PEMBANDINGAN METODE ML DAN REML DALAM METODE SEBLUP UNTUK MENDUGA PROPORSI DENGAN MATRIKS *QUEEN CONTIGUITY*

(Skripsi)

Oleh

DELLA DESIYANA

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PEGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

ABSTRACT

COMPARISON OF ML AND REMLMETHOD IN THE SEBLUP METHOD TO ESTIMATE PROPORTIONS WITH QUEEN CONTIGUITY MATRIX

By

Della Desiyana

The direct estimation by adding supporting variables in estimating the parameters is known by the estimation of small areas (Small Area Estimation or SAE). There are two basic assumptions in developing the SAE model, which are fixed model and random effect. The combination of these two assumptions forms a mixed model. One technique for solving linear mixed model is by making prediction of variety component with Maximum Likelihood method (ML) and Restricted Maximum Likelihood method (REML) which is called Empirical Best Linear Unbiased Predictor (EBLUP). In its development, there is a spatial influence that can not be ignored. By incorporating spatial effects into EBLUP model to do the prediction and this is known as Spatial Empirical Best Linear Unbiased Predictor (SEBLUP). This method used a neighborhood matrix that is Queen Contiguity matrix. The estimation value of pre-prosperous families data in sub-district of Bandar Lampung city obtained negative value of spatial autocorrelation coefficient for the ML method and its positive (weak) for the REML method, which means a sub-district of Bandar Lampung city that has large proportion of pre-prosperous families, is not necessarily (weak) surrounded by other sub-districts, and vice versa.

Keywords: Maximum Likelihood Estimation (ML), Restricted Maximum Likelihood Estimation (REML), Queen Contiguity, SEBLUP, Small Area Estimation (SAE)

ABSTRAK

PEMBANDINGAN METODE ML DAN REML DALAM METODE SEBLUP UNTUK MENDUGA PROPORSI DENGAN MATRIKS *QUEEN CONTIGUITY*

Oleh

Della Desiyana

Pendugaan secara tidak langsung dengan cara menambahkan variabel-variabel pendukung dalam menduga parameter dikenal dengan pendugaan area kecil (*Small Area Estimation*). Terdapat dua asumsi dasar dalam mengembangkan model SAE, yaitu pengaruh tetap dan pengaruh acak. Gabungan dari kedua asumsi tersebut membentuk model pengaruh campuran. Teknik penyelesaian model linier campuran salah satunya dengan melakukan pendugaan komponen ragam dengan metode kemungkinan maksimum (ML) dan kemungkinan maksimum terkendala (REML) yang disebut prediksi tak bias linier terbaik empiris (EBLUP). Pada perkembangannya terdapat pengaruh spasial yang tidak dapat diabaikan. Oleh karena itu dengan memasukkan efek spasial ke dalam model EBLUP digunakan pendugaan yang disebut prediksi tak bias linier terbaik empiris spasial (SEBLUP) dengan menggunakan matriks hubungan ketetanggaan yaitu matriks *Queen Contiguity*. Nilai pendugaan yang diaplikasikan pada data keluarga prasejahtera Kota Bandar Lampung tahun 2015 menghasilkan nilai koefisien autokorelasi spasial negatif untuk metode ML dan bernilai positif namun mendekati nol (lemah) untuk metode REML, yang artinya suatu Kecamatan di Kota Bandar Lampung yang memiliki angka proporsi keluarga prasejahtera besar, belum tentu (lemah) dikelilingi oleh kecamatan lain yang besar pula, begitu pula sebaliknya.

Kata Kunci: Penduga Maksimum Likelihood (ML), Penduga Maksimum Likelihood Terkendala (REML), *Queen Contiguity*, SEBLUP, Pendugaan Area Kecil (SAE).

PEMBANDINGAN METODE ML DAN REML DALAM METODE SEBLUP UNTUK MENDUGA PROPORSI DENGAN MATRIKS *QUEEN CONTIGUITY*

Oleh

DELLA DESIYANA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Skripsi	: **PEMBANDINGAN METODE ML DAN REML DALAM METODE SEBLUP UNTUK MENDUGA PROPORSI DENGAN MATRIKS *QUEEN CONTIGUITY***
Nama Mahasiswa	: Della Desiyana
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1347031001
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Widiarti, S.Si., M.Si	**Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**
NIP. 19800502 200501 2 003	NIP.19631108 198902 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dra.Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Widiarti, S.Si., M.Si.**	…………
Sekretaris	: **Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**	…………
Penguji Bukan Pembimbing	: **Drs. Nusyirwan, M.Si.**	…………

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **24 Oktober 2017**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Della Desiyana
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1347031001
Judul	: Pembandingan Metode ML dan REML dalam Metode SEBLUP untuk Menduga Proporsi dengan Matriks *Queen Contiguity*
Jurusan	: Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, Desember 2017
Penulis,

Della Desiyana
NPM. 1347031001

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Pringsewu pada tanggal 20 Desember 1995. Penulis merupakan anak pertama dari pasangan Bapak Yasril dan Ibu Rosilawatih serta kakak dari Muhammad Fazri.

Penulis memulai pendidikan dari taman kanak-kanak TK Aisyiah 1 Pringsewu tahun 2000. Pendidikan sekolah dasar di SD N 1 Pringsewu tahun 2001. Pendidikan sekolah menengah pertama di SMP N 1 Pringsewu pada tahun 2007. Pendidikan sekolah menengah atas di SMA N 1 Pringsewu pada tahun 2013.

Penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Paralel pada tahun 2013. Pada periode tahun 2013/2014 penulis terdaftar sebagai anggota GEMATIKA Himpunan Mahasiswa Matematika FMIPA Unila. Penulis pernah menjadi anggota biro Kesekretariatan Himpunan Mahasiswa Matematika FMIPA Unila pada periode 2014/2015 dan menjadi ketua biro Kesekretariatan Himpunan Mahasiswa Matematika FMIPA Unila pada periode 2015/2016.

Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis telah menyelesaikan Kerja Praktik (KP) di kantor BPS Kabupaten Pringsewu selama kurang lebih satu bulan. Penulis juga telah melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tahun 2016 selama 40 hari di Desa Sangga Buana, Kec. Way Seputih, Kab. Lampung Tengah, Provinsi Lampung.

MOTTO

IF YOU ARE GRATEFUL, I WILL GIVE YOU MORE.
(Soorah 'Ibrahim (14):7)

Allah has purpose for your pain,
a reason for your struggles,
And a reward for your faithfulness.
Don't give up. Trust in Allah!
(Anonim)

Lakukan semua sesuai apa yang ada dihatimu, lakukan lebih banyak lagi kebaikan, hilangkan lebih banyak prasangka buruk. Karena baik ataupun buruk hal yang kamu lakukan, kelak akan ada balasannya.

(Della Desiyana)

PERSEMBAHAN

Puji dan syukur kepada Allah SWT berkat rahmat dan hidayah-Nya sebuah karya sederhana namun penuh perjuangan telah terselesaikan

Kupersembahkan Skripsi ini untuk :

Kedua orang tuaku tercinta

Papa Yasril & Mama Rosilawatih

Serta

Adikku tersayang

Muhammad Fazri

Terimakasih atas kebaikan dan pengorbanan yang tak ternilai harganya
Terimakasih atas setiap doa tulus yang kalian panjatkan
Terimakasih atas cinta dan kasih sayang yang kalian berikan

SANWACANA

Puji syukur kehadirat Allah SWT berkat rahmat dan hidayahnya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW, suri tauladan terbaik sepanjang masa.

Pada proses penyusunan skripsi, penulis memperoleh banyak bantuan, dukungan, bimbingan serta kritik dan saran yang membangun sehingga skripsi ini mampu terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing utama yang telah membimbing penulis dengan setulus hati, menyumbangkan ilmunya, memberikan motivasi diluar perkuliahan serta telah banyak meluangkan waktu ditengah kesibukannya untuk membimbing hingga skripsi ini terselesaikan.
2. Ibu Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku dosen pembimbing pembantu yang telah banyak membantu, memberi masukan serta dengan sabar memberikan pengarahan dalam proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Nusyirwan, M.Si., selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun kepada penulis dalam proses penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si., selaku Pembimbing Akademik.
5. Ibu Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A, Ph.D., selaku Dekan FMIPA Universitas Lampung.
7. Dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA UNILA yang telah memberikan ilmu pengetahuan dan segala bentuk bantuan kepada penulis.
8. Orang tua dan Adik penulis, serta seluruh keluarga yang senantiasa memberikan kasih sayang yang tiada terkira, selalu menjadi penyemangat disaat lemah, selalu memotivasi penulis untuk terus memberikan yang terbaik, serta tak henti-hentinya mendoakan untuk keberhasilan penulis.
9. Teman-teman satu pembimbing yaitu Rifa, Nina, Galuh, Dita, Lia, Chaterine.
10. Teman-teman seperjuangan Retno, Shela, Cinkia, Shintia, Yucky, Tiara, Debi, Dian, Gerry, Besti, Citra, Rafika, Fitri, Hani dan teman-teman angkatan 2013 yang telah banyak membantu, mendukung, mendoakan, serta memberikan motivasi dan semangat kepada penulis.
11. Keluarga besar HIMATIKA terimakasih atas pengalaman yang luar biasa.
12. Seluruh pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu atas peran dan dukungannya dalam menyusun skripsi ini.

Bandar lampung,   Desember 2017
Penulis,

Della Desiyana

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Notasi	Keterangan
$\hat{\theta}_i$	Penduga langsung bagi area ke-i
θ_i	Parameter yang menjadi perhatian bagi area ke-i
e_i	Galat contoh pada area ke-i
β	Koefisien regresi
x_i	Peubah penyerta tingkat area, i=1,2,…,m
v_i	Pengaruh acak area, i=1,2,…,m
z_i	Insiden matriks, i=1,2,…,m
Z	Vektor insiden matriks tingkat area
X	Vektor peubah penyerta tingkat area
ρ	Autoregresif spasial
u	Vektor galat dari peubah acak area
$\mathbf{W}_{queen}$	Matriks pembobot spasial yang belum terstandarisasi
W	Matriks pembobot spasial yang telah terstandarisasi, dimana jumlah setiap baris sama dengan satu
I	Matriks identitas berukuran *m* x *m*
$\mathbf{G}$	Matriks koragam dari *v*
σ_u^2	Ragam pengaruh acak area
σ_i^2	Varian area ke-i
b_i^T	Vektor lokasi area ke-i dengan ukuran 1 x *n*

$\hat{\theta}_i^{s}$	Hasil pendugaan parameter dengan metode SEBLUP
s	Vektor *score* yang elemennya turunan pertama fungsi ln-*likelihood*
$\bar{\mathfrak{I}}$	Matriks informasi fisher yang elemen-elemennya merupakan nilai harapan dari turunan kedua fungsi ln-*likelihood* terhadap masing-masing parameter

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Sensus dan survei merupakan metode dalam statistika untuk mendapatkan data. Keduanya berperan penting dalam proses pengambilan keputusan yang berbasis pada data. Berbagai survei umumnya dirancang untuk menduga parameter populasi berskala nasional. Masalah akan timbul jika dari survei tersebut ingin diperoleh informasi untuk area yang lebih kecil, misalnya pada level provinsi, level kabupaten atau level kecamatan. Dalam menduga area kecil terdapat dua pendugaan yaitu pendugaan secara langsung dan pendugaan secara tidak langsung.

Pendugaan secara langsung pada area kecil akan menghasilkan nilai varians yang besar jika contoh yang diambil berasal dari survei yang dirancang untuk skala besar/nasional. Hal ini disebabkan oleh ukuran contoh yang terambil pada area tersebut kecil. Salah satu solusi yang digunakan adalah melakukan pendugaan tidak langsung dengan cara menambahkan variabel-variabel pendukung dalam menduga parameter. Variabel pendukung tersebut berupa informasi dari area lain yang serupa, survei terdahulu pada area yang sama, atau variabel lain yang berhubungan dengan variabel yang ingin diduga. Pendugaan tidak langsung tersebut dikenal sebagai pendugaan area kecil atau lebih dikenal dengan *Small Area Estimation* (SAE).

Terdapat dua asumsi dasar dalam mengembangkan model SAE, yaitu keragaman di dalam sub populasi sebuah respon dapat diterangkan seluruhnya oleh hubungan keragaman yang bersesuaian pada informasi tambahan yang disebut pengaruh tetap (*fixed model*) dan asumsi keragaman spesifik sub populasi tidak dapat diterangkan oleh informasi tambahan dan merupakan pengaruh acak sub populasi (*random effect*). Gabungan dari kedua asumsi tersebut membentuk model pengaruh campuran (*mixed model*). Salah satu sifat menarik dari model linier campuran adalah kemampuannya dalam menduga kombinasi linier dari pengaruh tetap dan pengaruh acak. Henderson (1953, 1975) mengembangkan teknik penyelesaian model linier campuran, yaitu metode prediksi tak bias linier terbaik (*best linier unbiased prediction*, BLUP). Metode ini kemudian dikaji lebih lanjut oleh Harville (1977) dengan terlebih dahulu melakukan pendugaan komponen ragam dengan metode kemungkinan maksimum (*maximum likelihood*) dan kemungkinan maksimum terkendala (*restricted maximum likelihood*), sehingga disebut prediksi tak bias linier terbaik empiris (*Empirical Best Linear Unbiased Prediction*, EBLUP).

Pada perkembangannya pendekatan EBLUP dikembangkan dengan memasukkan pengaruh spasial ke dalam model. Penduga BLUP dengan memperhatikan pengaruh acak area yang berkorelasi spasial dikenal dengan istilah penduga Spasial BLUP (*Spatial empirical best linear unbiased prediction*). Penduga SEBLUP memasukkan matriks pembobot spasial tetangga terdekat (*nearest neighbors*) ke dalam model EBLUP.

Hal yang sangat penting dalam analisis spasial adalah adanya pembobot atau sering disebut sebagai matriks pembobot spasial. Matriks pembobot spasial digunakan untuk menentukan bobot antar lokasi yang diamati berdasarkan hubungan ketetanggaan antar lokasi. Pada penelitian ini diaplikasikan metode SEBLUP dengan menggunakan matriks pembobot tipe *Queen Contiguity* untuk menduga proporsi Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung tahun 2015 dengan melihat autokorelasi spasial antar wilayah yang berdekatan.

Metode pendugaan parameter SEBLUP yang digunakan delam penelitian ini adalah metode *Maximum Likelihood Estimation* (ML) dan *Restricted Maximum Likelihood Estimation* (REML). Namun estimasi parameter dengan metode tersebut ditemui kendala sehingga sulit ditentukan penyelesaiannya. Oleh karena itu penyelesaiannya ditentukan secara numeric dengan menggunakan *fisher scoring algorithm*.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. Mengkaji metode SEBLUP dalam menduga proporsi Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung tahun 2015 dengan metode ML dan REML dan menggunakan matriks tipe *Queen Contiguity*.
2. Pembandingan MSE (*Mean Square Error*) penduga langsung, MSE ML dan MSE REML.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yaitu:

1. Memperdalam pemahaman mengenai metode pendekatan spasial.
2. Memahami metode pendugaan area kecil yang mengandung efek spasial dengan menggunakan Spasial EBLUP.
3. Sebagai referensi untuk penelitian selanjutnya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pendugaan Area Kecil

Pelaksanaan survey dilakukan utuk melakukan pendugaan parameter populasi. Pendekatan klasik untuk menduga parameter populasi didasarkan pada aplikasi model disain penarikan contoh *(design-based)*, dan penduga yang dihasilkan dari pendekatan itu disebut penduga langsung *(direct estimation)*. Data hasil survey ini dapat digunakan untuk mendapatkan penduga yang terpercaya dari total maupun rata-rata populasi suatu area atau domain dengan jumlah contoh yang besar. Namun, ketika penduga langsung tersebut digunakan untuk suatu area yang kecil, maka akan menimbulkan galat baku yang besar (Gosh dan Rao, 1994). Selain itu, pendugaan langsung tidak dapat dilakukan pada area yang tidak terpilih sebagai contoh, karena tidak adanya data yang dapat digunakan untuk melakukan pendugaan. Suatu area dikatakan kecil jika ukuran contoh dalam domain tersebut tidak cukup memadai untuk mendukung ketelitian penduga langsung (Rao, 2003). Area kecil biasanya digunakan untuk mendefinisikan area geografi yang kecil atau domain yang memiliki ukuran contoh sangat kecil.

Penanganan masalah galat baku dalam pendugaan area kecil dilakukan dengan menambahkan informasi mengenai parameter yang sama pada area kecil lain yang memiliki karakteristik serupa, atau nilai pada waktu yang lalu, atau nilai dari peubah yang memiliki hubungan dengan peubah yang sedang diamati. Pendugaan parameter dan inferensinya yang menggunakan informasi tambahan tersebut dinamakan pendugaan tidak langsung (*indirect estimation*). Metode ini secara statistik memiliki sifat meminjam kekuatan (*borrowing strength*) dari informasi mengenai hubungan antara peubah yang diamati dengan informasi yang ditambahkan, sehingga mengefektifkan jumlah contoh yang kecil.

Asumsi dasar dalam pengembangan model untuk SAE adalah bahwa keragaman di dalam area kecil peubah yang sedang diamati dapat diterangkan oleh hubungan keragaman yang bersesuaian pada informasi tembahan yang disebut sebagai pengaruh tetap. Asumsi lainnya adalah bahwa keragaman khusus area kecil tidak dapat diterangkan oleh informasi tambahan dan merupakan pengaruh acak area kecil. Gabungan dari dua asumsi tersebut membentuk model linier campuran (*mixed models).*

Pendugaan area kecil untuk model pengaruh campuran pertama kali dikembangkan oleh Fay dan Herriot (1979), untuk menduga pendapatan per kapita suatu area kecil berdasarkan data survei Biro Sensus Amerika Serikat (*U.S. Bureau of the Cencus)*. Model ini selanjutnya dikenal dengan model Fay-Herriot yang merupakan model dasar bagi pengembangan pemodelan area kecil, yaitu $\hat{\theta} = \theta_i + e_i$; $\theta_i = x_i^T + v_i$,dimana $\widehat{\theta_i}$ adalah penduga langsung bagi area ke-*i*, θ_i merupakan parameter yang menjadi perhatian bagi area ke-*i*, β adalah koefisien regresi, $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ip})$ adalah peubah penyerta, $e_i$adalah galat contoh pada area ke-*i*. v_i adalah pengaruh acak area dengan e_i dan v_i saling bebas dengan $E(e_i) = E(v_i) = 0$ dan $Var(e_i) = \sigma_i^2$ serta $Var(v_i) = \tau^2$ (i = 1, 2, ..., m).

Tipe model pendugaan area kecil terbagi menjadi dua, yaitu model tingkat area (*basic area level models*) dan model tingkat unit (*unit level area models*) (Gosh dan Rao 1994). Model tingkat area digunakan jika data penyerta yang bersesuaian dengan data peubah yang diamati tidak tersedia hingga tingkat unit pengamatan, sedangkan model tingkat unit digunakan jika data penyerta yang bersesuaian dengan data peubah yang diamati tersedia hingga tingkat unit contoh.

2.2 Statistika Spasial

Statistika spasial adalah metode statistika yang digunakan untuk menganalisis data spasial. Data spasial adalah data yang memuat informasi “lokasi”, jadi tidak hanya “apa” yang diukur tetapi menunjukkan lokasi dimana data itu berada (Banerjee, 2004). Data spasial dapat berupa informasi mengenai lokasi geografi seperti letak garis lintang dan garis bujur dari masing-masing wilayah dan perbatasan antar daerah. Secara sederhana data spasial dinyatakan sebagai informasi alamat. Dalam bentuk yang lain, data spasial dinyatakan dalam bentuk grid koordinat seperti dalam sajian peta ataupun dalam bentuk pixel seperti dalam bentuk citra satelit (Budiyanto, 2010). Dengan demikian pendekatan analisis statistika spasial biasa disajikan dalam bentuk peta tematik.

Hukum pertama tentang geografi dikemukakan oleh W Tobler. Tobler mengemukakan bahwa, semua hal saling berkaitan satu dengan yang lainnya, tetapi sesuatu yang dekat akan lebih berkaitan dari pada hal yang berjauhan. Hukum inilah yang menjadi pilar mengenai kajian sains regional. Dapat disimpulkan bahwa efek spasial merupakan hal yang wajar terjadi antara satu daerah dengan daerah yang lainnya (Anselin, 1993).

2.3 Analisis Data Spasial

Data spasial adalah data yang memuat adanya informasi lokasi atau geografis dari suatu wilayah. Menurut De Mers (dalam Budiyanto, 2010), analisis spasial mengarah pada banyak macam operasi dan konsep termasuk perhitungan sederhana, klasifikasi, penataan, tumpang-susun geometris, dan pemodelan kartografis. Secara umum analisis spasial membutuhkan suatu data yang berdasarkan lokasi dan memuat karakteristik dari lokasi tersebut. Analisis spasial terdiri dari tiga kelompok yaitu visualisasi, eksplorasi, dan pemodelan. Visualisasi adalah menginformasikan hasil analisis spasial. Eksplorasi adalah mengolah data spasial dengan metode statistika. Sedangkan pemodelan adalah menunjukkan adanya konsep hubungan sebab akibat dengan menggunakan metode dari sumber data spasial dan data non spasial untuk memprediksi adanya pola spasial (Pfeiffer, 2008). Lokasi pada data spasial harus diukur agar dapat mengetahui adanya efek spasial yang terjadi. Menurut Kosfeld (2006), informasi lokasi dapat diketahui dari dua sumber yaitu:

1. Hubungan ketetanggaan (*neighborhood*).

Hubungan ketetanggaan mencerminkan lokasi relatif dari satu unit spasial atau lokasi ke lokasi yang lain dalam ruang tertentu. Hubungan ketetanggaan dari unit-unit spasial biasanya dibentuk berdasarkan peta. Ketetanggaan dari unit-unit spasial ini diharapkan dapat mencerminkan derajat ketergantungan spasial yang tinggi jika dibandingkan dengan unit spasial yang letaknya terpisah jauh.

2. Jarak (*distance*) .

Lokasi yang terletak dalam suatu ruang tertentu dengan adanya garis lintang dan garis bujur menjadi sebuah sumber informasi. Informasi inilah yang digunakan untuk menghitung jarak antar titik yang terdapat dalam ruang. Diharapkan kekuatan ketergantungan spasial akan menurun sesuai dengan jarak yang ada.

2.4 Autokorelasi Spasial

Autokorelasi spasial adalah taksiran antar nilai amatan yang berkaitan dengan lokasi spasial pada variabel yang sama. Autokorelasi spasial positif menunjukkan adanya kemiripan nilai dari lokasi-lokasi yang berdekatan dan cenderung berkelompok. Sedangkan autokorelasi spasial yang negatif menunjukkan bahwa lokasi-lokasi yang berdekatan mempunyai nilai yang berbeda dan cenderung menyebar.

Karakteristik dari autokorelasi spasial yang diungkapkan oleh Kosfled (2006), yaitu:

1. Jika terdapat pola sistematis pada distribusi spasial dari variabel yang diamati, maka terdapat autokorelasi spasial.
2. Jika kedekatan atau ketetanggaan antar daerah lebih dekat, maka dapat dikatakan ada autokorelasi spasial positif.
3. Autokorelasi spasial negatif menggambarkan pola ketetanggaan yang tidak simetris.

4. Pola acak dari data spasial menunjukkan tidak ada autokorelasi spasial.

2.5 Matriks Pembobot Spasial

Hal yang sangat penting dalam analisis spasial adalah adanya pembobot atau sering disebut sebagai matriks pembobot spasial. Matriks pembobot spasial digunakan untuk menentukan bobot antar lokasi yang diamati berdasarkan hubungan ketetanggaan antar lokasi. Menurut Kosfeld (2006), pada grid umum ketetanggaan dapat didefinisikan dalam beberapa cara, yaitu:

a. *Rook contiguity*

Daerah pengamatannya ditentukan berdasarkan sisi-sisi yang saling bersinggungan (berbatasan) dan sudut tidak diperhitungkan. Ilustrasi *rook contiguity* dilihat pada Gambar 1, dimana unit B1, B2, B3, dan B4 merupakan tetangga dari unit A

		Unit B2		
	Unit B1	Unit A	Unit B3	
		Unit B4		

Gambar 1. *Rook Contiguity*

b. *Bishop contiguity*

Daerah pengamatannya ditentukan berdasarkan sudut-sudutdaerah yang saling bersinggungan (berbatasan) dan sisi tidak diperhitungkan. Ilustrasi untuk *bishop contiguity* dilihat pada Gambar 2, diana unit C1, C2, C3, dan C4 merupakan tetangga dari unit A

	Unit C1		Unit C2	
		Unit A		
	Unit C4		Unit C3	

Gambar 2. *Bishop Contiguity*

c. *Queen contiguity*

Daerah pengamatannya ditentukan berdasarkan sisi-sisi yang saling bersinggungan (berbatasan) dan sudut juga diperhitungkan. Ilustrasi untuk *queen contiguity* dapat dilihat pada Gambar 3, dimana unit B1, B2, B3, dan B4 serta C1, C2, C3, dan C4 merupakan tetangga dari unit A

	Unit C1	Unit B2	Unit C2	
	Unit B1	Unit A	Unit B3	
	Unit C4	Unit B4	Unit C3	

Gambar 3. *Queen Contiguity*

Pada umumnya ketetanggaan antar lokasi didasarkan pada sisi-sisi utama bukan sudutnya. Menurut Kosfeld, matriks pembobot spasial **W** dapat diperoleh dari dua cara yaitu matriks pembobot terstandarisasi (*standardize contiguity matrix* $\boldsymbol{W}^*$) dan matriks pembobot tak terstandarisasi (*unstandardize contiguity matrix*). Matriks pembobot terstandarisasi (*standardize contiguity matrix* $\boldsymbol{W}^*$) merupakan matriks pembobot yang diperoleh dengan cara memberikan bobot yang sama rata terhadap tetangga lokasi terdekat dan yang lainnya nol, sedangkan matriks pembobot tak terstandarisasi (*unstandardize contiguity matrix*) merupakan matriks pembobot yang diperoleh dengan cara memberikan bobot satu bagi tetangga terdekat dan yang lainnya nol.

2.6 Prediksi Tak Bias Linier Terbaik Empiris

Model pengaruh campuran Fay-Herriot selanjutnya dijabarkan oleh Russo et. al (2005) untuk tingkat area sebagai berikut:

1. $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$, merupakan vektor data pendukung (peubah penyerta).
2. $\theta_i = x_i^T \beta + z_i v_i$, untuk $i = 1, 2, \dots, m$. θ_i merupakan parameter yang menjadi perhatian dan diasumsikan memiliki hubungan dengan peubah penyerta pada (1).
3. $E(v_i) = 0$, $Var(v_i) = \sigma_v^2$
4. $\hat{\theta}_i = \theta_i + e_i$, penduga langsung untuk domain ke-*i* yang merupakan fungsi linier dari parameter yang menjadi perhatian dan galat contoh e_i.
5. $\hat{\theta}_i = x_i^T \beta + z_i v_i + e_i$, untuk $i = 1, 2, \dots, m$ merupakan gabungan dari (2) dan (4) yang terdiri dari pengaruh acak dan pengaruh tetap sehingga menjadi bentuk khusus dari model linier campuran dengan struktur peragam yang diagonal.

Model nomor (5) tersebut merupakan model tingkat area, yaitu:

$$\hat{\theta}_i = x_i^T \beta + z_i v_i + e_i \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m \qquad (2.1)$$

dengan x_i adalah peubah penyerta tingkat area dan z_i adalah insiden matriks. Model persamaan (2.1) merupakan kasus khusus dari model linier campuran terampat dengan struktur koragam diagonal. Teknik penyelesaian model tersebut untuk memperoleh BLUP bagi $\theta_i = x_i^T\beta + z_i v_i$ telah dikembangkan oleh Henderson (1953, 1975), dengan asumsi σ_v^2 diketahui. Penduga BLUP dari θ_i berdasarkan persamaan (2.1) adalah:

$$\tilde{\theta}_i = x_i^T\tilde{\beta} + \gamma_i(\hat{\theta}_i - x_i^T\tilde{\beta})$$

$$= \gamma_i\hat{\theta}_i + (1-\gamma_i)x_i^T\tilde{\beta} \qquad (2.2)$$

dengan $\gamma_i = \sigma_v^2 z_i^2/(\sigma_v^2 z_i^2 + \sigma_i^2)$ dan $\tilde{\beta}$ adalah koefisien regresi yang diduga dengan *generaized least square* (GLS), yaitu $\tilde{\beta} = (\mathbf{X}^T V^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T V^{-1} Y$. Kuadrat tengah galat (*Mean square error,* MSE) dari $[\hat{\theta}_i(\sigma_v^2)]$ adalah:

$$\text{MSE}[\hat{\theta}_i(\sigma_v^2)] = g_{1i}(\sigma_v^2) + g_{2i}(\sigma_v^2) \qquad (2.3)$$

2.7 Prediksi Tak Bias Linier Terbaik Empiris Spasial

Misalkan didefinisikan vektor $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, ..., \hat{\theta}_m)^T$, $\boldsymbol{v} = (v_1, ..., v_m)^T$ dan
$\boldsymbol{e} = (e_1, ..., e_m)^T$, dan matriks $\mathbf{X} = (x_1^T, ..., x_m^T)^T$ dan $\mathbf{Z} = \text{diag}(z_1, ..., z_m)$ (merupakan matriks identitas). Berdasarkan definisi vektor dan matriks tersebut, maka persamaan $\hat{\theta} = x_i^T\beta + z_i v_i + e_i$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dalam notasi matriks adalah:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}v + \boldsymbol{e} \qquad (2.4)$$

Model pada persamaan (2.4) mengasumsikan bahwa terdapat pengaruh acak area, namun pengaruh tersebut saling bebas antar area. Pada kenyataannya, sangat beralasan untuk mengatakan bahwa ada korelasi antar area yang berdekatan. Korelasi tersebut akan semakin berkurang seiring dengan jarak yang bertambah. Hal ini sesuai dengan hukum pertama tentang geografi yang dikemukakan oleh Tobler (Tobler's *first law of geography*) dalam Schanbenberger dan Gotway (2005) yang merupakan pilar kajian analisis data spasial, yaitu "*everything is* *related to everything else, but near things are more related than distant things*". Segala sesuatu saling berhubungan satu dengan yang lainnya, tetapi sesuatu yang lebih dekat akan lebih berpengaruh daripada sesuatu yang jauh.

Model SAE dengan memasukkan korelasi spasial antar area pertama kali diperkenalkan oleh Cressie (Cressie 1991 diacu dalam Rao 2003), dengan mengasumsikan ketergantungan spasial mengikuti proses *Conditional Autoregressive* (Otoregresif bersyarat, CAR). Model SAE ini kemudian dikembangkan lagi oleh beberapa peneliti, diantaranya Salvati (2004), Pratesi dan Salvati (2008), Singh et al. (2005) dengan mengasumsikan bahwa ketergatungan spasial yang dimasukkan ke dalam komponen galat dari faktor acak mengikuti proses *Simultaneous autoregressive* (Simultan otoregresif, SAR). Model SAR sendiri pertama kali diperkenalkan oleh Anselin (1993) dimana vektor pengaruh acak $v = (v_i)$ memenuhi:

$$v = \rho \mathbf{W} v + \boldsymbol{u} \quad (2.5)$$

Koefisien ρ dalam persamaan (2.5) adalah koefisien autoregresif spasial yang menunjukkan kekuatan dari hubungan spasial antar pengaruh acak. Nilai ρ berkisar antara – 1 hingga 1. Nilai $\rho > 0$ menunjukkan bahwa suatu area dengan nilai parameter yang tinggi pula dan sebuah area dengan nilai parameter yang rendah dikelilingi oleh area dengan nilai parameter yang rendah pula. Disisi lain, $\rho < 0$ menunjukkan bahwa suatu area dengan nilai parameter yang tinggi dikelilingi oleh area lain dengan nilai parameter yang rendah, atau sebaliknya (Savitz dan Raudenbush, 2009). **W** adalah matriks pembobot spasial yang menggambarkan struktur ketetanggaan dari area kecil dalam bentuk standarisasi baris (jumlah setiap baris pada matriks **W** adalah 1), v adalah pengaruh acak area dan u adalah vektor galat dari peubah acak area dengan rata-rata sama dengan nol dan ragam $\sigma_u^2\mathbf{I}_m$. Persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai berikut:

$$v = (\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})^{-1}\boldsymbol{u} \tag{2.6}$$

dengan **I** adalah matriks identitas berukuran m x m. Dari persamaan (2.6) terlihat bahwa rata-rata $\boldsymbol{v}$ adalah 0 dan matriks koragam $\boldsymbol{v}(\mathbf{G})$ adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{G} = E[\mathbf{vv^T}] = E[(\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{-1}\mathbf{uu^T}((\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{-1})^{\mathrm{T}}]$$

$$= (\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{-1}E[\mathbf{uu^T}]((\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{-1})^{\mathrm{T}}$$

$$= (\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{-1}\sigma_{\boldsymbol{u}}^2\mathbf{I}((\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{-1})^{\mathrm{T}}$$

$$= \sigma_{\boldsymbol{u}}^2(\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{-1}((\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{\mathbf{T}})^{-1}$$

$$= \sigma_{\boldsymbol{u}}^2[(\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})(\mathbf{I} - \boldsymbol{\rho}\mathbf{W})^{\mathbf{T}}]^{-1}$$

$$\mathbf{G} = \sigma_{\boldsymbol{u}}^2[(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}^T)]^{-1} \tag{2.7}$$

Persamaan (2.6) dimasukkan ke dalam persamaan (2.4) menghasilkan:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})^{-1}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{e} \tag{2.8}$$

Matriks koragam dari $\hat{\theta}$ dengan R = diag(σ_i^2) adalah:

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} + \mathbf{ZGZ}^T = \mathrm{diag}(\sigma_i^2) + \mathbf{Z}\sigma_{\boldsymbol{u}}^2[(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}^T)]^{-1}\mathbf{Z}^T \tag{2.9}$$

Penduga Spasial BLUP untuk parameter θ_i dengan σ_u^2, σ_i^2 dan ρ diketahui adalah:

$$\widetilde{\theta_i^s}(\sigma_{\boldsymbol{u}}^2, \rho) = xi\hat{\beta} + \boldsymbol{b}_i^T\{\sigma_{\boldsymbol{u}}^2[(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}^T)]^{-1}\}\mathbf{Z}^T$$

$$\times \{\mathrm{diag}(\sigma_i^2) + \mathbf{Z}\sigma_{\boldsymbol{u}}^2[(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}^T)]^{-1}\mathbf{Z}^T\}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{X}\hat{\beta}) \tag{2.10}$$

dimana $\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{V}^{-1}\hat{\theta}$ dan b_i^T adalah vektor berukuran 1 x n (0, 0, ...0, 1, 0, ...0) dengan 1 menunjukkan pada lokasi ke-i. Penduga Spasial BLUP tersebut diperoleh dengan memasukkan matriks koragam pada persamaan (2.9) ke dalam penduga BLUP. Spatial BLUP akan sama dengan BLUP jika ρ = 0.

Seperti halnya dengan penduga EBLUP, penduga SEBLUP ($\widetilde{\theta_i^s}(\widehat{\sigma_u^2}, \hat{\rho})$) diperoleh dari Spasial BLUP dengan mengganti nilai σ_u^2, ρ dengan pendugaannya. Asumsi kenormalan dari pengaruh acak digunakan untuk menduga σ_u^2 dan ρ dengan menggunakan prosedur baik ML maupun REML dengan fungsi log-likelihood memiliki maksimum global dan beberapa maximum lokal (Patresi dan Salvati 2005 diacu dalam Pratesi dan Salvati 2008). Hasil pendugaan tersebut kemudian digunakan untuk melakukan pendugaan terhadap SEBLUP, dengan rumus penduga SEBLUP adalah:

$$\widetilde{\theta_i^s}(\widehat{\sigma_u^2}, \hat{\rho}) = xi\hat{\beta} + \mathbf{b}_i^T \{\hat{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^2[(\mathbf{I} - \hat{\rho}\mathbf{W})(\mathbf{I} - \hat{\rho}\mathbf{W}^T)]^{-1}\}\mathbf{Z}^T$$

$$\times \{ \text{diag}(\sigma_i^2) + \mathbf{Z}\hat{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^2[(\mathbf{I} - \hat{\rho}\mathbf{W})(\mathbf{I} - \hat{\rho}\mathbf{W}^T)]^{-1}\mathbf{Z}^T\}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{X}\hat{\beta}) \quad (2.14)$$

Dengan mengasumsikan normalitas, σ_u^2 dan ρ dapat diestimasi keduanya dengan prosedur ML (*Maximum Likelihood*) dan REML (*Restricted Maximum Likelihood*). Penelitian ini menggunakan distribusi Normal Multivariate.

Fungsi kepekatan peluang (fkp) dari distribusi Normal Multivariate yaitu:

$$f(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-(\boldsymbol{X}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{X}-\mu)/2} \;;\; -\infty < x_i < \infty \;; i = 1, \dots, p$$

dengan $\mathbf{X} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\mu = \boldsymbol{X}\beta$ dan $\Sigma = \mathbf{V}$

$$f(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\mathbf{V}|^{1/2}} e^{-(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{X}\beta)^T\mathbf{V}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{X}\beta)/2} \;;\; -\infty < \theta_i < \infty \;; i = 1, \dots, m$$

fungsi log-likelihood daridistribusi Normal Multivariate yaitu:

$$l(\beta, \sigma_u^2, \rho) = -\frac{1}{2}\text{m}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log|\mathbf{V}| - \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{X}\beta)^T\mathbf{V}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{X}\beta) \quad (2.15)$$

dengan $\mathbf{V}$ telah dijelaskan pada persamaan (2.9). Dan turunan parsial dari $l(\beta, \sigma_u^2, \rho)$ dengan menggunakan metode ML (*Maximum Likelihood*) yaitu

$$s_{\sigma_u^2}\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma_u^2, \rho\right) = \frac{\partial l}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{1}{2} tr\{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\} + \frac{1}{2}(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{X}\beta)^T \mathbf{V}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{X}\beta)$$

$$s_{R_p}\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma_u^2, \rho\right) = \frac{\partial l}{\partial \rho} = -\frac{1}{2} tr\{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\sigma_u^2[-\mathbf{C}^{-1}(2\rho\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathbf{T}} - 2\mathbf{W})\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\}$$

$$+\frac{1}{2}(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{X}\beta)^T \mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\sigma_u^2[-\mathbf{C}^{-1}(2\rho\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathbf{T}} - 2\mathbf{W})\mathbf{C}^{-1}]\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{X}\beta) \qquad (2.16)$$

Kemudian matriks yang berisikan turunan kedua dari fungsi log-likelihood yaitu matriks *Fisher scoring* adalah

$$\mathfrak{T}(\sigma_u^2, \rho) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} tr\{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\} & \frac{1}{2} tr\{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\} \\ \frac{1}{2} tr\{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\} & \frac{1}{2} tr\{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\} \end{bmatrix} \qquad (2.17)$$

dengan $\mathbf{A} = \sigma_u^2[-\mathbf{C}^{-1}(2\rho\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathbf{T}} - 2\mathbf{W})\mathbf{C}^{-1}]$. Penduga ML $\hat{\sigma}_{u_{ML}}^2$ dan $\hat{\rho}_{ML}$didapat secara iterative dengan menggunakan algoritma "*scoring*":

$$\begin{bmatrix} \sigma_u^2 \\ \rho \end{bmatrix}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 \\ \rho \end{bmatrix}^{(n)} + \left[\mathfrak{T}(\sigma_u^{2(n)}, \rho^n)\right]^{-1} s\left[\hat{\beta}(\sigma_u^{2(n)}, \rho^n), \sigma_u^{2(n)}, \rho^n\right] \qquad (2.18)$$

dengan n merupakan nilai dari iterasi yang telah ditentukan nilai awal n=0, serta *s* yang merupaka vektor *score* yaitu vektor yang elemennya turunan pertama fungsi ln-*likelihood* terhadap masing-masing parameter.

Turunan parsial dari fungsi *log-likelihood* terkendala (REML) $l_R(\beta, \sigma_u^2, \rho)$ dengan memperhatikan komponen varian yaitu

$$s_{R_{\sigma_u^2}}(\sigma_u^2, \rho) = \frac{\partial l_R}{\partial \sigma_u^2} = -\frac{1}{2} tr\{\mathbf{P}\mathbf{Z}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\} + \frac{1}{2}\hat{\theta}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{P}\mathbf{Z}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\hat{\theta}$$

$$s_{R_p}(\sigma_u^2, \rho) = \frac{\partial l_R}{\partial \rho} = -\frac{1}{2} tr\{\mathbf{P}\mathbf{Z}\sigma_u^2[-\mathbf{C}^{-1}(2\rho\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathbf{T}} - 2\mathbf{W})\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\}$$

$$+\frac{1}{2}\hat{\theta}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{P}\mathbf{Z}\sigma_u^2[-\mathbf{C}^{-1}(2\rho\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathbf{T}} - 2\mathbf{W})\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\hat{\theta} \qquad (2.19)$$

Dengan $\mathbf{P} = \mathbf{V^{-1}} - \mathbf{V^{-1}X}(\mathbf{X^TV^{-1}X})^{-1}\mathbf{X^TV^{-1}}$ dan $\mathbf{C} = [(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}T)]$. Kemudian matriks berisi turunan kedua yang langsung diterapkan dengan algoritma "*scoring*" dan langkah selanjutnya mengikuti langkah prosedur ML dengan matriks *Fisher scoring* sebagai berikut

$$\mathfrak{I}_R(\sigma_u^2, \rho) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}tr\{\mathbf{PZC^{-1}Z^TPZC^{-1}Z^T}\} & \frac{1}{2}tr\{\mathbf{PZC^{-1}Z^TPZAZ^T}\} \\ \frac{1}{2}tr\{\mathbf{PZAZ^TPZC^{-1}Z^T}\} & \frac{1}{2}tr\{\mathbf{PZAZ^TPZAZ^T}\} \end{bmatrix} \qquad (2.20)$$

MSE dari penduga Spasial EBLUP muncul dengan tidak mengacuhkan penduga σ_u^2dan ρ. Normalitas dari efek acak nilai MSE didapat dengan persamaan

$$MSE\left[\tilde{\theta}_i(\hat{\sigma}_u^2)\right] = MSE\left[\tilde{\theta}_i(\sigma_u^2)\right] + E[\tilde{\theta}_i(\hat{\sigma}_u^2) - \tilde{\theta}_i(\sigma_u^2)]^2 \qquad (2.21)$$

dimana persamaan akhir didapatkan dengan pendekatan secara umum. Kemudian pendekatan untuk $MSE\left[\tilde{\theta}_i(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})\right]$ adalah:

$$MSE\left[\tilde{\theta}_i^S(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})\right] \approx g_{1i}(\sigma_u^2, \rho) + g_{2i}(\sigma_u^2, \rho) + g_{3i}(\sigma_u^2, \rho) \qquad (2.22)$$

dimana $g_{3i}(\sigma_u^2, \rho)$ didapat dengan pendekatan

$$tr\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{b_i^T}\left(\mathbf{C^{-1}Z^TV^{-1}} + \boldsymbol{\sigma_u^2}\mathbf{C^{-1}Z^T}(-\mathbf{V^{-1}ZC^{-1}Z^TV^{-1}})\right) \\ \boldsymbol{b_i^T}\left(\mathbf{AZ^TV^{-1}} + \boldsymbol{\sigma_u^2}\mathbf{C^{-1}Z^T}(-\mathbf{V^{-1}ZAZ^TV^{-1}})\right) \end{bmatrix}\mathbf{V}$$

$$\times \begin{bmatrix} b_i^T\left(\mathbf{C^{-1}Z^TV^{-1}} + \sigma_u^2\mathbf{C^{-1}Z^T}(-\mathbf{V^{-1}ZC^{-1}Z^TV^{-1}})\right) \\ b_i^T\left(\mathbf{AZ^TV^{-1}} + \sigma_u^2\mathbf{C^{-1}Z^T}(-\mathbf{V^{-1}ZAZ^TV^{-1}})\right) \end{bmatrix}^T \bar{\mathbf{V}}(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})\} \qquad (2.23)$$

Pada praktiknya penggunaan penduga $\tilde{\theta}_i^S(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})$ telah terhubung dengan penduga dari $MSE\left[\tilde{\theta}_i^S(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})\right]$. Sebuah penduga tak bias dengan pendekatan pada MSE telah terhitung dengan mengikuti pernyataan:

$$MSE\left[\tilde{\theta}_i^S(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})\right] \approx g_{1i}(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho}) + g_{2i}(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho}) + 2g_{3i}(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho}) \qquad (2.24)$$

2.8 *Maximum Likelihood Estimation* (ML) dan *Restricted Maximum Likelohood* (REML)

MLE (*Maximum Likelihood Estimation*) merupakan metode pendugaan parameter yang menggunakan pendeketan distribusi dari data yang dimiliki serta asumsi distribusi yang diberlakukan oleh data tersebut, sehingga dapat diperoleh fungsi likelihood dari suatu data tersebut. Penduga yang diperoleh dengan metode MLE mempunyai sifat yang konsisten dan sifat-sifat lain yang sangat diperlukan sebagai suatu penduga.

Dalam menggunakan metode MLE, pertama kita misalkan bahwa peubah acak dari suatu populasi adalah X, dimana X mempunyai fungsi peluang yang mewakili beberapa parameter $\boldsymbol{\theta}$:$\boldsymbol{Pr}$ $\boldsymbol{x}$ = x = $f(x;\theta)$. Lalu kita misalkan bahwa fungsi f diketahui tetapi nilai θ tidak diketahui.

Fungsi peluang bersama dari peubah acak (x_1,x_2,…,x_n) dapat ditulis menjadi:

$$(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{f}(x1, x2, \dots, xn ; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i; \boldsymbol{\theta}) \qquad (2.25)$$

fungsi tersebut lebih dikenal dengan sebutan likelihood dari suatu sampel. Sifat dari MLE ini diperlukan untuk memilih penduga dari parameter yang tidak diketahui. Jika suatu kelompok distribusi ingin menentukan dua atau lebih parameter yang tidak diketahui, yaitu $\boldsymbol{\theta}_{1,2,\dots,n}$ maka fungsi likelihood dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_n) &= f(x_1, \dots, x_n; \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_k) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_k) \qquad (2.26) \end{aligned}$$

Prosedur ML menghasilkan penduga yang bias dari parameter acak. Hal ini menjadi penting dalam sampel yang kecil dan dapat menghasilkan penduga yang tak bias apabila menggunakan REML. Estimasi $\boldsymbol{\theta}$ dalam REML didasarkan pada optimalisasi dan mengikuti fungsi log-likelihood (Brunk, 1975).

2.9 Generalisasi Kuadrat Terkecil (*Generalized Least Squares*)

Perhatikan model linier

$$Y = \boldsymbol{X}\beta + \varepsilon \tag{2.27}$$

Diasumsikan matriks kovariansnya $\sum \sigma^2 \Delta(\sigma^2 < \infty)$ dengan σ^2 adalah parameter yang tidak diketahui nilainya dan Δ adalah matriks definit positif nxn dengan trace matriks sama dengan n. jika suatu matriks Q adalah simetrik definit positif maka Q nonsingular atauQ^{-1} ada, dan karena itu ada matriks nxn nonsingular (misal P) sedemikian rupa sehingga

$$\mathbf{P^T P} = \mathbf{Q^{-1}} \tag{2.28}$$

Matriks Δ adalah simetriks dan definit positif sehingga non-singular, karena itu ada suatu matriks nxn nonsingular P sehingga $P^T P = \Delta^{-1}$. Pada model linear kalikan kedua ruas dengan matriks P ini:

$$\mathbf{P}\mathrm{Y} = \mathbf{PX}\beta + \mathbf{P}\varepsilon \tag{2.29}$$

Penerapan metode kuadrat terkecil pada model di atas akan menghasilkan persamaan normal sebagai berikut:

$$\mathbf{P^T P P}\mathrm{Y} = \mathbf{X^T P^T P X}B \tag{2.30}$$

dengan B adalah penduga kuadrat terkecil untuk β berdasarkan model di atas. Karena $\boldsymbol{X^T P^T P X}$ adalah matriks definit positif jika $\mathbf{X}$ mempunyai peringkat kolom penuh (*full column rank*) sehingga $\boldsymbol{X^T P^T P X}$ adalah nonsingular dan $\boldsymbol{P^T P} = \Delta^{-1}$ maka solusi persamaannya adalah

$$B = \mathbf{X^T P^T P X^{-1} X^T P^T P} \mathrm{Y} \tag{2.31}$$

atau

$$B = (\mathbf{X}'\Delta^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\Delta^{-1}\mathrm{Y} \tag{2.32}$$

Persamaan terakhir ini dinamakan penduga kuadrat terkecil umum (*Generalized Least Squares*) untuk β selanjutnya disingkat dengan GLS (Usman, M. danWarsono, 2009).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun akademik 2016/2017, bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung, Lampung.

3.2. Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah :

1. Data sekunder yang diambil dari BKKBN kota Bandar Lampung dengan variabel sebagai berikut:

Y : Jumlah keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung tahun 2015

X1 : Jumlah keluarga membeli satu stel pakaian baru untuk seluruh anggota keluarga

X2 : Jumlah keluarga makan minimal 2 kali sehari

X3 : Jumlah keluarga bila sakit akan berobat ke fasilitas kesehatan

X4 : Jumlah keluarga memakai pakaian berbeda untuk di rumah, bekerja/sekolah, dan bepergian

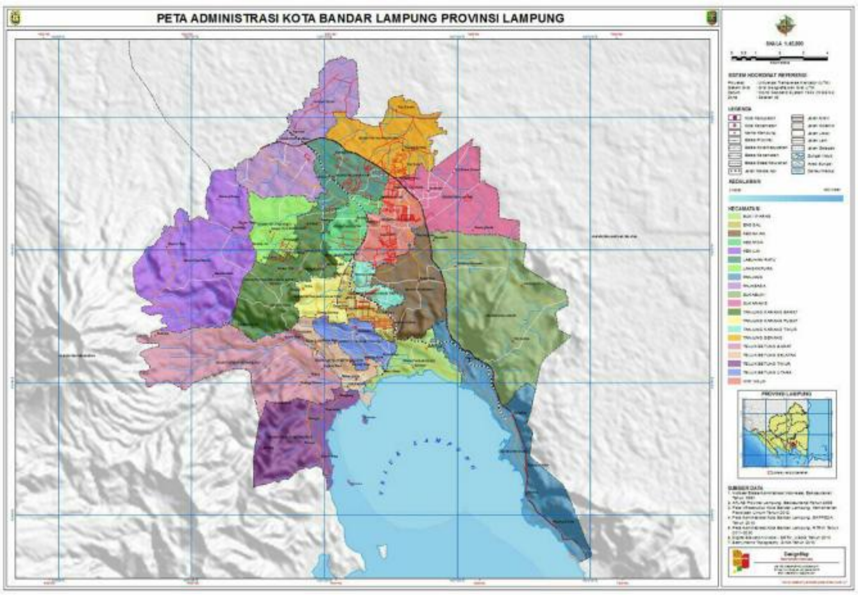
X5 : Jumlah keluarga makan ikan/daging/telur minimal seminggu sekali

X6 : Jumlah keluarga menjalankan ibadah sesuai ketentuan agama yang dianut

Tabel 3.1 Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung tahun 2015 beserta Variabel Penyerta

No.	Kecamatan	y	Jumlah Keluarga	x1	x2	x3	x4	x5	x6
1	Kedaton	1596	9699	8452	9057	9374	9157	8087	9626
2	Sukarame	480	6902	6772	6788	6852	6848	6742	6883
3	Tj. Karang Barat	787	11521	11258	11462	11488	11432	11276	11426
4	Panjang	2253	9980	8945	8538	9890	9783	8538	9537
5	Tj. Karang Timur	760	7492	6493	7175	7445	7380	6390	7391
6	Tj. Karang Pusat	878	9966	9854	9928	9834	9879	9846	9911
7	Teluk Betung Selatan	1294	8853	8411	8474	8770	8275	6909	8686
8	Teluk Betung Barat	1130	7106	6429	6735	7081	6960	6107	7090
9	Teluk Betung Utara	621	10920	10566	10897	10890	10842	10651	10907
10	Rajabasa	909	8887	8644	8736	8856	8828	8694	8877
11	Tanjung Senang	1067	10149	9192	9914	9911	9818	9389	10035
12	Sukabumi	2419	12064	10895	10751	11968	11678	9733	12049
13	Kemiling	2002	16034	13439	15552	15831	15738	13163	15512
14	Kedamaian	797	10333	9998	10081	10265	10261	9945	10298
15	Teluk Betung Timur	4128	10497	6541	9125	9594	8011	5655	9945
16	Way Halim	1153	13471	13241	13342	13440	13263	12793	13282
17	Enggal	227	5262	5155	5197	5246	5243	4890	5248
18	Langkapura	667	7672	7512	7407	7655	7617	7520	7653
19	Labuhan Ratu	448	5189	5083	5019	5167	5102	5080	5178
20	Bumi Waras	793	9185	9039	9155	9170	9132	7228	9120

2. Data yang digunakan untuk menentukan matriks pembobot W adalah peta kota Bandar Lampung tahun 2017.



3.3 Metode Penelitian

Pada penelitian ini akan diduga angka proporsi keluarga prasejahtera Kota Bandar Lampung dengan metode SEBLUP. Adapun langkah-langkah untuk menduga proporsi sebagai berikut:

1. Menentukan matriks pembobot spasial yang telah terstandarisasi yaitu dengan matriks *contiguity* tipe *Queen.*
2. Melakukan pendugaan langsung dengan menghitung proporsi Keluarga Prasejahtera kota Bandar Lampung tahun 2015 dengan rumus :

   $\hat{p}_i = \frac{y_i}{n_i}$, untuk i =1, 2, …………., 20.

   dengan :

   $\hat{p}_i$ = proporsi keluarga prasejahtera kota Bandar Lampung tahun 2015

   y_i = jumlah keluarga prasejahtera kota Bandar Lampung tahun 2015 ke-i

   n_i = jumlah kecamatan kota Bandar Lampung ke-i
3. Menghitung ragam dari peubah respon yaitu data jumlah keluarga prasejahtera kota Bandar Lampung tahun 2015 dengan p berdistribusi binomial dengan rumus :

   $$Var(\hat{p}_i) = Var\left(\frac{y_i}{n_i}\right), y_i \sim \text{Binomial } (n_i, p_i)$$

   $$Var(\hat{p}_i) = \frac{1}{n_i^2} Var(y_i)$$

   $$Var(\hat{p}_i) = \frac{1}{n_i^2} (n_i \hat{p}_i (1 - \hat{p}_i))$$

   $$Var(\hat{p}_i) = \frac{1}{n_i} (\hat{p}_i (1 - \hat{p}_i))$$
4. Melakukan pendugaan komponen ragam dari pengaruh acak σ_u^2 dan koefisien autokorelasi spasial ρ dengan menggunakan *algoritma fisher scoring* dengan rumus :

   $$\begin{bmatrix} \sigma_u^2 \\ \rho \end{bmatrix}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 \\ \rho \end{bmatrix}^{(n)} + \left[\mathfrak{I}(\sigma_u^{2(n)}, \rho^n)\right]^{-1} s\left[\hat{\beta}(\sigma_u^{2(n)}, \rho^n), \sigma_u^{2(n)}, \quad \rho^n\right]$$

5. Melakukan pendugaan koefisien regresi (β) dengan GLS (nilai σ_u^2 dan ρ telah dicari masing-masing dengan ML dan REML) yaitu :

$$\hat{\beta} = (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1}$$

6. Melakukan pendugaan proporsi jumlah keluarga prasejahtera kota Bandar Lampung dengan metode SEBLUP dengan rumus :

$$\tilde{\theta}_i^S(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho}) = \boldsymbol{x_i}\hat{\beta} + \boldsymbol{b_i^T}\left\{\hat{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{2}}[(\mathbf{I} - \hat{\rho}\mathbf{W}^T)(\mathrm{I} - \hat{\rho}\mathbf{W}^T)]^{-1}\right\}\boldsymbol{Z}^T\left\{\boldsymbol{diag}(\sigma_i^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{Z}\,\sigma_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{2}}\left(\mathbf{I} - \hat{\rho}\mathbf{W}^T\right)(\mathrm{I} - \hat{\rho}\mathbf{W}^T)\right]^{-1}\Big\}^{\boldsymbol{-1}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})$$

7. Membandingkan nilai MSE (*Mean Square Error*) dari metode ML dan REML pada penduga SEBLUP dengan rumus penduga langsung sebagai berikut:

$$MSE(\hat{p}_i^{seblup}) = var(\hat{p}^{seblup}) + bias^2$$

mencari MSE dengan metode ML dan REML

$$MSE[\tilde{\theta}_i(\hat{\sigma}_u^2, \rho)] = MSE[\tilde{\theta}_i(\boldsymbol{\sigma_u^2}, \rho)] + E[\tilde{\theta}_i(\hat{\sigma}_u^2, \rho) - \tilde{\theta}_i(\boldsymbol{\sigma_u^2}, \rho)]^{\boldsymbol{2}}$$

atau dengan pendekatan

$$MSE\left[\tilde{\theta}_i^S(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})\right] \approx g_{1i}(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho}) + g_{2i}(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho}) + 2g_{3i}(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\rho})$$

V. KESIMPULAN

Adapun kesimpulan dari penelitian ini yaitu:

1. Nilai dugaan untuk koefisien autokorelasi spasial yang dihasilkan pada data Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung Tahun 2015 bernilai negatif untuk metode ML dan bernilai positif namun mendekati 0 (lemah) untuk metode REML, artinya bahwa suatu kecamatan di Kota Bandar Lampung yang memiliki angka proporsi keluarga prasejahtera besar, belum tentu (lemah) dikelilingi oleh kecamatan lain yang memiliki angka proporsi keluarga Prasejahtera yang besar pula, dan suatu kecamatan yang memiliki angka proporsi keluarga Prasejahtera kecil, belum tentu (lemah) pula dikelilingi oleh kecamatan lain yang memiliki angka proporsi keluarga Prasejahtera yang kecil. Hal ini juga didukung oleh nilai penduga ragam dari galat pengaruh acak area yang bernilai 0 untuk kedua metode.
2. MSE metode ML dan REML lebih besar dibandingkan dengan metode penduga langsung. Dengan demikian proporsi keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung tahun 2015 lebih akurat diduga menggunakan metode penduga langsung dibandingkan dengan menggunakan metode ML dan REML.

DAFTAR PUSTAKA

Anselin, L. 1993. *Exprolatory Spatial Data Analysis and Geographic Information Systems*. National Center for Geographic Information and Analysis of California. Santa Barbara: CA93106.

Banerjee, S. 2004. *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data.* Chapman and Hall/CRC. Boca Raton.

Budiyanto, E. 2010. *Sistem Informasi Geografis dengan ArcView GIS*. Penerbit Andi. Yogyakarta.

Brunk, H.D. 1975. *An Introduction to Mathematics Statistics*. Don Willey and Science, New York.

BKKBN Kota Bandar Lampung. 2015. *Data Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung Tahun 2015*. Lampung.

Fay R E, Herriot R A. 1979. *Estimation of income for smll places; An application of James-Stein precedures to census data*. J Amer Satist Assoc, 74: 269-277.

Gosh M, Rao JNK. 1994. *Small Area Estimation: an appraisal (with discussion)*. Statistical Science, 9(1):55-93.

Harville, D. A. 1977. *Maximum Likelihood Approach to Variance and Covariance Components Biometrics*, 9:226-252.

Henderson, CR. 1953. *Estimation of Variance and Covariance Components.* Biometrics. 9:226-252.

Henderson CR. 1975. *Best Linier Unbiased Estimation and Prediction under a Selection Model*. Biometrics. 31: 423-447.Rao JNK. 2003. *Small area estimation*. London: Wiley.

Kosfeld, R. 2006. *Spatial Econometric*. URL: http//www.scribd.com

Pfeiffer, D et. al. 2008. *Spatial Analysis in Epidemiologi.* Oxford University Press. New York.

Pratesi M, Salvati N. 2008. *Small area estimation: the EBLUP estimator based on spatially correlated random area effects*. Statistical methods and application, Stat. Meth. &Appl, 17:113-141.

Rao JNK. 2003. *Small Area Estimation*. London: Wiley.

Russo C., Sabbatini M., dan Salvatore R. 2005. *General Linier Models in Small Area Estimation*: *an assessment in agricultural surveys*, http://www.siap.sagarpa.gob.mx/mexsai/trabajos/t44.pdf.

Salvati N. 2004. *Small area astimatin by spatial models: the spatial empirical best linier unbiased prediction (Spatial EBLUP)*. Dipartimento di Statistica "G. Parenti" viale morgagni, 59-50134.

Savitz, NV, Raudenbush SW. 2009. *Exploiting Spatial Dependence to Improve Best Linear Unbiased Prediction (SPATIAL EBLUP).* Dipartimento di Statistica "G. Parenti" viale morgagni, 59-50134.

Schabenberger O, Gotway CA. 2005. *Statistical Methods fos Spatial Data Analysis*. Chapman & Hall/CRC.

Singh BB, Shukla K, Kundu D. 2005. *Spatial-temporal models in small area estimation*. Survey Methodology 31:183-195.

Usman, M. dan Warsono. 2009. *Teori Model Linier dan Aplikasinya*. Sinar Baru Algesindo, Bandung.