alternatif, persoalan matematik tersebut diselesaikan dengan metode numerik. Perbedaan antara metode analitik dan metode numerik adalah metode analitik hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sederhana dan menghasilkan solusi yang sebenarnya atau solusi sejati. Sedangkan metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang sangat kompleks dan nonlinier. Solusi yang dihasilkan dari penyelesaian secara numerik merupakan solusi hampiran atau pendekatan yang mendekati solusi eksak atau solusi sebenarnya. Hasil penyelesaian yang didapatkan dari metode numerik dan metode analitik memiliki selisih, dimana selisih tersebut dinamakan kesalahan (Triatmodjo, 2002).

2.8 Metode Runge-Kutta

Secara umum, Runge-Kutta digunakan dalam penyelesaian masalah yang berhubungan dengan perhitungan numerik. Model umum dari metode Runge-Kutta tersebut yaitu :

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n)h$$

Dengan a_i adalah konstan dan k_i adalah :

$k_1 = f\ (x_i\ ,\ y_i)$

$k_2 = f\ (x_i + p_1\ .h.\ y_i + q_{11}\ .k_1.h)$

$k_3 = f\ (x_i + p_2\ .h.\ y_i + q_{21}\ .k_1.h + q_{22}\ .k_2.h)$

$k_4 = f\ (x_i + p_{n-1}\ .h.\ y_i + q_{n-1,1}\ .k_1.h + q_{n-1,2}\ .k_2.h + \ldots.. +$

$q_{n-1,n-1}\ .k_{n-1}.h)$

Dengan p_{n-1} dan $q_{n-1,2}$ adalah konstan.

Persamaan diatas adalah fungsi utama dari Runge-Kutta dan k_n adalah fungsi evaluasi dari metode Runge-Kutta (Singgih dan Erna, 2015).

2.9 Metode Runge-Kutta Orde 4

Metode Runge-Kutta mempunyai galat pemotongan lokal yang sebanding dengan Δx^5. Metode yang sangat terkenal untuk mengaproksimasi solusi masalah nilai awal orde pertama adalah metode Runge-Kutta orde ke empat. Prosedur metode Runge-Kutta orde ke empat untuk menyelesaikan masalah nilai awal tersebut sebagai berikut :

Tahap 1. Bagilah interval $x_0 \leq x \leq b$ menjadi p subinterval dengan menggunakan titik-titik yang berspasi sama :

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

$$\vdots$$

$$x_p = x_{p-1} + \Delta x = b$$

Tahap 2. Untuk $= 1, 2, 3, \ldots, p$, dapatkan barisan aproksimasi berikut :

$$y_n = y_{n-1} + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}$$

dimana

$$K_1 = g(x_{n-1}, y_{n-1})\ \Delta x$$

$$K_2 = g\left(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, y_{n-1} + \frac{K_1}{2}\right)\ \Delta x$$

$$K_3 = g\left(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, y_{n-1} + \frac{K_2}{2}\right)\ \Delta x$$

$$K_4 = g(x_{n-1} + \Delta x, y_{n-1} + K_3)\ \Delta x$$

Tahap 3. $K_1 = g(x, y)\ \Delta x$

$$K_2 = g(x + 0{,}5\ \Delta x\ ,\ y + 0{,}5\ \Delta x\ K_1)\ \Delta x$$

$$K_3 = g(x + 0{,}5\ \Delta x\ ,\ y + 0{,}5\ \Delta x\ K_2)\ \Delta x$$

$$K_4 = g(x + \Delta x\ ,\ y + \Delta x\ K_3)\ \Delta x$$

$$y = y + \left(\frac{1}{6}\right)(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$x = x + \Delta x$ (Kartono, 2011).

2.10 Metode Adam-Bashfort-Multon

Metode sebelumnya yaitu metode euler taylor, runge kutta dinamakan metode satu langkah (single-step) karena hanya menggunakan satu titik untuk mencari titik sebelumnya yaitu untuk mencari (x_1 dan y_1) memerlukan titik awal (x_0 dan y_0). Sebaliknya, metode banyak langkah (multi-step) memerlukan beberapa nilai awal sebelumnya.

Metode Adam merupakan metode multi-step yang didasarkan pada kalkulus :

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$dy = f(x)\,dx$$

(1) $$\int dy = y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \;\rightarrow\; y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{\Delta h}{2}[3f_i - f_{i-1}] \qquad \text{untuk 2 titik}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{\Delta h}{12}[23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}] \qquad \text{untuk 2 titik}$$

Untuk meramalkan suatu titik *f(x), y(x)* diperlukan 4 titik sebelumnya yaitu titik :

$$(x_{i-3},\, f_{i-3}),(x_{i-2},\, f_{i-2}),(x_{i-1},\, f_{i-1}) \text{ dan } (x_i,\, f_i)$$

Dari titik ini diramalkan :

$$p_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$$

Kemudian dikoreksi menjadi :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} - 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-3})$$ (Abraham Salusu, 2008)

2.11 Model Pertumbuhan Uang yang diinvestasikan

Model pertumbuhan uang yang ditabung di bank juga mempunyai model pertumbuhan yang sama, yaitu bahwa laju pertambahan banyaknya uang yang ditabung, *P(t)*, sebanding dengan banyaknya uang yang ditabung pada waktu *t*. Jadi model matematikanya berbentuk

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) \quad , \quad r > 0$$

Dimana *r* adalah besarnya bunga pertahun (Kartono, 2011).

2.12 Investasi

Investasi adalah penanaman modal untuk satu atau lebih aktiva yang dimiliki dan biasanya berjangka waktu lama dengan harapan mendapatkan keuntungan di masa-masa yang akan datang (Sunariyah, 2006).

2.13 Jenis-Jenis Investasi

Produk-produk investasi yang tersedia di pasaran antara lain:

1. Tabungan di bank

Dengan menyimpan uang di tabungan, maka akan mendapatkan suku bunga tertentu yang besarnya mengikuti kebijakan bank bersangkutan. Produk tabungan biasanya memperbolehkan kita mengambil uang kapanpun yang kita inginkan.

2. Deposito di bank

Produk deposito hampir sama dengan produk tabungan. Bedanya, dalam deposito tidak dapat mengambil uang kapanpun yang diinginkan, kecuali apabila uang tersebut sudah menginap di bank selama jangka waktu tertentu (tersedia pilihan antara satu, tiga, enam, dua belas, sampai dua puluh empat bulan, tetapi ada juga yang harian). Suku bunga deposito biasanya lebih tinggi daripada suku bunga tabungan. Selama deposito kita belum jatuh tempo, uang tersebut tidak akan terpengaruh pada naik turunnya suku bunga di bank.

3. Saham

Saham adalah kepemilikan atas sebuah perusahaan tersebut. Dengan membeli saham, berarti membeli sebagian perusahaan tersebut. Apabila perusahaan tersebut mengalami keuntungan, maka pemegang saham biasanya akan mendapatkan sebagian keuntungan yang disebut deviden. Saham juga bisa dijual kepada pihak lain, baik dengan harga yang lebih tinggi yang selisih harganya disebut capital gain maupun lebih rendah daripada kita membelinya yang selisih harganya disebut capital loss. Jadi, keuntungan yang bisa didapat dari saham ada dua yaitu deviden dan capital gain.

4. Properti

Investasi dalam properti berarti investasi dalam bentuk tanah atau rumah (Senduk, 2004).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2017/2018 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menentukan contoh kasus dari model pertumbuhan uang yang diinvestasikan dengan melakukan simulasi pada beberapa parameter yang mempengaruhi model tersebut.
2. Mencari solusi numerik berdasarkan metode Runge-Kutta Orde 4 dengan menggunakan *software* MATLAB berdasarkan nilai-nilai parameter hasil simulasi kasus dengan cara sebagai berikut :
   a. Mendeklarasikan parameter-parameter dari contoh kasus tersebut kedalam *software* Matlab R2013b.

b. Membuat program untuk solusi numerik berdasarkan metode Runge-Kutta orde empat.

3. Mencari solusi numerik berdasarkan metode Adam-Bashfort Moulton dengan menggunakan *software* MATLAB berdasarkan nilai-nilai parameter hasil simulasi kasus dengan cara sebagai berikut :
   a. Mendeklarasikan parameter-parameter dari contoh kasus tersebut kedalam *software* Matlab R2013b.
   b. Membuat program untuk solusi numerik berdasarkan metode Adam-Bashfort Moulton.
4. Mencari nilai galat kedua metode tersebut terhadap solusi analitik dari contoh kasus.
5. Menetukan metode terbaik dalam mengaproksimasi solusi model pertumbuhan uang yang diinvestasikan.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan penelitian yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa :

1. Metode Runge-Kutta Orde 4 dan Adam-Bashfort Moulton dapat diterapkan pada model pertumbuhan uang yang diinvestasikan tersebut.
2. Semakin kecil bunga pertahunnya, maka hasil aproksimasi semakin mendekati hasil eksaknya. Hal ini ditunjukkan pada contoh kasus 2 yang hasil aproksimasinya lebih mendekati nilai eksaknya dibandingkan dengan contoh kasus 1.
3. Semakin besar bunga pertahunnya, maka selisih antara hasil aproksimasi dan hasil eksaknya akan semakin besar. Hal ini ditunjukkan pada contoh kasus 1 yang memiliki selisih yang besar antara hasil aproksimasi dan hasil eksaknya.
4. Metode Runge-Kutta Orde 4 lebih baik dalam mengaproksimasikan suatu nilai pada x(i) yang besar dibandingkan dengan metode Adam-Bashfort Moulton, hal itu terlehat pada kedua contoh kasus.
5. Sebaliknya, dari kedua contoh kasus tersebut terlihat bahwa metode Adam-Bashfort Moulton lebih baik dalam mengaproksimasikan suatu nilai pada x(i) yang kecil dibandingkan metode Runge-Kutta Orde 4.

5.2 Saran

Pada penelitian ini hanya membandingkan 2 metode, yaitu metode Runge-Kutta Orde 4 dan metode Adam Bashfort Moulton, sebaiknya penelitian yang akan datang dapat membandingkan lebih banyak metode atau menggunakan metode Runge-Kutta Orde yang lebih tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

Cahyono, Edi. 2013. *Pemodelan Matematika*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Campbell. Haberman. 2008. *Introduction to Differential Equations with Dynamical Systems.* Princeton University Press, New Jersey.

Hidayat. 2006. *Persamaan Diferensial Parsial*. UPT Penerbitan Universitas Jember, Jember.

Iswanto, Ripno Juli. 2012. *Pemodelan Matematika Aplikasi dan Terapannya*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Kartono. 2011. *Persamaan Diferensial*. C.V Andi Offset, Yogyakarta.

Muhammad, Singgih Tahwin. dkk. 2015. Pengkajian metode extended runge kutta dan penerapannya pada persamaan diferensial biasa. *Jurnal Sains dan Seni ITS Vol. 4, No.1, (2015) 2337-3520 (2301-928X Print).*

Neuhauser. 2004. *Calculus for Biology and Medicine*. Pearson Education, New Jersey.

Nugroho, Didit Budi. 2011. *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Senduk. 2004. *Seri Perencana Keuangan Keluarga : Mencari Penghasilan Tambahan.* Alex Media Komputoindo, Jakarta.

Sunariyah, 2006, *Pengantar Pengetahuan Pasar Modal*, Edisi ke Lima, UPP AMP YKPN, Yogyakarta.

Triatmodjo. 2012. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Beta Offset, Yogyakarta.

Wardiman. 1981. *Persamaan Diferensial*. Citra Offset, Yogyakarta.