APLIKASI METODE ANALISIS HOMOTOPI (HAM) PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL HOMOGEN
$u_t + v_x - (u + v) = 0$ dan $v_t + u_x - (u + v) = 0$

(Skripsi)

Oleh

Shelvi Rukmana AS

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

ABSTRACT

APPLICATION OF ANALYSIS METHODS (HAM) TO HOMOGENEOUS PARTIAL DIFERENTIAL EQUATION SYSTEM
$u_t + v_x - (u + v) = 0$ AND $v_t + u_x - (u + v) = 0$

By

Shelvi Rukmana AS

Partial differential Equation is a differential equation that contain more than one partial derivative. Then the method used on this reaserch is Homotopy Analysis Methods (HAM). Based on the supriority of Homotopy Analysis Methods (HAM) is an independent method, which means that the methods doesn't consider the small and bigger of the value of the parameter. In this reaserch is going to prove that an equation of initial value is going to proved by solving the initial condition by using Homotopy Analysis Methods (HAM). To determine the solution of deformation equation with m=1,2,3,4 and 5, will be formed into Taylor Series and get the final solution.

Keywords: *Homotopy Analysis Method, Partial Differential Equation, Taylor Series*

ABSTRAK

APLIKASI METODE ANALISIS HOMOTOPI (HAM) PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL HOMOGEN $u_t + v_x - (u + v) = 0$ dan $v_t + u_x - (u + v) = 0$

Oleh

Shelvi Rukmana AS

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat lebih dari satu turunan parsial. Kemudian metode yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah Metode Analisis Homotopi (HAM). Berdasarkan keunggulan Metode Analisis Homotopi (HAM) adalah metode yang bebas, artinya tidak memperhatikan kecil dan besarnya suatu parameter. Adapun pembahasan dalam penelitian ini akan membuktian bahwa suatu persamaan nilai awalnya akan terbukti dengan menyelesaikan syarat awal menggunakan Metode Analisis Homotopi (HAM) untuk menentukan solusi persamaan deformasi m=1,2,3,4 dan 5 yang akan terbentuk ke dalam deret Taylor dan mendapatkan solusi akhirnya.

Kata kunci: *Metode Analisis Homotpi, Persamaan Diferensial Parsial, Deret Taylor*

APLIKASI METODE ANALISIS HOMOTOPI (HAM) PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL HOMOGEN $u_t + v_x - (u+v) = 0$ dan $v_t + u_x - (u+v) = 0$

Oleh

SHELVI RUKMANA AS

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Memperoleh Gelar

SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2017

Judul Skripsi : **APLIKASI METODE ANALISIS HOMOTOPI (HAM) PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL HOMOGEN $u_t + v_x - (u + v) = 0$ DAN $v_t + u_x - (u + v) = 0$**

Nama Mahasiswa : *Shelvi Rukmana AS*

NPM : 1417031107

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.
NIP 19620513 198603 1 003

Dra. Dorrah Azis, M. Si.
NIP 19610128 198811 2 001

2. Mengetahui

Ketua Jurusan Matematika

Dra. Wamiliana, M.A.,Ph.D.
NIP. 196311081989022001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.**	....
Sekretaris	: **Dra. Dorrah Azis, M. Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Dr. Aang Nuryaman, S. Si., M. Si.**	....

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulis Ujian Skripsi : **20 Desember 2017**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	**Shelvi Rukmana AS**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**1417031107**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	Aplikasi Metode Analisis Homotopi (HAM) Pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Homogen $u_t + v_x - (u + v) = 0$ dan $v_t + u_x - (u + v) = 0$

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi meteri yang telah dipublikasikan atau ditulis orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagai persyaratan penyelesaian studi pada Universitas atau Institut lain.

Bandar Lampung, Desember 2017

Yang Menyatakan

Shelvi Rukmana AS

NPM. 1417031107

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bandar Lampung, pada tanggal 18 Maret 1997, sebagai anak tunggal, putri dari pasangan Bapak Alamsyah HS dan Ibu Farida Hanum.

Pendidikan Taman Kanak-Kanak (TK) Kartika II-26 Bandar Lampung pada tahun 2002, Pendidikan Sekolah Dasar (SD) Kartika II-5 Bandar Lampung pada tahun 2008, Sekolah Menengah Pertama (SMP) Negeri 4 Bandar Lampung pada tahun 2011, Sekolah Menengah Atas (SMA) YP Unila Bandar Lampung pada tahun 2014. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas lampung pada tahun 2014.

Selama menjadi mahasiswa, penulis pernah bergabung menjadi anggota di Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA). Selain itu penulis juga pernah bergabung di Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) Universitas Lampung yang diamanahkan menjadi anggota Koordinator Eksternal 2016.

Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis telah melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari pada awal tahun 2017 di Desa Negeri Jaya, Kecamatan Selagai Lingga, Kabupaten Lampung Tengah. Sebagai bentuk aplikasi ilmu di dunia kerja, penulis telah melaksanakan Kerja Praktik (KP) selama 40 hari pada bulan Juli hingga Agustus 2017 di Badan Pengelola Pajak dan Retribusi Daerah Kota Bandar Lampung.

MOTTO

“hidup itu seperti sepeda, agar tetap seimbang kau harus bergerak”

(Albert Einstein)

“Sadarlah bahwa kita adalah manusia. Senantiasa perbaiki diri. Latihlah hati sehingga kuat tapi tidak keras, dan lembut tapi tidak mudah hancur”

(Penulis)

PERSEMBAHAN

Kupersembahkan karya kecilku ini dengan ketulusan cinta dan segala kerendahan hati kepada :

Mamah dan Atok tercinta dengan segala cinta, doa, dukungan, semangat, waktu dan pengorbanan untukku dalam menyelesaikan skripsi ini, serta untuk Almh Nyaik yang telah di surga terima kasih semasa hidup nyaik selalu mendoakan dan memberi dukungan kepadaku.

Keluarga besarku tercinta yang selalu memberikan semangat untuk menyelesaikan skripsi ini.

Dosen Pembimbing dan Penguji yang sangat berjasa dalam menyelesaikan skripsi ini. Seluruh sahabat-sahabatku dan Almamaterku tercinta Universitas Lampung.

SANWACANA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan tepat pada waktunya. Sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“Aplikasi Metode Analisis Homotopi (HAM) Pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Homogen $\mathbf{u_t + v_x - (u + v) = 0}$ dan $\mathbf{v_t + u_x - (u + v) = 0}$”** disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Universitas Lampung.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Drs. Suharsono S, M.S., M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan dan sarannya dalam penyelesaian skripsi ini;
2. Ibu Dra. Dorrah Azis, M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan pengarahan dan sarannya dalam penulisan skripsi ini;
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji yang telah memberi masukan dan sarannya dalam penyelesaian skripsi ini;

4. Bapak Drs. Suharsono S, M.S., M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang selalu memberikan pengarahan kepada penulis;
5. Ibu Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung;
7. Mamah, Atok, dan seluruh keluarga yang telah memberi dukungan, doa, waktu dan semangat pengorbanan yang luar biasa kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini;
8. Faranika, Annisa, Vindi, Nevi dan Dessy yang telah membantu serta dukungan dan semangat kebersamaan kalian yang selalu menemaniku selama dibangku kuliah;
9. Sahabat-sahabat seperjuangan Darma, Nandra, Agus, Rois, Fitrotin, Ketut, Kasandra, Lucia, Iin, Rahmad, Restika, Ria, Septi, Susan dan Vivin terima kasih atas dukungan kalian;
10. Teman SD ku Chelpa dan Mentari yang selalu memberi semangat semoga kalian segera menyusul;
11. Teman selama KKN Niken, Laila, Indah, Deo, Pius dan Adit yang selalu memberi semangat dan dukungan;
12. Rekan-rekan mahasiswa Jurusan Matematika Unila angkatan 2014;
13. Seluruh pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan di dalam skripsi ini. Penulis mengharapkan saran serta kritik yang bersifat membangun guna perbaikan di kemudian hari. Semoga skripsi ini dapat berguna dan bermanfaat.

Bandar Lampung,   Desember 2017

Penulis

Shelvi Rukmana AS

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang banyak sekali manfaatnya, diantaranya sebagai salah satu ilmu bantu yang sangat penting dan berguna dalam kehidupan sehari-hari juga menunjang perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Dalam bidang ilmu matematika sering kali ditemukan berbagai macam persoalan dalam penyelesaian sebuah persamaan matematika. Banyak masalah matematika yang dapat disajikan dalam bentuk model matematika. Saat ini banyak teknik analitik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan-persamaan di dalam matematika yang salah satunya adalah persamaan taklinear. Secara analitik masalah yang melibatkan persamaan diferensial parsial taklinear ini merupakan masalah yang sulit untuk diselesaikan. Untuk itu diperlukan suatu metode untuk memecahkan masalah tersebut guna mendapatkan penyelesaian pendekatannya. Sehingga tampaknya perlu untuk memperkenalkan sebuah teknik analisis baru yaitu Metode Analisis Homotopi.

Sistem persamaan diferensial parsial muncul dalam berbagai masalah fisik yang berkaitan dengan fisika, penerapan, teknik , ilmu terapan dan perkembangan yang pesat, banyak teknik analisis dan numerik oleh berbagai ilmuwan untuk mengatasi masalah fisik kompleksitas nonlinier. Dalam konteks yang sama, sangat membutuhkan teknik analitik dan numerik yang tepat untuk mengatasi masalah tersebut. Sebagian besar skema pengembangan memiliki keterbatasan seperti konvergensi terbatas, hasil yang berbeda, linearisasi, diskretisasi, asumsi yang tidak realistis dan tidak dapat disesuaikan dengan fleksibilitas masalah fisik. Dalam konteks yang sama, Liao mengembangkan Metode Analisis Homotopi (HAM) yang diterapkan pada berbagai masalah nonlinier. Alasan dasar dari penelitian ini adalah penyelesaian Metode Analisis Homotopi (HAM) untuk persamaan diferensial parsial. Berdasarkan penelitian terdahulu metode ini lebih efektif. Selain itu, metode ini juga lebih mudah dalam mengatasi kompleksitas pemilihan nilai awal.

Metode Analisis Homotopi (HAM) adalah suatu pendekatan analitik secara umum yang digunakan untuk mendapatkan solusi dari beberapa permasalahan diantaranya persamaan linear dan taklinear, persamaan aljabar, persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Selain itu, metode analisis homotopi adalah metode yang bebas, artinya tidak memperhatikan kecil atau besarnya suatu parameter. Berdasarkan keunggulan Metode Analisis Homotopi, maka penulis mencoba menyelesaikan Metode Analisis Homotopi (HAM) untuk permasalahan sistem persamaan diferensial parsial homogen

$u_t + v_x - (u + v) = 0$ dan $v_t + u_x - (u + v) = 0$.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari tentang Metode Analisis Homotopi.
2. Menyelesaikan sistem persamaan diferensial parsial homogen $u_t + v_x - (u + v) = 0$ dan $v_t + u_x - (u + v) = 0$ dengan Metode Analisis Homotopi.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Menambah pengetahuan tentang Metode Analisis Homotopi.
b. Menambah pengetahuan tentang persamaan diferensial parsial.
c. Menyelesaikan Metode Analisis Homotopi (HAM) untuk sistem persamaan diferensial parsial homogen $u_t + v_x - (u + v) = 0$ dan $v_t + u_x - (u + v) = 0$.
d. Dapat menjadi referensi untuk pemecahan masalah yang berkaitan dengan persamaan diferensial parsial lainnya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat lebih dari satu turunan parsial. Persamaan diferensial parsial ini merupakan persamaan yang menghubungkan fungsi yang memiliki lebih dari satu variabel ke turunan parsialnya. Persamaan diferensial muncul secara alami dalam sains fisik, model matematika, dan dalam matematika itu sendiri. Persamaan diferensial parsial digolongkan berdasarkan unsur yang sama, yaitu orde, linearitas dan kondisi batas. Orde dari persamaan diferensial parsial ditentukan oleh orde dari turunan tertinggi dari persamaan diferensial parsial tersebut.

- Persamaan diferensial orde 1

$$\frac{\partial c}{\partial x} - a\frac{\partial c}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

- Persamaan diferensial orde 2

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + Dc\frac{\partial c}{\partial y} = 0 \tag{2.2}$$

- Persamaan diferensial orde 3

$$(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.3}$$

Persamaan diferensial parsial berikut merupakan bentuk persamaan diferensial orde dua:

$$a(\cdot)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2b(\cdot)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(\cdot)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d(\cdot) = 0 \tag{2.4}$$

Selain itu, persamaan diferensial parsial juga digolongkan menjadi persamaan linear, kuasilinear dan taklinear dengan penjelasan sebagai berikut:

1. Apabila koefisien pada persamaan (2.4) adalah konstan atau fungsi hanya terdiri dari variabel bebas saja [(·) = (x,y)] maka persamaan itu disebut persamaan linear.
2. Apabila koefisien pada persamaan (2.4) adalah fungsi dari variabel tak bebas dan/atau merupakan turunan dengan pangkat yang lebih rendah daripada persamaan diferensialnya $[(\cdot) = (x, y; u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})]$, maka persamaan itu disebut persamaan kuasilinear.
3. Apabila koefisien pada persamaan (2.4) adalah fungsi dengan turunan sama dengan pangkatnya $\left[(\cdot) = \left(x, y; u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\right]$ maka persamaan itu disebut persamaan tak linear (Sasongko, 2010).

2.2 Konsep Deret Taylor

Deret Taylor adalah bentuk khusus dari suatu fungsi yang dapat digunakan sebagai pendekatan dari integral suatu fungsi yang tidak memiliki anti turunan elementer dan dapat digunakan untuk menyeselaikan persamaan diferensial.

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial.

Definisi 1:

Bentuk umum deret Taylor:

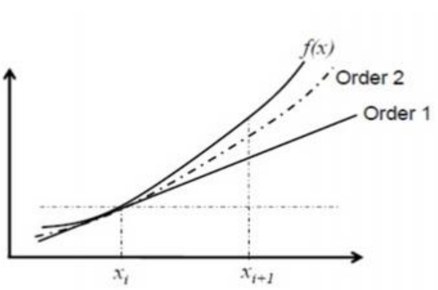
$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\frac{(x_{i+1}-x_i)}{1!} + f''(x_i)\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2!} + f'''(x_i)\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{3!} + \cdots + f_n(x_i)\frac{(x_{i+1}-x_i)^n}{n!} + R_n$$

$$\left.\begin{aligned} f(x_{i+1}) &= f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x_i)\frac{\Delta x^3}{3!} \\ &\quad + \cdots + f_n(x_i)\frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

dimana adalah bentuk sisanya,

$$R_n = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x_{i+1} - x_i)^{n+1} \qquad (2.6)$$

Jika suatu fungsi $f(x)$ diketahui di titik x_i dan semua turunan f terhadap x diketahui pada titik tersebut, maka dengan deret Taylor dapat dinyatakan nilai f pada titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i.



$f(x_i)$	: fungsi di titik x_i
$f(x_{i+1})$	: fungsi di titik x_{i+1}
$f', f'', \ldots, f^n$	: turunan pertama, kedua,..., ke n dari fungsi
Δx	: jarak antara x_i dan x_{i+1}
R_n	: kesalahan pemotongan
!	: operator faktorial

Gambar 1. Grafik fungsi deret Taylor dan keterangannya

Dalam praktek, sulit memperhitungkan semua suku pada deret Taylor tersebut dan biasanya hanya diperhitungkan beberapa suku pertama saja.

1. Memperhitungkan satu suku pertama (orde nol)

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) \tag{2.7}$$

artinya nilai f pada titik x_{i+1} sama dengan nilai pada x_i. Perkiraan tersebut benar jika fungsi yang diperkirakan konstan. Jika fungsi tidak konstan, maka harus diperhitungkan suku-suku berikutnya dari deret Taylor.

2. Memperhitungkan dua suku pertama (orde satu)

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} \tag{2.8}$$

3. Memperhitungkan tiga suku pertama (orde dua)

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} \tag{2.9}$$

Definisi 2:

Misalkan $f(x)$ fungsi sebarang yang dapat dinyatakan sebagai suatu deret pangkat sebagai berikut:

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots \tag{2.10}$$

dengan b_n, n=0,1,2,3,... menyatakan koefisien deret pangkat dan a menyatakan titik pusatnya.

Jika fungsi $f(x)$ dinyatakan dalam bentuk deret berikut

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \tag{2.11}$$

maka deret tersebut disebut deret Taylor dari fungsi yang berpusat di a dengan $f^n(a)$ melambangkan nilai dari turunan ke-n dari f pada titik a(Kreyzig, 1998).

2.3 Konsep Operator Linear

Sebarang operator L, yakni L adalah operator linear jika:

1. $L(kf) = kL(f)$, untuk setiap konstanta k
2. $L(f + g) = L(f) + L(g)$

L adalah operator linear. Operator L mudah diterapkan ketika diterapkan pada kelipatan konstanta fungsi atau pada jumlah fungsi.

- Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$ yakni,

  $$L[k \cdot f(x)] = k \cdot Lf(x)$$

  Dalam kata-kata, pengali konstanta k dapat dikeluarkan dari operator L.

- Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensiasikan, maka $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ yakni,

  $$L[f(x) + g(x)] = Lf(x) + Lg(x)$$

  Dalam kata-kata, turunan dari suatu jumlah adalah jumlah dari turunan-turunan (Varberg, Purcell dan Rigdon, 2007).

2.4 Metode Analisis Homotopi (HAM)

Homotopi dideskripsikan sebagai variabel kontinu atau deformasi di matematika. Mendeformasikan lingkaran dapat dilakukan secara kontinu menjadi elips dan bentuk dari cangkir kopi dapat dideformasikan secara kontinu menjadi bentuk donat. Homotopi dapat didefinisikan sebagai suatu penghubung antara dua benda yang berbeda di dalam matematika yang memiliki karakteristik yang sama dibeberapa aspek (Liao, 2012).

Misalkan terdapat persamaan diferensial sebagai berikut,

$$N[u(\tau)] = 0, \tag{2.18}$$

dimana N adalah operator taklinear, τ menunjukan variabel bebas, $u(\tau)$ adalah fungsi yang tidak diketahui. Untuk lebih mudah, diabaikan syarat awalnya, yang bisa dilakukan dengan cara yang sama. Dengan cara generalisasi metode homotopi sederhana, Liao menyusun persamaan deformasi orde nol,

$$(1-p)L[\varphi(\tau;p) - u_0(\tau)] = phH(\tau)N[\varphi(\tau;p)] \tag{2.19}$$

dengan $p \in [0,1]$ adalah parameter terkait, $h \neq 0$ adalah parameter taknol, $H(\tau) \neq 0$ adalah fungsi pembantu, L adalah operator linear tambahan, $u_0(\tau)$ adalah tebakan awal $u(\tau), u(\tau;p)$ adalah fungsi yang tidak diketahui. Penting untuk diingat bahwa, untuk memilih objek tambahan pada HAM. Terlihat jelas, dimana $p = 0$ dan $p = 1$ menghasilkan,

$$\varphi(\tau;0) = u_0(\tau), \qquad \varphi(\tau;1) = u(\tau) \tag{2.20}$$

Maka, sejalan dengan meningkatnya p dari 0 ke 1, solusi $\varphi(\tau;p)$ bervariasi dari perkiraan awal $u_0(\tau)$ kesolusi $u(\tau)$. Memperluas ke alam deret Taylor terhadap p, akan menghasilkan

$$u(\tau;p) = u_0(\tau) + \textstyle\sum_{m=1}^{\infty} u_m(\tau)p^n\,, \tag{2.21}$$

dimana,

$$u_m(\tau) = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \varphi(\tau;p)}{\partial p^m},\ p = 0. \tag{2.22}$$

Jika operator linear tambahan, syarat awal, parameter tambahan h dan fungsi tambahan dipilih yang benar, maka deret pada persamaan (2.21) konvergen ke $p = 1$, dan didapat

$$u(\tau) = u_0(\tau) + \textstyle\sum_{m=1}^{\infty} u_m(\tau), \tag{2.23}$$

Kita definisikan vektor,

$$\vec{u} = \{u_0(\tau), u_1(\tau), u_2(\tau), \dots , u_n(\tau) \tag{2.24}$$

Mendiferensialkan (2.19) sebanyak m kali terdapat parameter terkait p dan lalu masukkan $p = 0$ dan akhirnya membaginya dengan $m!$, didapatkan yang disebut dengan persamaan deformasi orde ke-m.

$$L[u_m(\tau) - X_m u_{m-1}(\tau)] = hH(\tau)R_m(\vec{u}_{m-1}) \tag{2.25}$$

dimana

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{m-1}\varphi(\tau;p)}{\partial p^{m-1}},\ p = 0 \tag{2.26}$$

dan

$$X_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

Menerapkan L^{-1} pada kedua sisi (2.25), didapatkan

$$u_m(\tau) = X_m u_{m-1}(\tau) + hL^{-1}[H(\tau)R_m(\vec{u}_{m-1})] \tag{2.27}$$

Dengan cara ini mudah untuk mendapatkan u_m untuk $m \geq 1$, di orde ke-m didapat

$$u(\tau) = \sum_{m=0}^{M} u_m(\tau).$$

Bila $M \to \infty$, diperoleh taksiran yang akurat dari persamaan aslinya (2.18) (Zubair, et al, 2012).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun akademik 2017/2018 bertempat di gedung Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam menyelesaikan sistem permasalahan diferensial parsial homogen dengan menggunakan Metode Analisis Homotopi (HAM). Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan permasalahan sistem persamaan diferensial parsial homogen $u_t + v_x - (u + v) = 0$ dan $v_t + u_x - (u + v) = 0$ dengan Metode Analisis Homotopi adalah sebagai berikut :

1. Misalkan diberikan suatu persamaan nilai awalnya yaitu:

$$u_t + v_x - (u + v) = 0 \text{ dan } v_t + u_x - (u + v) = 0 \tag{3.1}$$

2. Dengan syarat awal

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \sinh x \\ v_0 &= \cosh x \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

3. Menyelesaikan persamaan deformasi ke-m.
4. Menentukan solusi persamaan deformasi ke-m untuk setiap $m = 1,2, \dots, n$.
5. Menetukan komponen dengan hasil yang telah didapat $h = -1$.
6. Menentukan rangkaian solusi untuk mendapatkan solusi akhir dari langkah (5) dan dibentuk ke dalam deret Taylor.
7. Membuktikan bahwa solusi akhir yang didapat memenuhi persamaan $u_t + v_x - (u + v) = 0$ dan $v_t + u_x - (u + v) = 0$.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya diperoleh kesimpulan bahwa Metode Analisis Homotopi (HAM) dapat digunakan untuk mencari solusi analitik dari sistem persamaan diferensial parsial homogen $u_t + v_x - (u + v) = 0$ dan $v_t + u_x - (u + v) = 0$ dengan syarat awal $u_0 = sinh\, x$ dan $v_0 = cosh\, x$ didapatkan solusi homotopi yang konvergen ke solusi $u(x,t) = \sinh(x + t)$ dan $v(x,t) = \cosh(x + t)$ jika nilai $h = -1$.

5.2 Saran

Pada penelitian ini hanya dibahas Metode Analisis Homotopi (HAM) pada sistem persamaan diferensial parsial dengan 2 persamaan dan mendiferensialkan sebanyak 5 suku. Disarankan pada penelitian selanjutnya untuk dapat membahas lebih dari 2 persamaan dan dapat mendiferensialkan lebih dari 5 suku.