# PERBANDINGAN METODE ADAMS BASHFORTH-MOULTON DAN METODE MILNE-SIMPSON DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL EULER ORDE-8

**(Skripsi)**

**Oleh**

*FARANIKA LATIP*

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS LAMPUNG**
**BANDAR LAMPUNG**
**2017**

# ABSTRACT

## THE COMPARISON OF ADAMS BASHFORTH-MOULTON AND MILNE-SIMPSON METHODS TO SOLVED EULER DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ORDER-8

**By**

**Faranika Latip**

Euler differential equation is a special formed from linear differential equations with coefficients of variable. In solved the Euler differential equations of eighth order where the characteristic equation is real roots, used multi-steps methods or also called the predictor-corrector methods is Adams Bashforth-Moulton and Milne-Simpon method as a methods that the approximation the analytic solution. General form from Euler differential equations of eight order :

$$\sum_{i=0}^{8} a_i x^i y^{(i)} = 0$$

Transformed to be a system of ordinary differential equations (SODE's) the first order using the transformation $x = e^t$, where $x > 0$. Obtained the fisrt order system of ordinary differential equations (SODE's) with the initial values, then subtituted to predictor equations and then corrected by corrector equations with the excat selection of the size $h$. The conclusion is both of methods can be used to solve Euler differential equation of eighth order. Adams Bashforth-Moulton methods is more accurate to solved Euler differential equation of eighth order that known from the comparation of the errors, and more efficient than Milne-Simpson methods that based on the average time process to running program.



**Keywords** : *Euler differential equation, predictor-corrector methods, Adams Bashforth-Moulton methods, Milne-Simpson methods*

# ABSTRAK

## PERBANDINGAN METODE ADAMS BASHFORTH-MOULTON DAN METODE MILNE-SIMPSON DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL EULER ORDE-8

**Oleh**

**Faranika Latip**

Persamaan diferensial Euler adalah bentuk khusus dari persamaan diferensial linear dengan koefisien peubah. Dalam penyelesaian persamaan diferensial Euler orde-8 dimana akar-akar karakteristiknya riil berbeda, digunakan metode langkah banyak (multi steps) atau disebut juga dengan metode prediktor-korektor yaitu metode Adams-Bashforth Moulton dan metode Milne-Simpson sebagai metode dalam menghampiri solusi analitiknya. Bentuk umum dari persamaan diferensial Euler orde-8 :

$$\sum_{i=0}^{8} a_i x^i y^{(i)} = 0$$

Ditransformasikan menjadi sistem persamaan diferensial biasa (SPDB) orde-1 dengan menggunakan transformasi $x = e^t$, dimana $x > 0$. Didapatkan sistem persamaan diferensial biasa (SPDB) orde-1 dengan nilai-nilai awal, kemudian disubtitusikan ke dalam persamaan prediktor lalu dikoreksi pada persamaan korektor dengan pemilihan ukuran h yang tepat. Diperoleh kesimpulan bahwa kedua metode di atas dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8. Metode Adams Bashforth-Moulton lebih akurat dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8 diketahui dari perbandingan jumlah galatnya, serta lebih efisien dibandingkan metode Milne-Simpson berdasarkan rata-rata lama waktu proses program berjalan.



**Kata kunci :** *Persamaan Diferensial Euler, Metode Prediktor-Korektor , Metode Adams Bashforth-Moulton, Metode Milne-Simpson*

**PERBANDINGAN METODE ADAMS BASHFORTH-MOULTON DAN METODE MILNE-SIMPSON DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL EULER ORDE-8**

**Oleh**

*FARANIKA LATIP*

**Skripsi**

**Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Memperoleh Gelar**

**SARJANA SAINS**

**Pada**

**Jurusan Matematika**

**Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS LAMPUNG**
**BANDAR LAMPUNG**
**2017**

Judul Skripsi : **PERBANDINGAN METODE ADAMS BASHFORTH-MOULTON DAN METODE MILNE-SIMPSON DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL EULER ORDE-8**

Nama Mahasiswa : *Faranika Latip*

NPM : 1417031047

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

**MENYETUJUI**

**1. Komisi Pembimbing**

**Dra. Dorrah Azis, M.Si.**
NIP 19610128 198811 2 001

**Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.**
NIP 19620513 198603 1 003

**2. Mengetahui**

Ketua Jurusan Matematika

**Dra. Wamiliana, M.A.,Ph.D.**
NIP. 196311081989022001

**MENGESAHKAN**

1. Tim Penguji

Ketua : **Dra. Dorrah Azis, M. Si.** ....................

Sekretaris : **Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.** ....................

Penguji
Bukan Pembimbing : **Subian Saidi, S. Si., M. Si.** ....................

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

**Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.**
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulis Ujian Skripsi : **19 Desember 2017**

## PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

| | |
|---|---|
| Nama | : **Faranika Latip** |
| Nomor Pokok Mahasiswa | : **1417031047** |
| Jurusan | : **Matematika** |
| Judul Skripsi | : **Perbandingan Metode Adams Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson Dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Euler Orde-8** |

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagai persyaratan penyelesaian studi pada Universitas atau Institut lain.

Bandar Lampung, Desember 2017

Menyatakan

METERAI TEMPEL 6DBA1AEF760422705 6000 ENAM RIBU RUPIAH

**Faranika Latip**

NPM. 1417031047

# RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Metro pada hari Sabtu pukul 19.20 WIB tanggal 9 Maret 1996, sebagai anak pertama dari tiga bersaudara, putri dari pasangan Bapak Lantipno dan Ibu Kartini.

Menyelesaikan Pendidikan Taman Kanak - Kanak (TK) Al - Azhar 2 Bandar Lampung pada tahun 2002, Pendidikan Sekolah Dasar (SD) Al - Azhar 2 Bandar Lampung pada tahun 2008, Sekolah Menengah Pertama (SMP) Negeri 29 Bandar Lampung pada tahun 2011, Sekolah Menengah Atas (SMA) Al - Azhar 3 Bandar Lampung pada tahun 2014. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada tahun 2014 lewat jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN).

Selama menjadi mahasiswa, penulis pernah bergabung menjadi anggota di Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) selama 2 periode, yaitu: periode 2015/2016 dan 2016. Selama bergabung menjadi anggota HIMATIKA penulis menjabat sebagai anggota Bidang Kaderisasi dan Kepemimpinan dan Bidang Minat dan Bakat. Selain itu penulis juga pernah bergabung di Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) Unila yang diamanahkan menjadi anggota Koordinator Eksternal periode 2015-2016. Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis telah melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari pada awal tahun 2017 di Desa Pujo Basuki, Kecamatan Trimurjo, Kabupaten Lampung Tengah. Serta Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu di dunia kerja, penulis telah melaksanakan Kerja Praktik (KP) selama 40 hari pada bulan Juli hingga Agustus 2017 di Badan Pengelola Pajak dan Retribusi Daerah Kota Bandar Lampung ditempatkan di Bidang Pajak.

## MOTTO

"LOVE YOUR SELF"

"Ketika kamu melihat dirimu dan sudah mencintai dirimu apa adanya, itulah saat dimana kamu akan menjadi pribadi yang lebih baik dari sebelumnya"

(Faranika Latip)

# PERSEMBAHAN

Kupersembahkan karya kecilku ini dengan ketulusan cinta dan segala kerendahan hati kepada :

Bapak, Ibu dan Adik-adikku, Prita Anjani dan Dimas Bagus Sajiwo, serta sepupuku tercinta yang dengan segala cinta, doa, dorongan semangat, dan pengorbanan untukku dalam menyelesaikan skripsi ini, serta Kamu yang selalu ada dalam suka maupun duka untuk selalu menemani melalui ini semua, serta senantiasa setia menunggu atas keberhasilanku

Keluarga Besarku tercinta yang selalu memberikan semangat untuk menyelesaikan skripsi ini, Teman-temanku yang tiada hentinya selalu memberikan kebahagian dan keceriaan dalam melalui masa-masa selama kuliah ini

Dosen Pembimbing dan Penguji yang sangat berjasa, serta Almamaterku Universitas Lampung

## SANWACANA

Penulis ucapkan puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunianya kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. dengan judul **“Perbandingan Metode Adams Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson Dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Euler Orde-8”** disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S. Si) di Universitas Lampung.

Selesainya penulisan skripsi ini, adalah juga berkat motivasi dan pengarahan serta bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Ibu Dra. Dorrah Azis, M. Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik dan Pembimbing I, atas segala bantuan dan waktunya untuk membimbing, memberi arahan, nasehat, dan juga motivasi dalam menyelesaian skripsi ini,
2. Bapak Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D., selaku Pembimbing II atas bimbingan dan saran selama penyusunan skripsi ini,
3. Bapak Subian Saidi, S. Si., M. Si., selaku Pembahas atas saran yang membangun dalam proses penyelesaian skripsi ini,
4. Ibu Dra. Wamiliana, M.A.,Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika,

## DAFTAR ISI

# DAFTAR GAMBAR

**Halaman**

## DAFTAR TABEL

# I. PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Pada matematika terdapat suatu kajian tentang pemodelan matematika yang sedikit banyak dapat membantu manusia untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan di kehidupan sehari-hari. Sejumlah fenomena alam di dalam bidang kimia, fisika klasik , biologi dan ilmu lainnya sering dimodelkan ke dalam bentuk bahasa matematika terutama dalam bentuk persamaan atau sistem persamaan diferensial. Sebagai contoh, dalam bidang kimia sebagai laju reaksi suatu senyawa, dalam bidang fisika sebagai tolak ukur percepatan dan kecepatan suatu benda, dalam bidang biologi sebagai pemodelan penyakit dan dalam bidang ekonomi dan keuangan sebagai laju perubahan gaya hidup dan laju pertambahan investasi.

Persamaan diferensial sendiri dibedakan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa merupakan persamaan yang memuat turunan-turunan biasa terhadap fungsi yang memuat satu variabel bebas, sedangkan persamaan diferensial parsial merupakan persamaan yang memuat turunan-turunan parsial dari fungsi yang memuat lebih dari satu variabel bebas. Salah satu bentuk persamaan diferensial biasa yaitu persamaan diferensial Euler. Persamaan diferensial Euler adalah salah satu bentuk khusus dari persamaan diferensial linear dengan koefisien peubah. Setiap bentuk persamaan differensial mempunyai metode penyelesaian yang berbeda. Metode lain yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde tinggi yaitu metode numerik. Metode numerik merupakan metode yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat diselesaikan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Metode numerik dibagi menjadi dua yaitu metode langkah tunggal (*one step*) dan metode langkah banyak (*multi steps*). Metode yang termasuk metode langkah tunggal adalah metode Euler, metode Heun, dan metode Runge-Kutta. Sedangkan metode yang termasuk metode langkah banyak adalah metode Adams Bashforth-Moulton, metode Milne-Simpson, dan metode Hamming. Semakin tinggi orde yang muncul pada persamaan diferensial maka akan semakin sulit ditemukan solusinya secara analitik, sehingga penyelesaian dengan menggunakan metode numerik merupakan metode yang digunakan untuk memperoleh solusi pendekatannya.

Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengangkat penelitian yang berjudul “Perbandingan Metode Adams Bashforth-Moulton dan Metode Milne-Simpson Dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Euler Orde-8”. Pada penelitian ini hanya difokuskan dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8 dimana akar-akar karakteristiknya riil berbeda lalu digunakan metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson sebagai metode lain dalam penyelesaiannya. Kemudian membandingkan antara solusi numerik kedua metode sehingga dapat diketahui metode mana yang lebih baik untuk menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8.

## 1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mentransformasikan persamaan diferensial Euler orde-8 menjadi sistem persamaan diferensial orde-1 dengan menggunakan transformasi $x = e^t$, dimana $x > 0$.
2. Membandingkan plot solusi analitik dan solusi numerik dari penyelesaian solusi persamaan Euler orde-8 dimana akar-akar karakteristiknya riil berbeda dengan menggunakan metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson sehingga dapat diketahui metode mana yang lebih baik dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8.

## 1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengetahui transformasi dari persamaan diferensial Euler orde-8 menjadi sistem persamaan diferensial orde-1.
2. Mengetahui perbandingan antara plot solusi analitik dan solusi numerik dari penyelesaian solusi persamaan Euler orde-8 dimana akar-akar karakteristiknya riil berbeda dengan menggunakan metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson sehingga dapat diketahui metode mana yang lebih baik dalam menyelesaiakan persamaan diferensial Euler orde-8.
3. Memberikan wawasan mengenai persamaan diferensial Euler orde-8 yang telah didapatkan penyelesaiannya dengan menggunakan metode Adams

Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson.

4. Dapat digunakan sebagai tambahan referensi untuk mengkaji lebih lanjut mengenai persamaan diferensial Euler orde-8.

# II. TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial (*differential equation*) adalah persamaan yang melibatkan variabel-variabel tak bebas dan turunan-turunannya terhadap variabel-variabel bebas. Berikut adalah contoh persamaan diferensial :

$$\frac{dy}{dx} = e^x + \sin(x) \tag{2.1}$$

$$3x^2dx + 2ydy = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{2.3}$$

Persamaan diferensial dibagi dalam dua kelas yaitu biasa dan parsial. Persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equation*) adalah suatu persamaan yang melibatkan hanya satu variabel bebas. Jika diambil $y(x)$ sebagai suatu fungsi satu variabel, dengan $x$ dinamakan variabel bebas dan $y$ dinamakan variabel tak bebas, maka suatu persamaan diferensial biasa dapat dinyatakan dalam bentuk

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Persamaan (2.1) dan persamaan (2.2) merupakan persamaan diferensial biasa sedangkan persamaan (2.3) adalah persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) yang merupakan suatu persamaan diferensial yang melibatkan dua atau lebih variabel bebas.

Tingkat/orde (*order*) dari persamaan diferensial didefinisikan sebagai tingkat dari turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial. Sebagai contoh :

(a) $x^2 \frac{d^3y}{dx^3} - 6x\frac{dy}{dx} + 10y = 0$ adalah PDB orde-3

(b) $x''(t) + \sin(x(t)) = 0$ adalah PDB orde-2

(c) $x'(t) + x(t) = 0$ adalah PDB orde-1

Dari persamaan (a) dipunyai variabel tak bebas $y$ dan variabel bebas $x$, sedangkan pada persamaan (b) dan (c) dipunyai variabel tak bebas $x$ dan variabel bebas $t$.

Derajat (*degree*) dari suatu persamaan diferensial adalah pangkat dari suku turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial. Sebagai contoh :

$1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = 3\frac{d^2y}{dx^2}$ adalah PDB orde-2 berderajat satu

$x(y'')^3 - (y')^4 - y = 0$ adalah PDB orde-2 berderajat 3

(Nugroho, 2011).

## 2.2 Persamaan Diferensial Biasa Linear dan Nonlinear

Persamaan diferensial biasa $F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, dikatakan linear jika $F$ adalah linear dalam variabel - variabel $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Definisi serupa juga berlaku untuk persamaan diferensial sebagian. Secara umum persamaan diferensial biasa linear orde-n sebagai berikut :

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = g(t) \qquad (2.4)$$

Persamaan yang tidak dalam bentuk persamaan (2.4) merupakan persamaan nonlinear. Contoh persamaan nonlinear, persamaan pendulum :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Persamaan tersebut nonlinear karena suku $\sin\theta$. Persamaan diferensial :

$$y'' + 2e^t y' + yy' + y^2 = t^4$$

Juga persamaan nonlinear karena suku $yy'$ dan $y^2$ (Waluya, 2006).

## 2.3 Persamaan Diferensial Euler Cauchy Orde Tinggi Homogen

Persamaan diferensial linear orde tinggi homogen dengan koefisien variabel dikatakan sebagai persamaan diferensial Euler Cauchy, jika persamaan diferensial tersebut berbentuk :

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \qquad (2.5)$$

dimana $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ merupakan konstanta-konstanta dan $a_n \neq 0$. Dengan menggunakan pendekatan yang dikembangkan pada persamaan diferensial Euler Cauchy homogen orde dua, untuk menentukan penyelesaian umumnya, ambil basis-basis penyelesaiannya berbentuk :

$$y = x^m$$

Turunkan persamaan $y = x^m$, terhadap $x$ sampai dengan $n$ kali menghasilkan,

$$y' = mx^{m-1}$$

$$y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

$$y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))x^{m-n}$$

dengan mensubtitusikan basis $y = x^m$ dan turunan-turunannya $y', y'', \dots, y^{(n)}$ ke dalam persamaan diferensial dihasilkan,

$$[a_n m(m-1)\dots(m-(n-1)) + a_{n-1} m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-2))$$
$$+\dots + a_3 m(m-1)(m-2) + a_2 m(m-1) + a_1 m + a_0]x^m = 0 \qquad (2.6)$$

atau setelah disederhanakan menghasilkan,

$$(b_n m^n + b_{n-1} m^{n-1} + \dots + b_3 m^3 + b_2 m^2 + b_1 m^1 + b_0)x^m = 0 \qquad (2.7)$$

karena, $x^m \neq 0$, akibatnya diperoleh polinomial berderajat $n$ dalam $m$, yaitu :

$$b_n m^n + b_{n-1} m^{n-1} + \dots + b_3 m^3 + b_2 m^2 + b_1 m^1 + b_0 = 0 \qquad (2.8)$$

Polinomial ini disebut persamaan karakteristik persamaan diferensial Euler Cauhcy orde-$n$ homogen. Didapatkan akar-akarnya riil berbeda, misalkan akar-akar persamaan karakteristiknya adalah :

$$m_1, m_2, \dots, m_n$$

sehingga basis-basis penyelesaian umum persamaan adalah :

$$y_1 = x^{m_1}, y_2 = x^{m_2}, y_3 = x^{m_3}, \dots, y_n = x^{m_n}$$

Oleh karena itu, solusi umumnya adalah :

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} + c_3 x^{m_3} + \dots + c_n x^{m_n} \qquad (2.9)$$

(Prayudi, 2006)

## 2.4 Masalah Nilai Awal (MNA)

Masalah nilai awal adalah suatu masalah yang melibatkan satu atau lebih fungsi yang tidak diketahui beserta turunannya dalam sebuah persamaan yang memenuhi syarat awal yang diberikan.

**Teorema 2.1**

Jika fungsi $p$ dan $q$ dalam

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2.10}$$

kontinu dalam interval buka $I: \alpha < x < \beta$ yang memuat titik $x = x_0$, maka terdapat sebuah fungsi $y = \emptyset(x)$ secara tunggal yang memenuhi persamaan (2.10) untuk suatu nilai $x \in I$ dan memenuhi syarat awal $y(x_0) = y_0$, dengan $y_0$ merupakan suatu nilai awal yang diberikan (Marwan dan Munzir, 2009).

## 2.5 Metode Numerik

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan/aritmatika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Metode artinya cara, sedangkan numerik artinya angka. Jadi metode numerik secara harfiah berarti cara berhitung dengan menggunakan angka. Solusi dengan menggunakan metode numerik selalu berbentuk angka. Dengan metode numerik hanya memperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi analitik sehingga solusi numerik dinamakan juga solusi hampiran (*approximation*) atau solusi pendekatan, namun solusi hampiran dapat dibuat seteliti yang diinginkan. Solusi hampiran jelas tidak tepat sama dengan solusi analitik, sehingga ada selisih antara keduanya. Selisih inilah yang disebut dengan galat (*error*) (Munir, 2008).

## 2.6 Metode Langkah Banyak (*Multi Steps*) dan Analisis *Error*

Metode langkah banyak (*multi steps*) adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal (MNA) dengan memperkirakan nilai $y(x_{r+1})$ dengan menggunakan beberapa nilai pada titik sebelumnya, $(x_r), y(x_{r-1}), y(x_{r-2}), \dots$ . Metode yang termasuk ke dalam metode langkah banyak adalah metode prediktor-korektor. Metode langkah banyak yang akan digunakan pada penelitian ini, yaitu :

### 2.6.1 Metode Adams Bashforth-Moulton

Metode prediktor-korektor Adams Bashforth-Moulton (ABM) adalah metode langkah banyak yang diturunkan dari teorema dasar kalkulus :

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f\big(t, y(t)\big)dt \qquad (2.11)$$

untuk prediktor digunakan aproksimasi polinomial Lagrange untuk $f(t, y(t))$ berdasarkan $(t_{k-3}, f_{k-3}), (t_{k-2}, f_{k-2}), (t_{k-1}, f_{k-1})$, dan $(t_k, f_k)$. Kemudian diintegralkan pada interval $[t_k, t_{k+1}]$ ke dalam persamaan (2.11). Dari proses tersebut diperoleh persamaan prediktor Adams Bashforth :

$$P_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(-9f_{k-3} + 37f_{k-2} - 59f_{k-1} + 55f_k) \qquad (2.12)$$

untuk korektor didapatkan dengan cara yang sama pada persamaan prediktor. Nilai $P_{k+1}$ sekarang dapat digunakan, polinom Lagrange kedua untuk $f(t, y(t))$ terbentuk berdasarkan $(t_{k-2}, f_{k-2}), (t_{k-1}, f_{k-1}), (t_k, f_k)$, dan nilai baru dari $(t_{k+1}, f_{k+1}) = (t_{k+1}, f(t_{k+1}, P_{k+1}))$. Kemudian polinomial ini diintegralkan pada $[t_k, t_{k+1}]$ dan menghasilkan persamaan korektor Adams Moulton :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f_{k+1}) \tag{2.13}$$

### 2.6.2 Metode Milne-Simpson

Metode prediktor-korektor lain yang terkenal adalah metode Milne-Simpson. Prediktor berdasarkan integrasi dari $f(t, y(t))$ pada interval $[t_{k-3}, t_{k+1}]$ :

$$y(t_{k+1}) = y(t_{k-3}) + \int_{t_{k-3}}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,dt \tag{2.14}$$

Untuk prediktor digunakan aproksimasi polinomial Lagrange untuk $f(t, y(t))$ berdasarkan pada $(t_{k-3}, f_{k-3}), (t_{k-2}, f_{k-2}), (t_{k-1}, f_{k-1})$, dan $(t_k, f_k)$. Kemudian di integralkan pada interval $[t_{k-3}, t_{k+1}]$. Proses ini menghasilkan prediktor Milne:

$$P_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k) \tag{2.15}$$

untuk korektor didapatkan dengan cara yang sama pada persamaan prediktor. Nilai $P_{k+1}$ telah dihitung sekarang dapat digunakan, polinom Lagrange kedua untuk $f(t, y(t))$ terbentuk berdasarkan nilai $(t_{k-1}, f_{k-1}), (t_k, f_k)$ dan sekarang nilai untuk $(t_{k+1}, f_{k+1}) = (t_{k+1}, f_{k+1}, P_{k+1})$. Polinomial ini di integralkan pada $[t_{k-1}, t_{k+1}]$ dan menghasilkan persamaan Simpson :

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}) \tag{2.16}$$

### 2.6.3 Analisis *Error*

Dalam melakukan analisis numerik perlu untuk memperhatikan bahwa solusi yang dihitung bukanlah solusi analitik. Ketelitian dari solusi numerik dapat mengurangi nilai *error*.

**Definisi 2.1** Misalkan $\hat{p}$ adalah aproksimasi (pendekatan) ke $p$. *Error* mutlak adalah $E_p = |p - \hat{p}|$ dan *error* relatif adalah $R_p = |p - \hat{p}|/|p|$, dinyatakan bahwa $p \neq 0$ (Mathews dan Fink, 2004).

# III. METODOLOGI PENELITIAN

## 3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2017/2018 bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

## 3.2 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian adalah sebagai berikut :

1. Studi pustaka yaitu mencari referensi sejumlah literatur (buku-buku dan jurnal), menelaah dan mengkaji yang berhubungan dengan penelitian ini.
2. Mentransformasikan bentuk umum persamaan diferensial Euler orde-8 kedalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa (SPDB) orde-1 dengan koefisien konstanta.
3. Menyelesaikan contoh kasus dengan mencari solusi persamaan diferensial Euler orde-8 dimana akar-akar karakteristiknya riil berbeda secara analitik dan numerik dengan cara, yaitu :

a. Mentransformasikan contoh kasus dari persamaan diferensial Euler orde-8 ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial orde-1 dengan koefisien konstanta.

b. Menentukan solusi umum anlitik dari contoh kasus persamaan diferensial Euler orde-8 dan mentransformasikannya ke dalam bentuk $x = e^t$ sehingga didapatkan solusi khusus analitiknya.

c. Mencari nilai awal dari solusi khusus analitik contoh kasus persamaan diferensial Euler orde-8.

d. Menentukan algoritma dan mencari solusi numerik dari contoh kasus persamaan diferensial Euler orde-8 menggunakan metode banyak langkah (*multi steps*) yaitu metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson dengan *software* MATLAB R2013b.

e. Membandingkan solusi analitik dan solusi numerik dari persamaan diferensial Euler orde-8 menggunakan kedua metode dengan *software* MATLAB R2013b sehingga dapat diketahui metode manakah yang lebih baik dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8.

# V. KESIMPULAN DAN SARAN

## 5.1 Kesimpulan

Adapun kesimpulan yang didapatkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Persamaan diferensial Euler orde-8 dapat ditransformasikan ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial orde-1 dengan menggunakan transformasi $x = e^t, x > 0$.
2. Hasil perbandingan antara metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson dapat disimpulkan bahwa :
    a. Metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde-8.
    b. Solusi numerik dari kedua metode tersebut mendekati solusi analitik dari kedua contoh kasus yang telah diselesaikan.
    c. Metode Adams Bashforth-Moulton lebih efisien dibandingkan dengan metode Milne-Simpson.
    d. Metode Adams Bashforth-Moulton lebih akurat dibandingkan dengan metode Milne-Simpson terlihat dari jumlah perbandingan galatnya.
    e. Metode Adams Bashforth-Mouton lebih baik dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler orde- 8.

## 5.2 Saran

Pada penelitian ini hanya dilakukan pembahasan mengenai penyelesaian persamaan diferensial Euler orde-8 dimana akar-akar karakteristiknya berbeda dengan menggunakan metode Adams Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson. Disarankan pada penelitian selanjutnya untuk dapat menggunakan persamaan diferensial Euler orde-8 dimana akar-akar karakteristiknya sama atau kompleks atau dengan persamaan diferensial nonlinear ataupun dapat menggunakan metode langkah tunggal (*one step*) maupun metode banyak langkah (*multi steps*) lainnya.

# DAFTAR PUSTAKA


Marwan, dan Said Munzir. 2009. *Persamaan Diferensial*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Mathews, John H., and Kurtis D. Fink. 2004. *Numerical Methods Using MATLAB*. Pearson Education, Inc, United States of America.

Munir, Rinaldi. 2008. *Metode Numerik : Revisi Kedua*. Penerbit Informatika, Bandung.

Nugroho, Didit Budi. 2011. *Persamaan Diferesial Biasa dan Aplikasinya : Penyelesaian Manual dan Menggunakan Maple*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Prayudi. 2006. *Matematika Teknik*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Salusu, A. 2008. *Metode Numerik*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Waluya, S. B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Graha Ilmu. Yogyakarta.