KESTABILAN SISTEM *PREDATOR-PREY* LESLIE

(Skripsi)

Oleh

ANANDA PUTRI KUSUMA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRAK

KESTABILAN SISTEM PREDATOR-PREY LESLIE

oleh

Ananda Putri Kusuma

Setiap makhluk hidup dituntut untuk senantiasa berinteraksi dengan makhluk hidup lainnya. Interaksi yang terjadi antara individu dalam satu spesies atau interaksi antara individu dengan spesies yang berbeda dapat berdampak positif bagi keduanya, berdampak negatif bagi keduanya maupun berdampak negatif bagi salah satu spesies dan positif bagi spesies yang lain. Dalam penerapannya model matematika tersebut biasanya berbentuk sistem persamaan diferensial. Salah satu model Matematika yang merupakan sistem persamaan diferensial non linier adalah sistem Predator-Prey yang dikemukakan oleh Leslie (1948). Sistem Predator-Prey merupakan model interaksi antara dua populasi yang terdiri dari dua persamaan sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - cyx$$
$$\frac{dy}{dt} = ey - f\frac{y^2}{x}$$

f adalah konstanta positif. Dalam sistem Predator-Prey Leslie, hubungan masing-masing variabel pada proses interaksi antara prey dan predator saling terkait dan dipengaruhi oleh perubahan konstanta sistem, sehingga akan berpengaruh terhadap kestabilan sistem Penelitian ini dilaksanakan dengan cara studi literatur dari buku dan jurnal-jurnal yang terkait dengan materi yang relevan dengan tinjauan yang dilakukan. Menentukan kestabilan sistem dimulai dengan mencari titik kesetimbangan dari sistem kemudian sistem dilinierisasi. Dari linierisasi sistem akan dicari akar karekteristik atau nilai eigen. Hasil penelitian yang dilakukan menunjukkan bahwa sistem PredatorPrey Leslie stabil pada titik kesetimbangan k_1 *dengan parameter* $a = -0{,}1;\ b = 0.01; c = 0; e = -0.1; f = 0$ *berada pada tipe titik kesetimbangan titik spiral.*

Kata Kunci: *Predator Prey Leslie, Matriks Jacobian, Kesetimbangan.*

ABSTRACT

THE STABILITY SYSTEM OF PREDATOR-PREY LESLIE

By

Ananda Putri Kusuma

Every living being is required to always interact with other living creatures. Interactions that occur between individuals in a species or interactions between individuals with different species can have a positive impact on both, negatively affecting both and a negative impact on one species and positive for another. In the application of the mathematical model is usually shaped system of equations differential. One model of Mathematics which is a system of non-linear differential equations is the Predator-Prey system proposed by Leslie (1948). Predator-Prey system is a model of interaction between two populations consisting of two equations as follows:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - cyx$$
$$\frac{dy}{dt} = ey - f\frac{y^2}{x}$$

f is a positive constant. In the Predator-Prey Leslie system, the relationship of each variable in the interaction process between prey and predator are interrelated and influenced by changes in system constant, so that will affect system stability This research is conducted by literature study of books and journals related to material relevant to the review undertaken. Determining the stability of the system starts by finding the equilibrium point of the system then the system is linearized. From the linearization of the system will be searched for characteristic roots or eigenvalues. This eigenvalue will show the stability at the equilibrium point of the system. The results of the research show that PredatorPrey Leslie's system is stable at the equilibrium pointK_1 WITH PARAMETERS A $= -0,1$; $B = 0.01$; $C = 0$; $E = -0.1$;F$= 0$ s at the spiral point equilibrium point type.

Keywords: *Prey Leslie Predator, Jacobian Matrix, Equilibrium*

KESTABILAN SISTEM *PREDATOR-PREY* LESLIE

Oleh

ANANDA PUTRI KUSUMA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar
Sarjana Sains

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **KESTABILAN SISTEM *PREDATOR-PREY* LESLIE**

Nama Mahasiswa : *Ananda Putri Kusuma*

NPM : 1417031012

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI,

1. Komisi Pembimbing

Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.
NIP.19700831 199903 1 002

Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.
NIP.19620704 198803 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Dra. Wamiliana, MA, Ph.D.
NIP.19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

   Sekretaris : **Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.** ....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 1995121 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **3 Januari 2018**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	: **Ananda Putri Kusuma**
Nomor Induk Mahasiswa	: **1417031012**
Judul	: **KESTABILAN SISTEM *PREDATOR-PREY* LESLIE**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 3 Januari 2018

ANANDA PUTRI KUSUMA
NPM. 1417031012

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada 13 Oktober 1996 di Tanjung Karang, sebagai anak pertama dari tiga bersaudara dari pasangan Tri Agus Kusuma dan Maya Theresia Dewi. Penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Dasar (SD) di SD 2 Penengahan Bandar Jaya pada tahun 2008, kemudian Penulis melanjutkan Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMP Muhammadyah 3 BandarLampung lulus pada tahun 2011, kemudian melanjutkan jenjang Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA Negeri 14 BandarLampung dan lulus pada Tahun2014.

Pada tahun 2014 penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SBMPTN. Selama menjadi mahasiswi, penulis ikut serta dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unila sebagai anggota aktif.

Pada bulan maret 2016, Penulis melakukan kerja Praktik di Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM), lalu pada tahun 2017 bulan Agustus Penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sidomulyo Lampung Selatan.

Kata Inspirasi

"Berbanggalah pada dirimu sendiri, meski ada yang tak menyukai. Kadang mereka membenci "karena mereka tak mampu menjadi sepertimu.
(Anonim)

"Bebek berjalan berbondong-bondong akan tetapi burung elang terbang sendirian"
(Soekarno)

"Too many think just make you afraid to pass your life "
(Ananda.P.K.)

"You alone we worship ; You Alone we ask for help."
(The Quran 01:05)

"A friend cannot "considered a friend until he is tested in three occasions: in time of need, behind your back, and after your back, and after your death"
(Ali bin thalib)

PERSEMBAHAN

Dengan segala puja dan puji syukur kepada Tuhan yang Maha Esa dan atas dukungan dan do'a dari orang-orang tercinta, akhirnya skripsi ini dapat dirampungkan dengan baik dan tepat pada waktunya. Oleh karena itu, dengan rasa bangga dan bahagia saya khaturkan rasa syukur dan terimakasih saya kepada:

Nenek dan Ibuku dan keluargaku, yang telah memberikan dukungan moril maupun materi serta do'a yang tiada henti untuk kesuksesan saya, karena tiada kata seindah lantunan do'a dan tiada do'a yang paling khusuk selain do'a yang terucap dari orang tua. Ucapan terimakasih saja takkan pernah cukup untuk membalas kebaikan orang tua, karena itu terimalah persembahan bakti dan cinta ku untuk kalian.

Adikku (Dinda dan Gallang), cinta kalian memberikan kobaran semangat yang menggebu, terimakasih dan sayang ku untuk kalian.Semoga apa yang telah kakakmu lakukan selalu bisa menjadi contoh dan motivasi untuk kalian menuju sukses.

M. Apriansyah S. Kekasihku dan sahabatku (Amoy, Olin, Yola) tanpa semangat, dukungan dan bantuan kalian semua tak kan mungkin aku sampai disini, terimakasih untuk canda tawa, tangis, dan perjuangan yang kita lewati bersama

Dan Almamater yang kubanggakan UNIVERSITAS LAMPUNG.

SANWACANA

Asalamualaikum. Wr. Wb

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, hingga akhirnya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Sholawat dan Salam semoga selalu tercurah kepada Rasulullah SAW yang mulia. Skripsi dengan judul " Kestabilan Sistem Predator-Prey Leslie"

Terselesaikan nya skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, kerjasama, dan dukungan berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing I yang telah dengan sabar membimbing, menyemangati, dan memotivasi penulis.
2. Bapak Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D. selaku Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, kritik, dan saran yang membangun.
3. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembahas atas kesediaannya untuk menguji, dan dengan sabar memberikan kritik dan saran.
4. Bapak Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.selaku Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis dalam menyelesaikan permasalahan seputar akademik.
5. Ibu Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., DEA, Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
8. Maya Theresia Dewi sebagai Ibu yang selalu senantiasa memberikan doa setulus hati dan selalu memberi semangat setiap harinya
9. Wak Andri, wak Ewin, tante Vita dan tante Meli seperti orangtua kandung yang telah memberikan dukungan moral maupun moril dan mendukung sampai tahap seperti ini..
10. Nenek Noerlysia dan Alm. kakek Dahlan yang selalu memberikan doa sampai pada saat ini.
11. Destrya Dinda Kusuma dan Gallang Pratama Kusuma sebagai adik-adik yang selalu bersama dan tidak lupa selalu memberikan dukungan serta kasih sayang yang tak terhingga
12. M. Apriansyah S. yang selalu memberi semangat, motivasi, dan doa serta tak pernah bosan mendengar keluh kesah penulis..
13. Sahabat-sahabat penulis Amoy, Yola, Olin, Pule, Maget, Ecy, Syafa, Dea, Wika, Lena, Dandi, Zulfi, Fajar, Arif, Kiki, Awe, Inten, senantiasa menemani suka duka penulis.
14. Teman-teman penulis seluruh Angkatan 2014 yang telah menemati perjalanan perkuliahan.
15. Rekan tangguh Zulfikar dan Intan Puspitasari yang telah menjadi guru dan yang selalu membantu penulis dalam segala keadaan.

16. Sahabat-sahabat KKN 2017 Melati, Monic, Aftia, Dwinta, Aryo Gustian dan yang lainya di Desa Sidomulyo
17. Semua pihak yang terlibat dalam penyelesaian skripsi ini.

Tentunya, Penulis menyadari bahwa masih ada kekurangan dari skripsi ini, akan tetapi besar harapan semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Sekian dan terimakasih.

Bandar Lampung, 3 Januari 2018

Penulis

Ananda Putri Kusuma

DAFTAR ISI

Halaman

V. KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Setiap makhluk hidup dituntut untuk senantiasa berinteraksi dengan makhluk hidup lainnya. Interaksi yang terjadi antara individu dalam satu spesies atau interaksi antara individu dengan spesies yang berbeda dapat berdampak positif bagi keduanya, berdampak negatif bagi keduanya maupun berdampak negatif bagi salah satu spesies dan positif bagi spesies yang lain. Jika berdampak positif bagi keduanya, interaksi keduanya disebut simbiosis mutualisme. Jika berdampak negatif bagi keduanya disebut persaingan, dan jika berdampak positif bagi spesies yang satu sedangkan bagi spesies yang lainnya negatif maka interaksi tersebut disebut dengan mangsa-pemangsa (*prey-predator*).

Ekologi merupakan ilmu yang mempelajari tentang ekosistem. Salah satu bahasan penting dalam ekologi yakni rantai-makanan. Dalam suatu rantai makanan minimal terdapat dua macam spesies yaitu spesies *predato*r atau pemangsa dan spesies *prey* atau mangsa. Rantai makanan merupakan penentu keseimbangan ekosistem, sehingga perlu dikaji mendalam. Kajian mengenai rantai makanan salah satunya yaitu pemodelan matematika *prodator-prey* yang dikembangkan dalam cabang ilmu matematika ekologi.

Model predator prey dipelajari secara matematika sejak dimodelkan persamaan Lotka-Voltera. Sebuah asumsi dasar model predator prey dikemukakan Lotka-Voltera, bahwa masing-masing spesies mengalami pertumbuhan secara eksponen, pengembangan model ini menginvestigasi pertumbuhan logistik satu spesies ketika spesies yang lain satu tidak ada. Model dasar predator prey LotkaVoltera dimodifikasi oleh banyak ilmuwan. Salah satu modifikasi model dasar predator prey Lotka-Voltera dikembangkan oleh Leslie dan Gower.

Pada model ini, perbandingan/rasio antara populasi predator dan populasi prey mempengaruhi pertumbuhan populasi predator. Pada model matematika diatas ketergantungan terhadap waktu sebelumnya tidak ada sehingga gangguan-gangguan pertumbuhann populasi pada sistem terabaikan.

Pada kasus diatas tidak tersirat baik secara implisit maupun eksplisit memuat waktu tunda/tundaan, hal ini merupakan aspek yang dapat menimbulkan kelemahan-kelemahan dalam proses analisis baik dari segi akurasi maupun perilaku sistem. Karena kestabilan suatu sistem interaksi populasi secara signifikan dipengaruhi oleh keberadaan waktu tunda, waktu tunda/tundaan sering muncul dalam setiap situasi. Mengabaikan waktu tunda berarti mengabaikan realitas.

Oleh karena hal diatas maka pada penulisan makalah ini akan dianalisa stabilitas dari sistem predator prey, dimana dinamik predator adalah fungsi logistik dengan waktu tunda, serta perbandingan antara populasi predator dan populasi prey mempengaruhi pertumbuhan populasi predator, kemudian akan dicari eksistensi penyelesaian osilasi dari sistem tersebut. Dalam penelitian ini penulis menggunakan softwere MATLAB.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui perilaku penyelesaian atau sifat kestabilan sistem predator prey dengan waktu tunda, dimana rasio predator prey mempengaruhi pertumbuhan predator .

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Bagi Peneliti

   Manfaat yang bisa diambil bagi peneliti adalah peneliti mampu menerapkan ilmu-ilmunya, khususnya tentang sistem dinamika *Predator-Prey*. Sehingga dapat semakin memahami pemahaman mengenai teori-teori yang di peroleh selama mengikuti perkuliahan serta mampu menerapkan ilmunya dalam kehidupan nyata.
2. Bagi Jurusan Matematika FMIPA UNILA

   Menambah perbendaharaan jurnal, khususnya tentang sistem dinamika *Predator-Prey*.
3. Bagi Pembaca

   Menambah pengetahuan tentang sistem dinamika *Predator-Prey*.

II.TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial dibagi dalam dua kelas yaitu PD biasa dan PD parsial.Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang melibatkan hanya satu variabel bebas. Jika diambil$y(x)$ sebagai suatu fungsi satu variable dengan *x*dinamakan variabel tak bebas dan *y* dinamakan variable tak bebas, maka suatu persamaan diferensial biasa dapatdinyatakan dalam bentuk $f\left(x, y. y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ (Nugraha, 2011).

Contoh persamaan diferensial :

$$y + xy = 3$$

$$y'' + 5y' + 6y = \cos x$$

$$y'' = (1 + y'^2)(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + y + 6 = 0$$

$$xy' + y + x = 0$$

Dari contoh di atas fungsi yang tak diketahui dinyatakan dengan y dan dianggap sebagai fungsi satu peubah bebas ***x***, yaitu y = y(x). (Marwan dan Said, 2009).

2.2 Sistem Persamaan Diferensial Non Linier

Persamaan yang terdiri dari dua atau lebih persamaan yang saling terkait maka dikategorikan sebagai sistempersamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial ordesatu disajikan sebagai berikut :

$$y'1= f1(t, y1,y2, \dots ,yn)$$

$$y'2= f2(t, y1,y2, \dots ,yn)$$

$$y'n= fn(t, y1,y2, \dots ,yn)$$

Dengan bentuk umumnya sebagai berikut :

$y'i= fi(t, y1,y2,\dots .,yn)$ i = 1,2, ... ,n dan$a \leq i \leq b$. Jika fungsi $f1,f2, \dots,fn$ bergantung pada t, maka system itu disebut system persamaan diferensial orde satu, dan ketika fungsi tersebut tidak linier maka system itu disebut system persamaan diferensial non linier orde satu. Untuk mengetahui solusi dari system persamaan diferensial non linier maka system perlu diubah kedalam bentuk system persamaan linier. Linierisasi system tersebut menggunakan Matriks Jacobian (Boyce, W.E &Di.Prima, R.C., 1997).

2.3 Matriks Jacobian

Bentuk umum dari sistem persamaan diferensial non linier sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x,y)$$

dengan *x* dan *y* adalah variabel yang bergantung pada *t*. Persamaan di atas memiliki titik kesetimbangan pada (X_0, Y_0). Bila persamaan di atas merupakan sistem persamaan diferensial non linier, maka diperlukan linierisasi sistem dengan menggunakan matriks Jacobian. Bentuk matriks Jacobian dari persamaan di bawah ini, sebagai berikut :

$$\mathrm{J(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

Proses linierisasi dari suatu sistem persamaan diferensial non linier memerlukan titik kesetimbangan dari sistem itu sendiri, Sehingga dari matriks Jacobian pada persamaan di atas menjadi sebagai berikut :

$$J(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0 \end{bmatrix}$$

2.4 Sistem Dinamik

Secara umum sistem dinamik didefinisikan sebagai sebuah masalah nyata yang dimodelkan secara matematis dengan menggunakan persamaan-persamaan diferensial di mana dalam persamaannya mengandung parameter–parameter yang saling berhubungan, serta perubahan parameter pada persamaan tersebut akan menyebabkan perubahan kestabilan dari titik ekuilibrium.

Titik ekuilibrium merupakan salah satu kunci konsep dalam sistem dinamik. Sistem yang lebih umum dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$x_1' = f_1(x_1, x_{2,\dots}x_n, t),$$

$$x_2' = f_2(x_1, x_{2,\dots}x_n, t),$$

$$\vdots$$

$$x_n' = f_n(x_1, x_{2,\dots}x_n, t)$$

dengan $f_i(x_1, x_{2,\dots}x_n, t), i = 1,2,\dots,n$adalah suatu fungsi umum dari $x_i, i = 1,2,\dots,n$ dan waktu t.

Sistem tersebut dapat disederhanakan lagi menjadi sistem fungsi yang tak bergantung dengan waktu (sistem autonomus) seperti berikut :

$$x_1' = f_1(x_1, x_{2,\dots}x_n),$$

$$x_2' = f_2(x_1, x_{2,\dots}x_n),$$

$$\vdots$$

$$x_n' = f_n(x_1, x_{2,\dots}x_n)$$

dengan $f_i, i = 1,2,\dots,n$ adalah fungsi yang tak tergantung secara exsplisit dari waktu *t*. Kemudian sistem tersebut dianalisis dengan memikirkan konsep tentang ekuilibrium. Ekuilibrium akan terjadi apabila tidak ada gerakan dalam sistem tersebut, artinya $= 0, i = 1,2,\dots,n$. (Perko, 1991).

2.5 Titik Ekuilibrium

Orbit paling sederhana adalah titik ekuilibrium. Definisi titikekuilibrium secara formal adalah $x_0 \in X$dikatakan **titik ekuilibrium** jika memenuhi $\emptyset'(x_0) = x_0$ untuk semua $t \in T$. Untuk mempelajari perilaku dari solusi sistem tersebut digunakan suatu pendekatan yang disebut analisis kestabilan. Analisis ini dapat dilakukan dengan beberapa cara seperti melakukan penyelidikan terhadap perilaku titik setimbang dari persamaan diferensial. Titik ekuilibrium dan kestabilannya dapat memberikan informasi mengenai perilaku solusi periodikdari persamaan diferensial. (Kuznetsov, 1990:9).

2.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Secara formal definisi nilai eigen dan vektor eigen adalah sebagai berikut :

Misalkan A matrik $n \times n$ dan $x \in R^n, n \neq 0$. Vektor x disebut vektoreigen / vektor karakteristik dari A jika

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu ª $\in R$.Bilangan ª yang memenuhi persamaan di atas disebut nilai eigen / nilai karakteristik. Vektor x disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan ª . Untuk mencari nilai dan vektor eigen dari suatu matrik A berordo $n \times n$ adalah sebagai berikut :

Misalkan A matrik $n \times n$ dan $v \in R^n, v \neq 0$ merupakan vektor eigen dari matrik A, maka ada ª $\in R \ni$

$$Av = Av.$$

$$\Leftrightarrow Av = \lambda I v$$

ę $$(\lambda I - A)v = 0$$

Tampak bahwa v merupakan penyelesaian dari sistem persamaan linear (SPL) homogen $(\lambda I - A)x = 0$. Karna $v \neq 0$, maka sistem persamaan homogen

$(\lambda I - A)v = 0$mempunyai penyelesaian non trivial. Ini hanya mungkin jika det $(\lambda I - A) = 0$, artinya a adalah penyelesaian persamaan dari det $(\lambda I - A) = 0$. Det $(\lambda I - A) = 0$ ini disebut persamaan karakteristik dari matrik A (Anton & Rorres, 2014).

Contoh 1

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ Tentukan vektor-vektor eigen dari matriks *A*.

Penyelesaian :

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 6 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$$

Didapat $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ nilai-nilai eigen dari matriks *A*.

Untuk $\lambda_1 = 1$,

$$det(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$6x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{3}x_2$$

Misal $x_2 = t$, maka $x_1 = \frac{1}{3}t$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t \\ 1t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$ adalah $x_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = -1$

$$det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 6x_1 = 0 \end{cases}$$

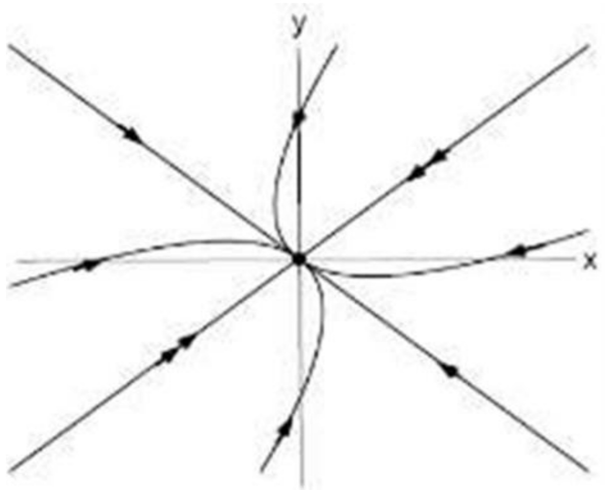
Maka $x_1 = 0$, misal $x_2 = t$

$$x = \begin{pmatrix} 0t \\ 1t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} t$$

Jadi, vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -1$ adalah $x_1 = \binom{0}{t}$ (Anton, 1987:277).

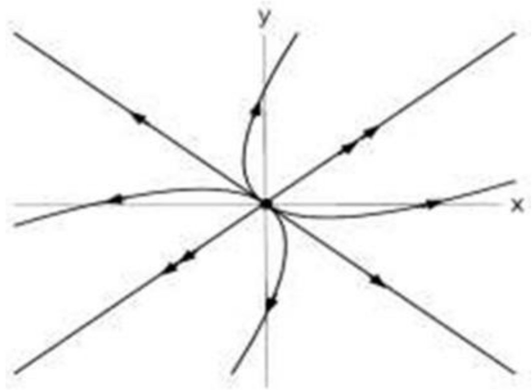
2.7 Kestabilan Titik Kesetimbangan

1. Jika nilai-nilai eigennya real negatif atau $\boldsymbol{\lambda_1} < \boldsymbol{\lambda_2} < 0$ semua trayektori menuju ke tak nol yang berarti titik kritik nol adalah stabil asimtotik pada tipe kesetimbangan *titik simpul*. Trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada Gambar 2.1



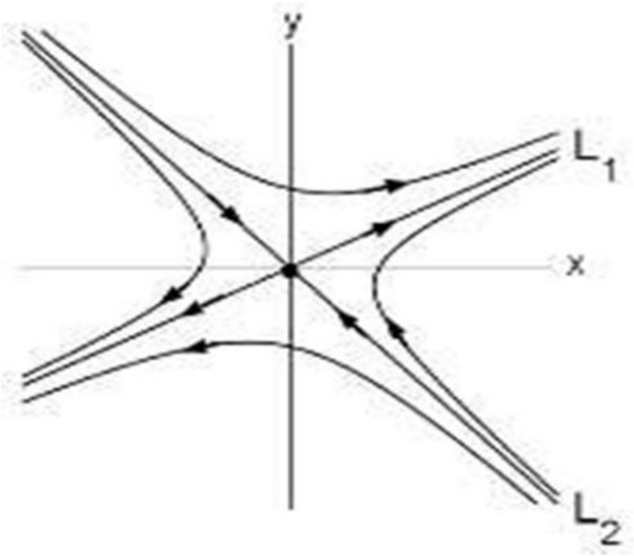
Gambar 2.1 Stabil asimtotik pada tipe kesetimbangan simpul

2. Jika nilai-nilai eigennya real positif atau $\boldsymbol{\lambda_1} < \boldsymbol{\lambda_2} < 0$ semua trayektori keluar dari titik kritiknya akan selalu tak stabil pada tipe titik kesetimbangan *titik simpul*.Trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada Gambar 2.2



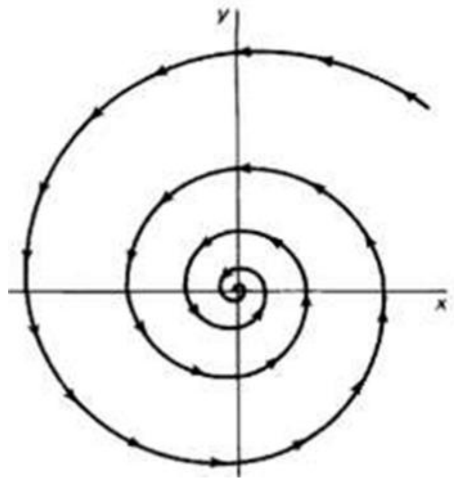
Gambar 2.2 Tidak stabil asimtotik pada tipe kesetimbangan simpul.

3. Jika nilai-nilai eigennya real berbeda berlawanan tanda atau $\boldsymbol{\lambda_1} < 0 < \boldsymbol{\lambda_2}$, dengan ini semua trayektori akan menjauhi ke tak hingga sepanjang vektor eigen, ini mengakibatkan titik kritik akan selalu tak stabil pada tipe titik kesetimbangan *titik pelana*. Trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada Gambar 2.3



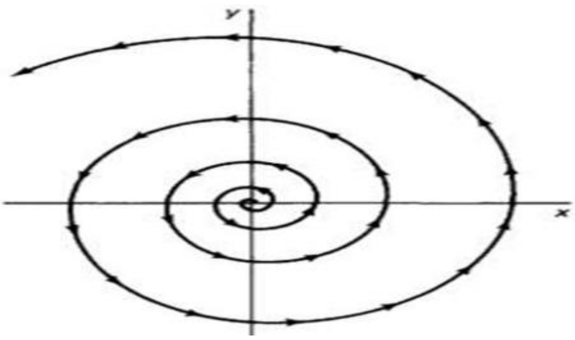
Gambar 2.3 Tidak stabil asimtotik pada tipe kesetimbangan titik pelana.

4. Jika nilai-nilai eigennya merupakan bilangan kompleks dengan $a \pm ib$ $a < 0$, maka akan menghasilkan perilaku yang semua trayektori akan menuju titik nol dan titik kritiknya akan stabil pada tipe kesetimbangan *titik spiral* trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada Gambar 2.4



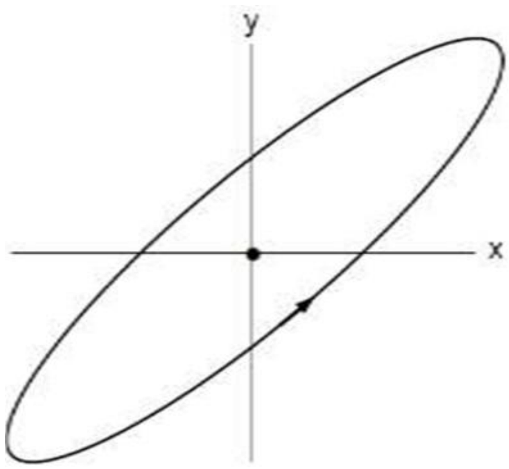
Gambar 2.4 Stabil asimtotik pada tipe kesetimbangan titik spiral.

5. Jika nilai-nilai eigennya merupakan bilangan kompleks dengan $\lambda_1 \lambda_2 \pm ib\ A > 0$, maka akan menghasilkan perilaku yang semua trayektori akan keluar meninggalkan titik nol dan titik kritiknya akan tak stabil pada tipe kesetimbangan *titik spiral* . Trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada Gambar 2.5



Gambar 2.5 Tak stabil asimtotik pada tipe kesetimbangan titik spiral.

6. Jika nilai eigennya imaginer murni, dalam kasus ini nilai eigennya dapat dinyatakan sebagai $\lambda_1 = ib, \lambda_2 = ib$ dalam hal ini solusi merupakan osilator stabil secara alami. Titik kritik dalam hal ini disebut *pusat (fokus*) dengan stabilitas tak tentu. Trayektori pada kasus ini dapat dilihat pada Gambar 2.6



Gambar 2.6 Tak tentu pada tipe titik kesetimbangan pusat (fokus).

2.8 Titik Kesetimbangan

Titikx_1, x_2 merupakan titik kesetimbangan suatu persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} f(t, x)$$

jika *f(t,x)*=0 untuk semua nilai *t*. Oleh karena itu, maka $(x_1 x_2)$ adalah penyelesaian sistem untuk semua *t*. Penyelidikan kestabilan titik kesetimbangan sistem harus terlebih dahulu mengetahui solusi sistem tersebut (Borreli & Coleman, 1996).

2.9 Kestabilan Sistem Persamaan Diferensial

Titik kesetimbangan dikatakan stabil jika untuk sebarang syarat awal yang cukup dengan titik kesetimbangan maka orbit (trayektori) dari penyelesaian tetap dekat dengan penyelesaian di titik kesetimbangannya.

Titik kesetimbangan dikatakan stabil asimtotik jika titik kesetimbangan tersebut stabil dan trayektori dari penyelesaian yang dekat menuju titik kesetimbangan untuk *t* menuju tak hingga (Borreli & Coleman, 1996).

2.10 SistemPredator-Prey Leslie

Pada tahun 1948 Ilmuwan Leslie mengemukakan suatu sistem Predator-Prey sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - cyx$$

$$\frac{dy}{dt} = ey - f\frac{y^2}{x}$$

dengan *x*, *y* adalah variabel yang bergantung pada *t*, sedangkan *a*, *b*, *c*, *e* dan *f* adalah konstanta positif (Berryman, 1992).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitianinidilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung dan waktu penelitian dilaksanakan pada semester ganjil 2017/2018.

3.2 Metode Penelitian

Adapunlangkah-langkah yang dilakukand alam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Memahami referensi yang berkaitan dengan predator prey-leslie, parameter tundaan dan sistem dinamik.
2. Membuat model matematika tentang predator prey-leslie.
3. Mengkaji dinamik kualitatif dari model predator prey-leslie tentang kestabilan.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Letak ketidakstabilan Pada Sistem Predator-Prey Leslie pada titik dengan paramete $a = -0{,}1;\quad b = 0.01;\quad c = 0;\quad e = -0.1;\quad f = 0$ berada pada tipe titik kesetimbangan titik pelana (saddle).
2. Pada Sistem Predator-Prey Leslie didapat letak ke stabilan pada titik kesetimbangan $k_2\left(\frac{fa}{ce+fb'}\frac{ae}{ce+fb}\right)$ berada pada tipe titik kesetimbangan titik spiral.
3. Diskriminan dari persamaan kurang nol ($D < 0$) dan $B > 0$ menghasilkan nilai eigen berupa bilangan kompleks yang bagian riil nya kurang dari nol. Hal tersebut mengakibatkan sistem *Predator-Prey* Leslie tidak stabil asimtotik.

5.2 Saran

Pada penelitian ini, analisis hanya menggunakan dua spesies, dengan menggunakan sistem dinamik dimana proses perhitungannya berdasarkan parameter tunda atau waktu tundaan. Jika pembaca tertarik bisa melakukan analisis dengan menggunakan tiga spesies. Pembaca juga bisa mencari titik kesetimbangan menggunakan fungsi respon holling tipe II.

DAFTAR PUSTAKA

Arizona, Pungky Z, dan Yusuf Fuad. 2014. Analisis *Stabilitas Model Sel Imun-Tumor Dengan Tundaan Waktu*. Surabaya: Universitas Negri Surabaya.

Berryman, A. 1992. *Ecology*. Ecologi society of Amerca. Http://www.jstor.org/stable/194005. Diakses pada tanggal 10 november 2016.

Boyce, W.E., dan Di.Prima, R.C. 1997. *Elementry Differential Equation and Boundary Value Problem*. John Wiley and Sons, United States of America.

Borreli, R.L. dan C.S. Coleman 1996. *Differential Equations: A Modelling perspective.* Willey, New York.

Jennifer. 2008. *A Differential Equations Aproach to The Lorenz System*. http://www.pas.rochester.edu/~Jennifer/senior%20sem.ppt, diakses pada tanggal : 10 november 2016.

Kuznetsov, Y.A. 1998. *Element of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag: New York. http://eprints.ung.ac.id/5536/5/2013-1-84202-41140904-bab2-01082013012017.pdf, diakses pada tanggal: 10 November 2016

Edwards dan Penney. 2005 *Differential Equation and linear Algebra.* Edisi Ke-2 Pearson Prentice Hall, United States of America.

Marwan, dan Said. 2009. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta. Graha Ilmu.

Ni'mah, Khoirun. 2015. *Analisis Model S-I-P Interaksi Dua Spesies Predator-Prey Dengan Fungsi Respon Holling Tipe II.* Semarang: Universitas Semarang.

Nugraha, 2011. *Sistem Persamaan Differensial*. Yogyakarta. Graha Ilmu.

Panigoro, Hasan S. 2013. *Analisis Dinamik Sistem Predator-Prey Model Leslie - Gower Dengan Pemanenan Secara Konstan Terhadap Predator*. Jakarta

Perko, L. 2000. *Differential Equation and Dynamical System*. New York.