BILANGAN KROMATIK LOKASI BEBERAPA GRAF BARBEL DAN SUBDIVISINYA

(Skripsi)

Oleh

I KETUT SADHA GUNCE YANA

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI BEBERAPA GRAF BARBEL DAN SUBDIVISINYA

Oleh

I KETUT SADHA GUNCE YANA

Misalkan c suatu pewarnaan sejati di graf terhubung G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari titik v di G adalah k-pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Banyaknya warna minimum pada pewarnaan lokasi dari G disebut bilangan kromatik lokasi dari graf G, yang dinotasikan dengan $X_L(G)$. Graf barbel adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua tiruan dari graf lengkap atau graf Petersen dan dihubungkan oleh sebuah sisi. Pada penelitian dibahas tentang bilangan kromatik lokasi beberapa graf barbel dan subdivisinya.

Kata kunci: bilangan kromatik lokasi, graf barbel, subdivisi.

ABSTRACT

THE LOCATING-CHROMATIC NUMBER FOR SOME BARBELL GRAPH AND THE SUBDIVISIONS

By

I KETUT SADHA GUNCE YANA

Let c be a proper coloring of a connected graph G with $c(u) \neq c(v)$ for adjacent vertices u and v in G. Let C_i is a set of vertices receiving color i. The color code $c_\Pi(v)$ of a vertex v in G is the ordered k-tuple $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ with $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ for $1 \leq i \leq k$. If all distinct vertices of G have distinct color codes, then c is called a locating-coloring of G. The minimum number of colors in a locating-coloring of G is called the locating-chromatic number of graph G, denoted by $X_L(G)$. Barbell graph is simple graph which obtained by connecting two copies of complete graph or Petersen graph and connected by one edge. In this study will be discussed about the locating-chromatic number for some barbell graph and the subdivisions.

Keywords: the locating-chromatic number, barbell graph, subdivisions.

BILANGAN KROMATIK LOKASI BEBERAPA GRAF BARBEL DAN SUBDIVISINYA

Oleh

I KETUT SADHA GUNCE YANA

Skripsi
Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
SARJANA SAINS

Pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **BILANGAN KROMATIK LOKASI BEBERAPA GRAF BARBEL DAN SUBDIVISIYA**

Nama Mahasiswa : I Ketut Sadha Gunce Yana

Nomor Pokok Mahasiswa : 1417031057

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.	**Subian Saidi, S.Si., M.Si.**
NIP. 19760411 200012 2 001	NIP. 19800821 200812 1 001

2. Mengetahui

Ketua Jurusan Matematika

Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** .....

Sekretaris : **Subian Saidi, S.Si., M.Si.** .....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** .....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **29 Desember 2017**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : **I Ketut Sadha Gunce Yana**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1417031057**

Judul : **Bilangan Kromatik Lokasi beberapa Graf Barbel dan Subdivisinya**

Jurusan : **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, bukan hasil orang lain, dan semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 29 Desember 2017

Penulis

I Ketut Sadha Gunce Yana
NPM. 1417031057

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap I Ketut Sadha Gunce Yana, dilahirkan di Labuhan Maringgai pada tanggal 16 Desember 1996, dan merupakan anak keempat dari lima bersaudara dari pasangan Bapak Nyoman Sawarse dan Ibu Ketut Suryati.

Penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Dasar di SD Negeri Karyatani Labuhan Maringgai Lampung Timur pada tahun 2008, pendidikan menengah pertama di SMP Negeri 1 Pasir Sakti Lampung Timur yang diselesaikan pada tahun 2011, pendidikan menengah atas di SMA Negeri 1 Pasir Sakti Lampung Timur yang diselesaikan pada tahun 2014. Pada tahun 2014 penulis melanjutkan pendidikan Strata Satu (S1) Program Studi S1 Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung Bandar Lampung melalui jalur SNMPTN.

Penulis menjadi anggota bidang dana dan usaha HIMATIKA FMIPA Universitas Lampung pada tahun 2015-2016 dan menjadi anggota bidang kerohanian UKM-Hindu Universitas Lampung pada tahun 2014-2016. Pada bulan Januari 2017 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Dinas Perkebunan dan Peternakan Provinsi Lampung dan melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Tejang Pulau Sebesi Kecamatan Rajabasa Kabupaten Lampung Selatan pada bulan Juli-Agustus 2017.

KATA INSPIRASI

JALANI HIDUPMU YANG SEKARANG SESUAI HARAPANMU, JANGAN CAPAI HARAPANMU DENGAN HIDUPMU YANG SEMBARANG.

(SADHA)

BERADAPTASILAH DENGAN WARNA-WARNA KEHIDUPAN YANG MENGIRINGIMU MELANGKAH MENUJU PINTU GERBANG KESUKSESAN.

(SADHA)

BERANJAKLAH DARI KETERPURUKAN YANG ENGKAU ALAMI KEMUDIAN PIJAKKAN KAKIMU MENUJU INDAHNYA KEBAHAGIAAN.

(SADHA)

PERSEMBAHAN

DENGAN SEGALA KERENDAHAN HATI, KUPERSEMBAHKAN KARYA KECILKU INI UNTUK IBU, AYAH, KAKAK, DAN ADIKKU TERCINTA YANG SELALU MEMBERIKAN KASIH SAYANG, DUKUNGAN, SERTA MOTIVASI UNTUK TETAP SEMANGAT.

KEPADA TEMAN-TEMANKU YANG TELAH MEMBERIKAN DUKUNGAN DAN SARAN SELAMA PERKULIAHAN.

KUPERSEMBAHKAN KARYA INI UNTUK KALIAN.

SANWACANA

Puji syukur saya haturkan kehadapan Ida Sang Hyang Widhi Wasa, karena atas Asung Kertha Wara Nugraha-Nya skripsi ini dapat terselesaikan. Skripsi yang berjudul "Bilangan Kromatik Lokasi beberapa Graf Barbel dan Subdivisinya" adalah salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains (S.Si.) pada program studi S1 Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.

Dalam penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang telah membimbing serta memberikan saran dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan saran dan kritik dalam menyelesaian skripsi ini.
3. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji yang telah mengevaluasi dan memberikan saran dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak Amanto, S.Si., M.Si., selaku pembimbing akademik Semester I-VI yang telah memberikan pengarahan dan bimbingan selama perkuliahan.
5. Bapak Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc., selaku pembimbing akademik Semester VII yang telah memberikan pengarahan dan bimbingan selama perkuliahan.

6. Ibu Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
7. Bapak Prof. Warsito, S.SI., D.E.A., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
8. Bapak Prof. Dr. Hasriadi Mat Akin, M.P., selaku Rektor Universitas Lampung.
9. Kedua Orang Tua serta keluarga besar penulis yang senantiasa mendukung dan mengupayakan segala hal yang terbaik untuk penulis tanpa mengenal lelah.
10. Sahabat seperjuangan Agus, Dracjat, Rahmad, Wahyu, Nandra, Darma, Abdurrois, Faranika, Annisa, Nevi, Shelvi, Vindi, Fitrotin, Indri, Kasandra, Lucia, Restika, Riyana, Septi, Susan, dan Vinsensia yang selalu memberikan semangat dan dukungannya serta seluruh teman-teman mahasiswa jurusan Matematika dan semua pihak yang terlibat dalam penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan baik dari segi materi maupun teknisnya. Untuk itu, penulis sangat mengharapkan adanya saran dan kritik yang bersifat positif. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat serta menambah wawasan dan memberi tambahan informasi bagi para pembacanya.

Bandar Lampung, 29 Desember 2017
Penulis

I Ketut Sadha Gunce Yana

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR.....xii

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah..... 1

1.2 Tujuan Penelitian 3

1.3 Manfaat Penelitian 4

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf..... 5

2.2 Graf Lengkap, Graf Petersen, dan Graf Barbel..... 7

2.3 Bilangan Kromatik Lokasi..... 8

2.4 Graf Subdivisi 14

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian.....16

3.2 Metode Penelitian.....16

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Hasil Awal Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel 17

4.2 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel ($B_{n,n}^{*s}$) untuk $n \geq 3$ dan $s \geq 1$.. 28

4.3 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel ($B_{n,m}^{*s}$) untuk $n, m \geq 3$, $n \neq m$, dan $s \geq 1$ 47

4.4 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel ($B_{P_{n,1}}$) untuk $n \geq 3$ 64

4.5 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel ($B_{P_{n,1}}^{*s}$) untuk $n \geq 3$ dan $s \geq 1$. 78

V. KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

1. Permasalahan jembatan *Konigsberg* dan representasinya 1
2. Contoh graf dengan 7 titik dan 11 sisi 5
3. Contoh graf lengkap dengan 6 titik yang dinotasikan dengan (K_6) 7
4. Contoh graf petersen ($P_{10,1}$) 8
5. Contoh graf barbel ($B_{6,6}$) 8
6. Pewarnaan lokasi minimum dari graf G 10
7. Contoh graf lengkap (K_6) dengan bilangan kromatik lokasi 6 11
8. Contoh graf barbel ($B_{6,6}$) yang disubdivisi satu titik 15
9. Graf barbel ($B_{3,3}$) 17
10. Graf barbel ($B_{3,3}$) dengan pewarnaan titik 18
11. Graf barbel ($B_{4,4}$) 19
12. Graf barbel ($B_{4,4}$) dengan pewarnaan titik 19
13. Graf barbel ($B_{5,5}$) 20
14. Graf barbel ($B_{5,5}$) dengan pewarnaan titik 21
15. Graf barbel ($B_{6,6}$) 22
16. Graf barbel ($B_{6,6}$) dengan pewarnaan titik 23
17. Graf barbel ($B_{n,n}$) 24
18. Graf barbel ($B_{n,n}$) dengan pewarnaan titik 25

19. Graf barbel ($B_{n,m}$) 26

20. Graf barbel ($B_{n,m}$) dengan pewarnaan titik 27

21. Graf barbel ($B_{3,3}^{*1}$) 28

22. Graf barbel ($B_{3,3}^{*1}$) dengan pewarnaan titik 29

23. Graf barbel ($B_{3,3}^{*2}$) 30

24. Graf barbel ($B_{3,3}^{*2}$) dengan pewarnaan titik 30

25. Graf barbel ($B_{3,3}^{*s}$) untuk s ganjil 31

26. Graf barbel ($B_{3,3}^{*s}$) dengan pewarnaan titik untuk s ganjil 32

27. Graf barbel ($B_{3,3}^{*s}$) untuk s genap 33

28. Graf barbel ($B_{3,3}^{*s}$) dengan pewarnaan titik untuk s genap 34

29. Graf barbel ($B_{4,4}^{*1}$) 35

30. Graf barbel ($B_{4,4}^{*1}$) dengan pewarnaan titik 35

31. Graf barbel ($B_{4,4}^{*2}$) 36

32. Graf barbel ($B_{4,4}^{*2}$) dengan pewarnaan titik 37

33. Graf barbel ($B_{4,4}^{*s}$) untuk s ganjil 38

34. Graf barbel ($B_{4,4}^{*s}$) dengan pewarnaan titik untuk s ganjil 39

35. Graf barbel ($B_{4,4}^{*s}$) untuk s genap 40

36. Graf barbel ($B_{4,4}^{*s}$) dengan pewarnaan titik untuk s genap 41

37. Graf barbel ($B_{n,n}^{*s}$) untuk $n \geq 3$ dan s ganjil 42

38. Graf barbel ($B_{n,n}^{*s}$) dengan pewarnaan titik untuk $n \geq 3$ dan s ganjil 43

39. Graf barbel ($B_{n,n}^{*s}$) untuk $n \geq 3$ dan s genap 44

40. Graf barbel ($B_{n,n}^{*s}$) dengan pewarnaan titik untuk $n \geq 3$ dan s genap 45

41. Graf barbel ($B_{4,3}^{*1}$) 47

42. Graf barbel ($B_{4,3}^{*1}$) dengan pewarnaan titik 47

43. Graf barbel ($B_{4,3}^{*2}$) 48

44. Graf barbel ($B_{4,3}^{*2}$) dengan pewarnaan titik 49

45. Graf barbel ($B_{4,3}^{*s}$) untuk s ganjil 50

46. Graf barbel ($B_{4,3}^{*s}$) dengan pewarnaan titik untuk s ganjil 50

47. Graf barbel ($B_{4,3}^{*s}$) untuk s genap 51

48. Graf barbel ($B_{4,3}^{*s}$) dengan pewarnaan titik untuk s genap..... 52

49. Graf barbel ($B_{5,3}^{*1}$) 53

50. Graf barbel ($B_{5,3}^{*1}$) dengan pewarnaan titik 54

51. Graf barbel ($B_{5,3}^{*2}$) 55

52. Graf barbel ($B_{5,3}^{*2}$) dengan pewarnaan titik 55

53. Graf barbel ($B_{5,3}^{*s}$) untuk s ganjil 56

54. Graf barbel ($B_{5,3}^{*s}$) dengan pewarnaan titik untuk s ganjil 57

55. Graf barbel ($B_{5,3}^{*s}$) untuk s genap 58

56. Graf barbel ($B_{5,3}^{*s}$) dengan pewarnaan titik untuk s genap..... 58

57. Graf barbel ($B_{n,m}^{*s}$) untuk $n \neq m$ dan s ganjil 60

58. Graf barbel ($B_{n,m}^{*s}$) dengan pewarnaan titik untuk $n \neq m$ dan s ganjil..... 60

59. Graf barbel ($B_{n,m}^{*s}$) untuk $n \neq m$ dan s genap 62

60. Graf barbel ($B_{n,m}^{*s}$) dengan pewarnaan titik untuk $n \neq m$ dan s genap 62

61. Graf barbel ($B_{P_{3,1}}$) 64

62. Graf barbel ($B_{P_{3,1}}$) dengan pewarnaan titik 65

63. Graf barbel ($B_{P_{4,1}}$) 66

64. Graf barbel ($B_{P_{4,1}}$) dengan pewarnaan titik 66

65. Graf barbel ($B_{P_{5,1}}$) 67

66. Graf barbel ($B_{P_{5,1}}$) dengan pewarnaan titik 68

67. Graf barbel ($B_{P_{6,1}}$) 69

68. Graf barbel ($B_{P_{6,1}}$) dengan pewarnaan titik 69

69. Graf barbel ($B_{P_{n,1}}$) untuk n ganjil 71

70. Graf barbel ($B_{P_{n,1}}$) dengan pewarnaan titik untuk n ganjil 71

71. Graf barbel ($B_{P_{n,1}}$) untuk n genap 74

72. Graf barbel ($B_{P_{n,1}}$) dengan pewarnaan titik untuk n genap 75

73. Graf barbel ($B^{*1}_{P_{3,1}}$) 78

74. Graf barbel ($B^{*1}_{P_{3,1}}$) dengan pewarnaan titik 79

75. Graf barbel ($B^{*2}_{P_{3,1}}$) 80

76. Graf barbel ($B^{*2}_{P_{3,1}}$) dengan pewarnaan titik 80

77. Graf barbel ($B^{*s}_{P_{3,1}}$) untuk s ganjil 81

78. Graf barbel ($B^{*s}_{P_{3,1}}$) dengan pewarnaan titik untuk s ganjil 81

79. Graf barbel ($B^{*s}_{P_{3,1}}$) untuk s genap 83

80. Graf barbel ($B^{*s}_{P_{3,1}}$) dengan pewarnaan titik untuk s genap 83

81. Graf barbel ($B^{*1}_{P_{4,1}}$) 84

82. Graf barbel ($B^{*1}_{P_{4,1}}$) dengan pewarnaan titik 85

83. Graf barbel ($B^{*2}_{P_{4,1}}$) 86

84. Graf barbel ($B^{*2}_{P_{4,1}}$) dengan pewarnaan titik 86

85. Graf barbel ($B^{*s}_{P_{4,1}}$) untuk s ganjil 87

86. Graf barbel ($B^{*s}_{P_{4,1}}$) dengan pewarnaan titik untuk s ganjil 88

87. Graf barbel ($B_{P_{4,1}}^{*s}$) untuk s genap 89

88. Graf barbel ($B_{P_{4,1}}^{*s}$) dengan pewarnaan titik untuk s genap..... 90

89. Graf barbel ($B_{P_{n,1}}^{*s}$) untuk n dan s ganjil..... 91

90. Graf barbel ($B_{P_{n,1}}^{*s}$) dengan pewarnaan titik untuk n dan s ganjil..... 92

91. Graf barbel ($B_{P_{n,1}}^{*s}$) untuk n ganjil dan s genap..... 95

92. Graf barbel ($B_{P_{n,1}}^{*s}$) dengan pewarnaan titik untuk n ganjil dan s genap..... 95

93. Graf barbel ($B_{P_{n,1}}^{*s}$) untuk n genap dan s ganjil..... 99

94. Graf barbel ($B_{P_{n,1}}^{*s}$) dengan pewarnaan titik untuk n genap dan s ganjil..... 99

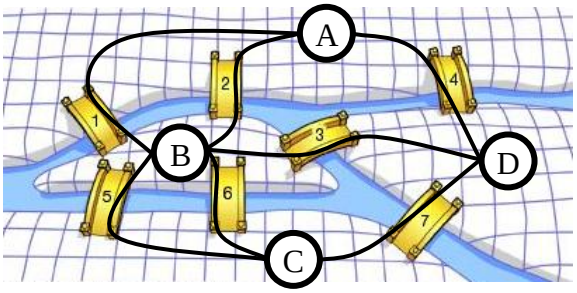
95. Graf barbel ($B_{P_{n,1}}^{*s}$) untuk n dan s genap 103

96. Graf barbel ($B_{P_{n,1}}^{*s}$) dengan pewarnaan titik untuk n dan s genap..... 104

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari himpunan titik yang dihubungkan oleh himpunan sisi, yang semakin lama semakin berkembang pesat. Berawal dari permasalahan jembatan *Konigsberg* yang memiliki tujuh jembatan yang menghubungkan empat daerah. Penduduk kota tersebut ingin melewati ketujuh jembatan tersebut tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat awal keberangkatan. Seorang matematikawan Swiss, Leonard Euler pada tahun 1736 berhasil menemukan jawaban dari permasalahan tersebut, yaitu memodelkan masalah tersebut dengan cara mempresentasikannya ke dalam graf. Daratan yang dihubungkan oleh jembatan sebagai titik dan jembatan sebagai sisi. Representasi tersebut mempermudahkan menganalisis solusi dari permasalahan tersebut.



Gambar 1. Permasalahan jembatan *Konigsberg* dan representasinya.

Salah satu materi dalam teori graf adalah bilangan kromatik lokasi yang diperkenalkan oleh Chartrand, dkk., pada tahun 2002. Penentuan bilangan kromatik lokasi didasarkan pada banyaknya warna minimum yang digunakan pada pewarnaan lokasi dengan kode warna yang berbeda di setiap titik pada graf tersebut. Sehingga bilangan kromatik lokasi akan sangat bergantung pada kode warna yang digunakan pada suatu graf.

Pada penelitian sebelumnya Chartrand, dkk., (2002) telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi beberapa kelas graf, diantaranya pada graf lengkap diperoleh $X_L(K_n) = n$, pada graf terhubung (G) diperoleh $3 \leq X_L(G) \leq n$ untuk orde $n \geq 3$, serta pada graf siklus diperoleh $X_L(C_n) = 3$ untuk n ganjil dan $X_L(C_n) = 4$ untuk n genap. Asmiati, dkk., (2011) telah berhasil mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi bintang $(S_{k,m})$, dimana $(S_{k,m})$ adalah amalgamasi dari k buah graf bintang $(K_{1,m})$, dengan dimisalkan $H(a) = (m + a - 1)\binom{m+a-1}{m-1}$ untuk $a \geq 0, k \geq 2, m \geq 2$, maka diperoleh $X_L(S_{k,m}) = m$ untuk $2 \leq k \leq H(0), m \geq 3$ dan $X_L(S_{k,m}) = m + a$ untuk $H(a-1) < k \leq H(a), a \geq 1$. Selanjutnya Asmiati (2014) telah berhasil mendapatkan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi bintang tak homogen $(S_{k,(n_1,n_2,\ldots,n_k)})$ dimana $k \geq 2, n_i \geq 1, |A| \leq n_{max} + a - 1$, dengan dimisalkan $I(a) = \sum_{i=1}^{n_{max}} n_{max} + a - 1\binom{n_{max} + a - 1}{n_{max} - i}$ untuk $a \geq 0, a \in Z$, maka diperoleh $X_L(S_{k,(n_1,n_2,\ldots,n_k)}) = n_{max}$ untuk $2 \leq k \leq I(0)$ dan $X_L(S_{k,(n_1,n_2,\ldots,n_k)}) = n_{max} + a$ untuk $I(a-1) < k \leq I(a), a \geq 1$. Selanjutnya Asmiati, dkk., (2017) telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi beberapa kelas graf, diantaranya

pada graf Petersen ($P_{n,1}$) diperoleh $X_L(P_{n,1}) = 4$ untuk n ganjil dan $X_L(P_{n,1}) = 5$ untuk n genap.

Graf barbel merupakan salah satu jenis graf sederhana yang dapat ditentukan bilangan kromatik lokasinya. Suatu graf barbel jika disisipkan beberapa titik di beberapa sisinya, maka mungkin mengubah bilangan kromatik lokasi dari graf tersebut, maka permasalahan tersebut menjadi permasalahan baru yang muncul. Oleh karena itu, untuk melanjutkan penelitian-penelitian sebelumnya, maka pada penelitian ini akan dibahas tentang penentuan bilangan kromatik lokasi beberapa graf barbel dan subdivisinya, khususnya graf barbel lengkap dan graf barbel Petersen.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel ($B_{n,n}$) yang disubdivisi pada jembatan/sisi yang menghubungkan dua graf lengkap, untuk $n \geq 3$.
2. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel ($B_{n,m}$) yang disubdivisi pada jembatan/sisi yang menghubungkan dua graf lengkap, untuk $n, m \geq 3$ dan $n > m$.
3. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel ($B_{P_{n,1}}$), untuk $n \geq 3$.
4. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel ($B_{P_{n,1}}$) yang disubdivisi pada jembatan/sisi yang menghubungkan dua graf Petersen, untuk $n \geq 3$.

1.3 Manfaat Penelitian

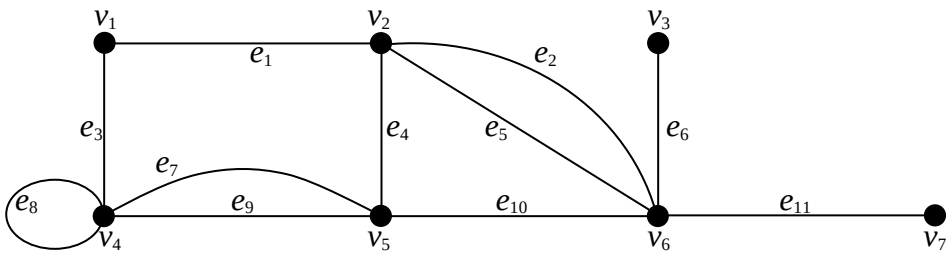
Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan pemahaman mengenai bilangan kromatik lokasi graf barbel ($B_{n,n}$), ($B_{n,m}$), ($B_{P_{n,1}}$), dan subdivisinya, untuk $n \geq 3$.
2. Sebagai bahan referensi penelitian lanjutan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel yang disubdivisi pada sisi lainnya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Beberapa konsep dasar yang digunakan dalam penelitian ini diambil dari Deo (1989). Suatu graf G adalah himpunan terurut ($V(G)$, $E(G)$), dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik $\{v_1, v_2, ...\}$ dari G dengan $V(G) \neq 0$ dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi $\{e_1, e_2, ...\}$ yakni pasangan tak terurut dari $V(G)$. Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut dengan orde dari graf G. Jika titik v_1 dan v_2 dihubungkan oleh sisi e, maka titik v_1 dan v_2 dikatakan menempel pada sisi e begitu juga dengan sisi e menempel pada titik v_1 dan v_2, sehingga titik v_1 dan v_2 saling bertetangga. Lingkungan dari suatu titik v dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v.



Gambar 2. Contoh graf dengan 7 titik dan 11 sisi.

Pada Gambar 2, graf tersebut merupakan graf (V, E) dengan himpunan titik $V(G)$ = {v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7} dan himpunan sisi $E(G)$ = {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}}. Titik yang bertetangga dengan titik v_6 adalah titik v_2, v_3, v_5, dan v_7, sedangkan sisi yang menempel dengan titik v_6 adalah e_2, e_5, e_6, e_{10}, dan e_{11}, begitu juga dengan sisi e_2, e_5, e_6, e_{10}, dan e_{11} menempel pada titik v_6. Derajat dari suatu titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v yang dinotasikan dengan $d(v)$, pada Gambar 2 $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 4$, $d(v_4) = 5$, $d(v_5) = 4$. Daun adalah titik yang berderajat satu, pada Gambar 2 yang dikatakan sebagai daun adalah titik v_3 dan v_7.

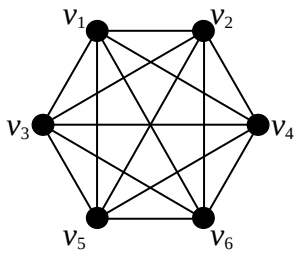
Sisi paralel adalah beberapa sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama, *loop* adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sisi-sisi paralel pada Gambar 2 adalah e_2, e_5, e_7, dan e_9 sedangkan e_8 merupakan *loop*. Graf yang tidak memiliki *loop* dan sisi paralel disebut graf sederhana, pada Gambar 2 bukan merupakan graf sederhana karena memiliki sisi paralel dan *loop*.

Barisan berhingga bergantian antara titik dan sisi yang dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya pada suatu graf disebut dengan jalan. Lintasan adalah jalan yang melewati titik yang berbeda-beda pada suatu graf dimana titik-titik yang dilewati tepat sekali. Contoh jalan pada Gambar 2 adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_2 - v_6 - e_5 - v_2 - e_4 - v_5 - e_{10} - v_6 - e_{11} - v_7$ atau $v_4 - e_8 - v_4 - e_3 - v_1$, sedangkan contoh lintasan pada Gambar 2 adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_4 - v_5 - e_{10} - v_6 - e_{11} - v_7$ atau $v_4 - e_3 - v_1 - e_1 - v_2 - e_4 - v_5 - e_{10} - v_6 - e_6 - v_3$.

Sirkuit adalah lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama yang sering disebut juga dengan lintasan tertutup. Sirkuit dibedakan menjadi dua macam, yaitu sirkuit genap dan ganjil. Sirkuit genap adalah sirkuit yang memuat banyaknya titik berjumlah genap, sedangkan sirkuit ganjil adalah sirkuit yang memuat banyaknya titik berjumlah ganjil. Contoh sirkuit pada Gambar 2, adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_4 - v_5 - e_7 - v_4 - e_3 - v_1$ yang juga merupakan sirkuit genap, sedangkan $v_2 - e_2 - v_6 - e_{10} - v_5 - e_4 - v_2$ merupakan sirkuit ganjil.

2.2 Graf Lengkap, Graf Petersen, dan Graf Barbel

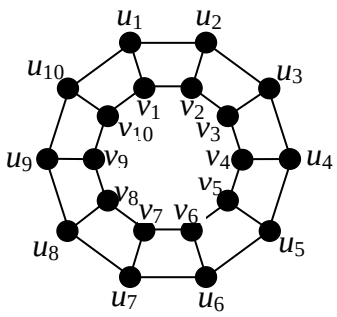
Graf lengkap adalah graf yang setiap titiknya saling bertetangga, dinotasikan dengan (K_n) dengan n adalah banyaknya titik dan $n \geq 2$. Banyaknya sisi pada suatu graf lengkap adalah $n(n-1)/2$ dan masing-masing titik berderajat $n - 1$ (Deo, 1989).



Gambar 3. Graf lengkap dengan 6 titik, K_6.

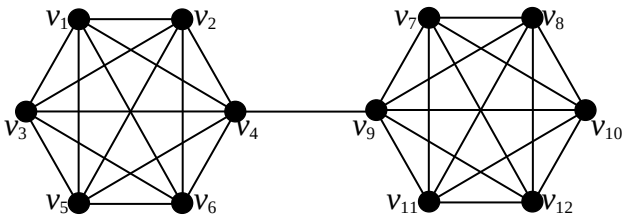
Graf Petersen adalah graf yang memiliki $2n$ titik yaitu titik-titik pada lingkaran luar $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dan titik-titik pada lingkaran dalam $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ untuk $n \geq 3$. Graf Petersen dinotasikan dengan ($P_{n,k}$), dengan $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ dan

$n \geq 3$, serta memiliki sisi $\{u_i u_{i+1}\} \cup \{v_i v_{i+k}\} \cup \{u_i v_i\}$ dimana $\{1 \leq i \leq n\}$ (Asmiati, dkk., 2017).



Gambar 4. Contoh graf Petersen ($P_{10,1}$).

Graf barbel adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua tiruan/jiplakan dari graf lengkap atau graf Petersen yang dihubungkan dengan sebuah jembatan/sisi, yang dinotasikan dengan ($B_{n,n}$) dimana $n \geq 3$ dan n adalah bilangan asli (Ihwan, dkk., 2014).



Gambar 5. Contoh graf barbel ($B_{6,6}$).

2.3 Bilangan Kromatik Lokasi

Menurut Chartrand, dkk., (2002), bilangan kromatik lokasi didefinisikan sebagai berikut. Misalkan c suatu pewarnaan sejati di G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi

warna i, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah k-pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$, jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G, banyaknya warna minimum yang digunakan pada pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G, yang dinotasikan dengan $X_L(G)$.

Berikut ini diberikan teorema dasar tentang bilangan kromatik lokasi yang telah dibuktikan oleh Chartrand, dkk., (2002).

Teorema 2.1 (Chartrand, dkk., 2002)

Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf G. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk semua $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) = c(v)$. Secara khusus, jika u dan v titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

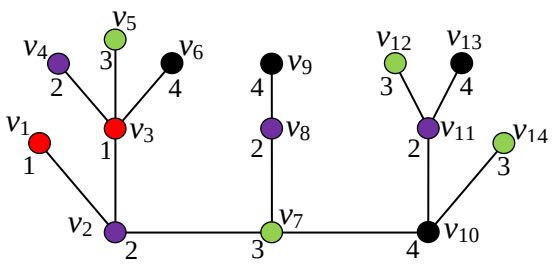
Bukti: Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi dari titik-titik G ke dalam kelas warna C_i. Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π. Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$ maka $d(u, C_j) = d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i$, $1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi, $c(u) \neq c(v)$.

Akibat 2.1 (Chartrand, dkk., 2002)

Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $X_L(G) \geq k + 1$.

Bukti: Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun, yaitu $x_1, x_2, \dots, x_k$ di G. Berdasarkan Teorema 2.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna yang berbeda untuk setiap $x_i, i = 1,2, \dots, k$. Karena v bertetangga dengan semua x_i, maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibatnya, $X_L(G) \geq k + 1$ (Chartrand, dkk., 2002).

Berikut ini diberikan graf G dan akan ditentukan bilangan kromatik lokasi dari graf G tersebut.



Gambar 6. Pewarnaan lokasi minimum dari graf G.

Diberikan graf G seperti yang terlihat pada Gambar 6. Kemudian akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf G. Karena terdapat titik v_3 yang mempunyai 3 daun dan berdasarkan Akibat 2.1, maka

$$X_L(G) \geq 4. \tag{2.1}$$

Misalkan *c* adalah pewarnaan titik menggunakan empat warna. Pada graf *G* diberikan kelas warna sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ dengan $C_1 = \{v_1, v_3\}, C_2 = \{v_2, v_4, v_8, v_{11}\}, C_3 = \{v_5, v_7, v_{12}, v_{14}\}$ dan $C_4 = \{v_6, v_9, v_{10}, v_{13}\}$. Oleh karena itu, didapatkan kode warna sebagai berikut:

$c_\Pi(v_1) = (0,1,2,3)$; $c_\Pi(v_2) = (1,0,1,2)$; $c_\Pi(v_3) = (0,1,1,1)$;

$c_\Pi(v_4) = (1,0,2,2)$; $c_\Pi(v_5) = (1,2,0,2)$; $c_\Pi(v_6) = (1,2,2,0)$;

$c_\Pi(v_7) = (2,1,0,1)$; $c_\Pi(v_8) = (3,0,1,1)$; $c_\Pi(v_9) = (4,1,2,0)$;

$c_\Pi(v_{10}) = (3,1,1,0)$; $c_\Pi(v_{11}) = (4,0,1,1)$; $c_\Pi(v_{12}) = (5,1,0,2)$;

$c_\Pi(v_{13}) = (5,1,2,0)$; $c_\Pi(v_{14}) = (4,2,0,1)$

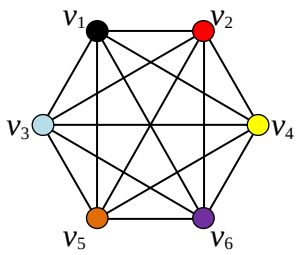
Karena kode warna dari semua titik di *G* berbeda, maka *c* adalah pewarnaan lokasi. Jadi, $X_L(G) \leq 4$. (2.2)

Berdasarkan (2.1) dan (2.2), maka Π adalah pewarnaan lokasi dari *G* sehingga $X_L(G) = 4$ (Chartrand, dkk., 2002).

Teorema 2.2 (Chartrand, dkk., 2002)

Bilangan kromatik lokasi graf lengkap (K_n) adalah n untuk $n \geq 2$.

Bukti: Karena setiap titik pada graf lengkap saling bertetangga maka setiap titik diberi warna yang berbeda, jadi $X_L(K_n) = n$ untuk $n \geq 2$ (Chartrand, dkk., 2002).



Gambar 7. Contoh graf lengkap (K_6) dengan bilangan kromatik lokasi 6.

Teorema 2.3 (Asmiati, dkk., 2017)

Bilangan kromatik lokasi graf Petersen ($P_{n,1}$) adalah 4 untuk ($n \geq 3$) ganjil atau 5 untuk ($n \geq 4$) genap.

Bukti: Untuk membuktikan teorema tersebut dapat dipertimbangkan dalam kasus sebagai berikut:

Kasus 1. $X_L(P_{n,1}) = 4$, untuk ($n \geq 3$) ganjil.

Pertama, menentukan batas bawah dari $X_L(P_{n,1}) = 4$, untuk ($n \geq 3$) ganjil.

Karena graf Petersen ($P_{n,1}$) memuat beberapa siklus genap maka $X_L(P_{n,1}) \geq 4$.

Jadi $X_L(P_{n,1}) \geq 4$ untuk ($n \geq 3$) ganjil.

Misalkan c adalah pewarnaan titik dari graf Petersen ($P_{n,1}$), untuk ($n \geq 3$) ganjil.

Sehingga diperoleh partisi dari titik di $V(P_{n,1}) : C_1 = \{u_1\}; C_2 = \{u_{2j}, v_{2j-1}\}$; $C_3 = \{u_{2j+1}, v_{2j}\}; C_4 = \{v_n\}$, untuk $j > 0$. Oleh karena itu, kode warna dari setiap titik di G adalah sebagai berikut:

a) $c_\Pi(u_1) = (0,1,1,2)$.

b) $C_2 = \{u_{2j}, v_{2j-1}\}$. Misalkan u_i, $2 \leq i \leq n-1; i = 2j; 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ dan v_i, $1 \leq i \leq n-2; i = 2j-1; 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Untuk $i < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $c_\Pi(u_i) = (i-1, 0, 1, i+1)$ dan $c_\Pi(v_i) = (i, 0, 1, i)$.

Untuk $i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, $c_\Pi(u_i) = c_\Pi(u_{n-2j+1}) = (i-1, 0, 1, 2j)$ dan

$$c_\Pi(v_i) = c_\Pi(v_{n-2j}) = (i, 0, 1, 2j).$$

Untuk $i > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, $c_\Pi(u_i) = c_\Pi(u_{n-2j+1}) = (2j, 0, 1, 2j)$ dan

$$c_\Pi(v_i) = c_\Pi(v_{n-2j}) = (2j+2, 0, 1, 2j).$$

c) $C_3 = \{u_{2j+1}, v_{2j}\}$. Misalkan u_i, $3 \leq i \leq n; i = 2j + 1; 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ dan

v_i, $2 \leq i \leq n - 1; i = 2j; 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Untuk $i < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $c_\Pi(u_i) = (i - 1, 1, 0, i + 1)$ dan $c_\Pi(v_i) = (i, 1, 0, i)$.

Untuk $i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, $c_\Pi(u_i) = c_\Pi(u_{n-2j+2}) = (i - 1, 0, 1, 2j - 1)$ dan

$$c_\Pi(v_i) = c_\Pi(v_{n-2j+1}) = (i, 1, 0, 2j - 1).$$

Untuk $i > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, $c_\Pi(u_i) = c_\Pi(u_{n-2j+2}) = (2j - 1, 1, 0, 2j - 1)$ dan

$$c_\Pi(v_i) = c_\Pi(v_{n-2j+1}) = (2j + 1, 1, 0, 2j - 1).$$

d) $c_\Pi(v_n) = (2,1,1,0)$.

Karena kode warna dari setiap titik di $V(P_{n,1})$ berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi dari graf Petersan $(P_{n,1})$ untuk $(n \geq 3)$ ganjil. Jadi, $X_L(P_{n,1}) \leq 4$ untuk $(n \geq 3)$ ganjil.

Kasus 2. $X_L(P_{n,1}) = 5$, untuk $(n \geq 4)$ genap.

Graf Petersen $(P_{n,1})$ untuk $(n \geq 4)$ genap, memuat beberapa siklus genap maka $X_L(P_{n,1}) \geq 4$. Andaikan c adalah pewarnaan lokasi dari graf Petersen $(P_{n,1})$ untuk $(n \geq 4)$ genap, misalkan $C_1 = \{u_1\}; C_2 = \{u_{2i}, v_{2i-1}\}; C_3 = \{u_{2i+1}, v_{2i}\}$; dan $C_4 = \{u_n\}$, untuk $i > 0$. Maka akan ada dua titik dengan kode warna yang sama yaitu $c_\Pi(u_2) = c_\Pi(v_1)$, maka kontradiksi. Dengan demikian, dibutuhkan sekurang-kurangnya 5 warna. Jadi $X_L(P_{n,1}) \geq 5$ untuk $(n \geq 4)$ genap.

Selanjutnya adalah menentukan batas atas dari $X_L(P_{n,1})$ untuk $(n \geq 4)$ genap, dengan memberikan titik-titik di $V(P_{n,1})$ sebagai berikut:

$C_1 = \{u_1\}; C_2 = \{u_{2j}, v_{2j-1}\}; C_3 = \{u_{2j+1}, v_{2j}\}; C_4 = \{v_4\}; C_5 = \{v_n\}$.

Sehingga kode warna dari setiap titik di G adalah sebagai berikut:

a) $c_\Pi(u_1) = (0,1,2,1,2)$.

b) $C_2 = \{u_{2j}, v_{2j-1}\}$. Misalkan u_i, $1 \leq i \leq n-2; i = 2j; 1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$ dan v_i, $1 \leq i \leq n-1; i = 2j-1; 1 \leq j \leq \frac{n}{2}$.

Untuk $i \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, $c_\Pi(u_i) = (i-1, 0, 1, i, i+1)$ dan $c_\Pi(v_i) = (i, 0, 1, i+1, i)$.

Untuk $i > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, $c_\Pi(u_i) = c_\Pi(u_{n-2j}) = (2j+1, 0, 1, 2j, 2j+1)$ dan

$$c_\Pi(v_i) = c_\Pi(v_{n-2j+1}) = (2j+1, 0, 1, 2j, 2j-1).$$

c) $C_3 = \{u_{2j+1}, v_{2j}\}$. Misalkan u_i, $1 \leq i \leq n-1; i = 2j+1; 1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$ dan v_i, $1 \leq i \leq n-2; i = 2j; 1 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$.

Untuk $i \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, $c_\Pi(u_i) = (i-1, 1, 0, i, i+1)$ dan $c_\Pi(v_i) = (i, 1, 0, i+1, i)$.

Untuk $i > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, $c_\Pi(u_i) = c_\Pi(u_{n-2j+1}) = (2j, 1, 0, 2j-1, 2j)$ dan

$$c_\Pi(v_i) = c_\Pi(v_{n-2j}) = (2j+2, 1, 0, 2j+1, 2j).$$

d) $C_4 = \{u_n\}$, maka $c_\Pi(u_n) = (1,2,1,0,1)$

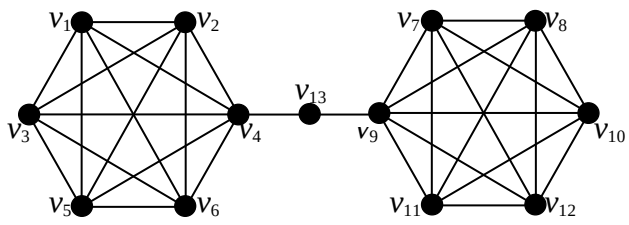
e) $c_\Pi(v_n) = (2,1,2,1,0)$.

Karena kode warna dari setiap titik di $V(P_{n,1})$ berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi dari graf Petersan ($P_{n,1}$) untuk ($n \geq 4$) genap. Jadi, $X_L(P_{n,1}) \leq 5$ untuk ($n \geq 4$) genap (Asmiati, dkk., 2017).

2.4 Graf Subdivisi

Graf subdivisi $S(G)$ adalah graf yang diperoleh dari graf G dengan memasukkan titik tambahan ke beberapa sisi di graf G, atau dengan kata lain graf subdivisi

$S(G)$ adalah graf yang diperoleh dari graf G dengan menyisipkan beberapa titik pada beberapa sisi di graf G.



Gambar 8. Contoh graf barbel ($B_{6,6}$) yang disubdivisi satu titik.

Pada Gambar 8, graf tersebut telah disubdivisi satu titik pada jembatan/sisi yang menghubungkan dua graf lengkap (K_6), yang dinotasikan dengan ($B_{6,6}^{*1}$) (Mirajkar, dkk., 2016).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini akan dilaksanakan pada semester ganjil tahun akademik 2017/2018 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel yang disubdivisi pada sisi yang menghubungkan dua graf lengkap yang seragam, untuk $n \geq 3$ sesuai dengan teorema yang berlaku.
2. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel yang disubdivisi pada sisi yang menghubungkan dua graf lengkap yang tak seragam, untuk $n \geq 3$.
3. Mengganti graf lengkap yang ada pada graf barbel dengan graf Petersen ($P_{n,1}$) dan kemudian menentukan bilangan kromatik lokasinya, untuk $n \geq 3$.
4. Menambahkan titik sebanyak s pada sisi yang menghubungkan dua graf Petersen ($P_{n,1}$) dan menentukan bilangan kromatik lokasinya, untuk $n \geq 3$.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Bilangan Kromatik Lokasi graf Barbel ($B_{n,n}$) yang disubdivisi sebanyak s titik adalah $X_L\left(B_{n,n}^{*s}\right) = n + 1$, untuk $n \geq 3$ dan $s \geq 1$.
2. Bilangan Kromatik Lokasi graf Barbel ($B_{n,m}$) yang disubdivisi sebanyak s titik adalah $X_L\left(B_{n,m}^{*s}\right) = maks\{n, m\}$, untuk $n, m \geq 3, n \neq m$, dan $s \geq 1$.
3. Bilangan Kromatik Lokasi graf Barbel ($B_{P_{n,1}}$) adalah $X_L\left(B_{P_{n,1}}\right) = 4$ untuk n ganjil atau 5 untuk n genap, dengan $n \geq 3$.
4. Bilangan Kromatik Lokasi graf Barbel ($B_{P_{n,1}}$) yang disubdivisi sebanyak s titik adalah $X_L\left(B_{P_{n,1}}^{*s}\right) = 4$ untuk n ganjil atau 5 untuk n genap, dengan $n \geq 3$ dan $s \geq 1$.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati, Wamiliana, Devriyadi, dan Yulianti, L. 2017. On Some Petersen Graphs Having Locating-Chromatic Number Four or Five. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*. **102**(4):769-778.

Asmiati. 2014. The Locating-Chromatic Number of Non-Homogeneous Amalgamation of Stars. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*. **93**(1):89-96.

Asmiati, Assiyatun, H., dan Baskoro, E.T. 2011. Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars. *ITB J. Sci*. **43**(1):1-8.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., dan Zhang, P. 2002. The Locating-Chromatic Number of a Graph. *Bull. Inst. Combin. Appl*. **36**:89-101.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi.

Ihwan, M.D., Rahmawati, A., dan Sumargono. 2014. Kajian Bilangan Clique Graf Gear G_n dan Graf Barbel B_n. *Jurnal Gagasan Matematika dan Informatika*. **5**(1):39-50.

Mirajkar, K.G., Doddamani, B.R., dan Priyanka, Y.B. 2016. The Reformulated First Zagreb Index of the Line Graphs of the Subdivision Graph for Class of Graphs. *International Journal of Engineering Sciences and Research Technology*. **5**(10):144-149.

Mubarak, D. 2017. Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel. (Skripsi). Universitas Lampung. Bandar Lampung.