REPRESENTASI OPERATOR LINEAR

DARI RUANG BARISAN ℓ_3KE RUANG BARISAN $\ell_{3/2}$

(Skripsi)

Oleh

RISKY AULIA ULFA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2018

ABSTRACT

REPRESENTATION OF LINEAR OPERATOR FROM FINITE SEQUENCE SPACE $\boldsymbol{\ell_3}$ TOSEQUENCE SPACE $\boldsymbol{\ell_{3/2}}$

by

Risky Aulia Ulfa

Themapping of vector space, especially on norm space is called operator. One of the cases about the operator, in case of linear operator, is the operator which works on sequence space. There are many cases in the linear operator from one sequence space to another which can be represented by infinite matrices. The infinite matrices are the matrices which sized infinite times infinite. for A $:\ell_3 \to \ell_{3/2}$,where $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$, $\ell_3 = \left\{x = (x_i) \,\middle|\, (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^3)^{\frac{1}{3}} < \infty\right\}$, and $\ell_{3/2} = \left\{x = (x_i) \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} < \infty\right\}$ is a sequence real numbers. Furthermore, it can be constructed an operator A from finite sequence space ℓ_3 to sequence space $\ell_{3/2}$ by using a standard basis (e_k) and it can be proven that the collection all the operators become Banach space.

Key Words : *Operator, Finite Sequence Space*

ABSTRAK

REPRESENTASI OPERATOR LINIER DARI RUANG BARISAN $\boldsymbol{\ell_3}$ KE RUANG BARISAN $\boldsymbol{\ell_{3/2}}$

Oleh

Risky Aulia Ulfa

Suatu pemetaan pada ruang vector khususnya ruang bernorma disebut operator. Salah satu kajian tentang operator, dalam hal ini operator linear, merupakan suatu operator yang bekerja pada ruang barisan. Banyak kasus pada operator linear dari ruang barisan ke ruang barisan dapat diwakili oleh suatu matriks tak hingga. Matriks tak hingga yaitu suatu matriks yang berukuran takhingga kali takhingga. Sebagai contoh, suatu matriks $A : \ell_3 \to \ell_{3/2}$,dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$, $\ell_3 = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^3)^{\frac{1}{3}} < \infty \right\}$, dan $\ell_{3/2} = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} < \infty \right\}$ merupakan barisan bilangan real. Selanjutnya dikontruksikan operator A dari ruang barisan ℓ_3 ke ruang barisan $\ell_{3/2}$ dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = \left(0,0,\ldots,1_{(k)},\ldots\right)$ dan ditunjukkan bahwa koleksi semua operator membentuk ruang banach.

Kata Kunci :*Operator, Ruang Barisan Terbatas*

REPRESENTASI OPERATOR LINIER DARI RUANG BARISAN TERBATAS ℓ_3 KE RUANG BARISAN $\ell_{3/2}$

Oleh

RISKY AULIA ULFA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **REPRESENTASI OPERATOR LINIER DARI RUANG BARISAN ℓ_3 KE RUANG BARISAN $\ell_{3/2}$**

Nama Mahasiswa : *Risky Aulia Ulfa*

Nomor Pokok Mahasiswa : 1417031102

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.	**Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.**
NIP 19720227 199802 1 001	NIP 19620513 198603 1 003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **18 Januari 2018**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Risky Aulia Ulfa**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1417031102**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Representasi Operator Linier Dari Ruang Barisan ℓ_3 Ke Ruang Barisan $\ell_{3/2}$**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Dan Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar lampung, Januari 2018

Yang Menyatakan,

METERAI TEMPEL 798C7AEF764023955 6000 ENAM RIBU RUPIAH

Risky Aulia Ulfa

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Risky Aulia Ulfa, putri sulung dari Bapak Hasanuddin dan Ibu Nurhasanah serta kakak dari Ananda muhammad Fathurrahman dan Maulida Salsabila. Penulis lahir di Teluk Betung, pada tanggal 27 Januari 1996.

Penulis menempuh pendidikan pertama di TK. Bumi Dipasena Mulya Rawajitu dari tahun 2000 – 2002. Kemudian penulis menempuh pendidikan Sekolah Dasar di SDN 01 Bumi Dipasena Mulya pada tahun 2002 – 2004 dan melanjutkan di SDN 1 Sukamaju dan lulus pada tahun 2008. Kemudian menempuh Sekolah Menengah Pertama di SMPN 3 Bandar Lampung pada tahun 2008 dan lulus pada tahun 2011. Penulis melanjutkan pendidikannya di SMAN 8 Bandar Lampung pada tahun 2011 dan lulus pada tahun 2014.

Pada tahun 2014, penulis diterima di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SBMPTN.
Pada awal tahun 2017, sebagai salah satu bentuk pengabdian kepada masyarakat penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) periode I (19 Januari – 28 Februari 2017) di Desa Haji Pemanggilan Kecamatan Anak Tuha Kabupaten Lampung Tengah Provinsi Lampung.

Kemudian untuk mengaplikasikan ilmu yang diperoleh dalam bidang kerja, penulis melakukan Kerja Praktik (KP) dari tanggal 17 Juli – 25 Agustus 2017 di Kantor Wilayah Direkotrat Jenderal Pajak Bengkulu dan Lampung yang ditempatkan di Bidang Keberatan, Banding dan Pengurangan (KBP).

Kata Inspirasi

Sesungguhnya shalatku, ibadahku, hidupku dan matiku hanya untuk Allah, Tuhan semesta alam

(Qs. Al – an'aam : 142)

Barangsiapa ditanya tentang suatu ilmu, kemudian ia menyembunyikannya maka kelak ia akan dibumgkam mulutnya dengan api neraka

(HR. Abu Dawud, At-Tirmizi, Ibnu Majah, Ibnu Hibban, Al-Baihaqi dan Al-hakim)

Orang yang paling aku sukai adalah dia yang menunjukkan kesalahanku

(Umar Bin Khattab)

Some Beautiful paths can't be discovered without getting lost

(Erol Ozan)

Jadilah seperti lentera, bukan seperti lilin

(Hasanuddin)

Berjalan tertatih dengan anak tangga

(Risky Aulia Ulfa)

Dengan mengucapkan Alhamdulillahirabbil'alamin,

Puji dan Syukur kita panjatkan atas kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala atas limpahan rahmat dan karunia-Nya, dan tidak lupa pula shalawat teriring salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad Sallallahu 'Alaihi Wasallam beserta keluarga dan para sahabatnya

Kupersembahkan sebuah karya sederhana ini untuk :

Ayahanda dan Ibunda

Tidak ada kata yang mampu kakak ucapkan selain terimakasih sebesar-besarnya untuk ayah dan ibu atas semua yang telah kalian lakukan untuk kakak. Do'a yang tak henti-hentinya ayah dan Ibu panjatkan, kasih sayang yang tak terhitung serta waktu dan pengorbanan yang diberikan untuk mengiringi setiap langkah kakak.

Adikku Ananda dan Salsabila

Terimakasih selama ini telah mengajari kakak banyak hal terutama kesabaran, do'akan semoga kakak bisa menjadi sosok kakak yang dapat menjadi panutan buat adik-adik kakak.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih selama ini telah memberi motivasi, semangat, nasihat dan berbagai pengalaman denganku. Semoga kelak kita menjadi orang-orang yang sukses.

SANWACANA

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT karena atas limpahan karunia serta ridho-Nya sehingga skripsi dengan judul **"Representasi Operator Linier Dari Ruang Barisan Terbatas $\boldsymbol{\ell_3}$ Ke Ruang Barisan $\boldsymbol{\ell_{3/2}}$"** dapat terselesaikan. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada suri tauladan kita Nabi Muhammad SAW. Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis menyadari banyaknya bimbingan, bantuan, dan dukungan berbagai pihak.Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si.,M.Si., selaku pembimbing I yang senantiasa membimbing dan memotivasi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Drs. Suharsono S., M.S., M.Sc., Ph.D., selaku pembimbing II yang selalu memberikan dukungan dan arahan kepada penulis.
3. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., selaku penguji yang telah memberikan saran dan semangat sehingga terselesainya skripsi ini.
4. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si., selaku Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis.
5. Ibu Dra. Wamiliana, M.A, Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
6. Bapak Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

7. Seluruh Dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
8. Ayah, Ibu, bang Nanda dan adek Salsa yang tidak pernah lelah mendo'akan, mendukung dan memberi perhatian kepada penulis.
9. Teman-teman seperjuanganku adek Indah, uni Mona, mbak Reka, Linda serta mbak Fietra yang tidak pernah lelah memberikan semangat dan bantuan kepada penulis.
10. Sahabat-sahabatku bang Reza, Ika, Abiyya, Kurnia, Cuah, Desi, Rizka, Arum, Atika, Fatme, Ameng, Gani dan teman-teman IPA 2 yang selalu memberikan dukungan dan semangat kepada penulis.
11. Teman-teman seperjuangan KKN ku Anis, Uun, Mbak Rini, Panji, Hapid dan kak Galih yang selalu mengingatkan penulis untuk menyelesaikan skripsi.
12. Teman-teman satu bimbingan Yona, Nanda, Kiki dan Darma yang telah banyak membantu.
13. Teman-teman Matematika 2014 yang telah memberikan pengalaman luar biasa selama ini.
14. Keluarga besar HIMATIKA FMIPA UNILA.
15. Dan semua pihak yang terlibat dalam menyelesaikan skripsi ini.

Bandar Lampung, Januari 2018

Penulis

Risky Aulia Ulfa

DAFTAR ISI

Halaman

I. PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Tujuan 2
1.3 Manfaat 3

II. TINJAUAN PUSTAKA
2.1. Operator 4
2.2. Barisan 12
2.3. Ruang Vektor 20
2.4. Basis 21
2.5. Ruang Metrik 22
2.6. Ruang Bernorm 24
2.7. Ruang Banach 27

III. METODOLOGI PENELITIAN
3.1. Waktu dan Tempat Penelitian 28
3.2. Metode Penelitian 28

IV. HASIL DAN PEMBAHASN
Definisi 4.1 31
Teorema 4.2 32
Akibat 4.3 36
Teorema 4.4 36
Contoh 4.5 38

V. KESIMPULAN
DAFTAR PUSTAKA

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Salah satu kajian tentang operator, dalam hal ini operator linear, merupakan suatu operator yang bekerja pada ruang barisan. Banyak kasus pada operator linear dari ruang barisan ke ruang barisan dapat diwakili oleh suatu matriks tak hingga. Matriks tak hingga yaitu suatu matriks berukuran tak hingga kali tak hingga.

Barisan bilangan real adalah suatu fungsi bernilai real yang didefinisikan pada himpunan $\mathbb{N}$ = {0,1,2,...}. Dengan kata lain, barisan bilangan real adalah suatu fungsi x: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dalam hal ini dapat ditulis dengan $x = (x_i)$. Bentuk dari ruang barisan klasik terdiri dari ruang barisan konvergen (c), ruang barisan yang konvergen ke 0 (c_0), dan ruang barisan terbatas (ℓ_p). Untuk setiap bilangan *real p* dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$\ell_p = \left\{ x \in \{x_j\} \in \omega : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}$$

Sebagai contoh, suatu matriks $A : \ell_3 \to \ell_{3/2}$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ dan

$$\ell_3 \quad = \left\{ x = (x_i) \,\middle|\, (\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^3)^{\frac{1}{3}} < \infty \right\}$$

$$\ell_{3/2} = \left\{ x = (x_i) \;\middle|\; \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} < \infty \right\}$$ merupakan barisan bilangan real.

Jika $x = (x_i) \in \ell_3$ maka

$$A(x) = Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}x_j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Sehingga timbul suatu permasalahan, syarat apa yang harus dipenuhi supaya $A(x) \in \ell_{3/2}$. Oleh karena itu, penelitian akan difokuskan pada permasalahan tersebut.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini diantaranya :

1. Mempelajari sifat-sifat operator linear yang bekerja dari ruang barisan ℓ_3 ke ruang barisan $\ell_{3/2}$.
2. Mencari representasi operator linear dari ruang barisan ℓ_3 ke ruang barisan $\ell_{3/2}$.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat Penelitian tentang representasi operator linear dari ruang barisan ℓ_3 ke ruang barisan $\ell_{3/2}$ antara lain :

1. Memahami sifat dari operator linear dari ruang barisan ℓ_3 ke ruang barisan $\ell_{3/2}$.
2. Mengetahui representasi operator linear dari ruang barisan ℓ_3 ke ruang barisan $\ell_{3/2}$.
3. Dapat memberi ide bagi penulis lain yang ingin meneliti lebih lanjut tentang operator.

II. TINJAUAN PUSATAKA

2.1 Operator

Definisi 2.1.1

Suatu pemetaan pada ruang vektor khususnya ruang bernorma disebut operator (Kreyszig, 1989).

Definisi 2.1.2

Diberikan ruang Bernorm X dan Y atas lapangan yang sama.

a. Pemetaan dari X dan Y disebut operator.
b. Operator $A : X \rightarrow Y$ dikatakan linear jika untuk setiap $x, y \in X$ dan setiap skalar α berlaku $A(\alpha x) = \alpha Ax$ dan $A(x + y) = Ax + Ay$ (Kreyszig, 1989).

Definisi 2.1.3

Diberikan $(X, \|.\|)$ dan $(Y, \|.\|)$ masing-masing ruang bernorm.

a. Operaror $A : X \rightarrow Y$ dikatakan terbatas jika ada bilangan $M \in R$ dengan $M \geq 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$ berlaku $\|Ax\| \leq M\|x\|$.
b. Operator A dikatakan kontinu di $x \in X$ jika diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $y \in X$ dengan $\|x - y\| \leq \delta$ berlaku $\|Ax - Ay\| \leq \varepsilon$.

c. Jika A kontinu di setiap x $\in$ X, A disebut kontinu pada X (Kreyszig, 1989).

Teorema 2.1.4

Jika X dan Y masing-masing ruang Bernorm atas lapangan yang sama maka ℓ_c(X, Y) merupakan ruang *linear*.

Bukti :

Diambil sebarang $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \ell_c(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ dan sebarang α, β, a, b untuk setiap $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{X}$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
(\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B})(\mathrm{ax} + \mathrm{by}) &= \alpha\mathrm{A}(\mathrm{ax} + \mathrm{by}) + \beta\mathrm{B}(\mathrm{ax} + \mathrm{by}) \\
&= \alpha\mathrm{Aax} + \alpha\mathrm{Aby} + \beta\mathrm{Bax} + \beta\mathrm{Bby} \\
&= \alpha aAx\ \alpha bAy + \beta aBx + \beta bBy \\
&= \alpha aAx + a\beta Bx + b\alpha Ay + b\beta By \\
&= \mathrm{a}(\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B})\mathrm{x} + \mathrm{b}(\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B})\mathrm{y}
\end{aligned}
$$

Jadi, $(\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B})$ merupakan operator linear.

Karena A dan B terbatas maka ada bilangan real $M_1, M_2 \geq 0$ sehingga,

$$
\begin{aligned}
\|(\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B})\mathrm{x}\| &= \|\alpha\mathrm{Ax} + \beta\mathrm{Bx}\| \\
&\leq \|\alpha\mathrm{Ax}\| + \|\beta\mathrm{Bx}\| \\
&= |\alpha|\|Ax\| + |\beta|\|Bx\| \\
&\leq |\alpha|M_1\|x\| + |\beta|M_2\|x\|
\end{aligned}
$$

$= (|\alpha|M_1 + |\beta|M_2)\|x\|$

Dengan demikian, $\alpha A + \beta B$ terbatas (kontinu).

Jadi $A, B \in \ell_c(X, Y)$

Telah dibuktikan bahwa untuk setiap $A, B \in \ell_c(X, Y)$ dan sebarang skalar α, β berlaku $A, B \in \ell_c(X, Y)$. Jadi $\ell_c(X, Y)$ linear (Ruckle, 1991).

Teorema 2.1.5

Jika Y ruang Banach maka $\ell_c(X, Y)$ $\|.\|)$ ruang Banach.

Bukti :

Diambil sebarang barisan Cauchy $\{A_i\} \subset \ell_c(X, Y)$, $\|.\|)$.

Jadi untuk setiap bilangan ε_0 terdapat $n_0 \in N$ sehingga jika $m, n \in N$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku $\|A_m - A_n\| < \varepsilon_0$.

Misal, untuk setiap $x \in X$ dan $m, n \geq n_0$ diperoleh

$\|A_m x - A_n x\| = \|(A_m - A_n)x\|$

$\leq \|A_m - A_n\|\|x\| < \varepsilon_0\|x\|$

Jelas untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (dapat dipilh bilangan $\varepsilon_0 > 0$ sehingga $\varepsilon_0 \| x \| < \varepsilon$ ada $n_0 \in N$ sehingga untuk setiap $m, n \in N$ dengan $m, n \geq n_0$ berlaku $\|A_m x - A_n x\| < \varepsilon_0\|x\| < \varepsilon$.

Dengan demikian diperoleh barisan Cauchy $\{A_i x\} \subset Y$ dan Y lengkap, dengan kata lain $\{A_i x\}$ konvergen ke $y_x \in Y$.

Jadi, $\lim_{n\to\infty} A_n x = y_x$ dan x menentukan suatu operator A sehingga $A_x = y_x$.

Proses di atas dapat diulang untuk $z \in X$ tetap, dengan $z \neq x$. Jadi diperoleh $\lim_{n\to\infty} A_n z = y_z$ dan z menentukan suatu operator A sehingga $A_z = y_z$.

Untuk setiap skalar *a* dan *b*, diperoleh $ax + bz \in X$,

$\lim_{n\to\infty} A_n(ax + bz) = y_{ax+bz}$ dan $ax + bz$ menentukan suatu operator A sehingga $A_n(ax + bz) = y_{ax+bz}$.

Jadi $A(ax + bz) = lim_{n\to\infty} A_n(ax + bz)$

$$= \lim_{n\to\infty}(aA_n x + bA_n z)$$

$$= \lim_{n\to\infty} aA_n x + \lim_{n\to\infty} bA_n z$$

$$= a\lim_{n\to\infty} A_n x + b\lim_{n\to\infty} A_n z$$

$$= ay_x + by_z$$

$$= aAx + bAz$$

Jadi operator A bersifat linear.

Untuk $n \to \infty$ diperoleh

$\|(A_m - A_n)x\| = \|A_m x - Ax\|$

$$= \|(A_m x - Ax)\|$$

$$= \|(A_m - A)x\| < \varepsilon_0\|x\|$$

Jadi operator $(A_m - A)$ dengan $m \geq n_0$ bersifat linear terbatas.

Karena A_m dan $A_m - A$ masing-masing terbatas, serta $A = A_m - (A_m - A)$ maka A terbatas (kontinu).

Jadi $A \in \ell_c(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\,, \|.\|)$ dengan kata lain $\ell_c(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\,, \|.\|)$ ruang Banach (Maddox, 1970).

Definisi 2.1.6

Diberikan ruang Bernorm X dengan lapangan $\mathbb{R}$.

a. Pemetaan $f: X \to \mathbb{R}$ disebut fungsi.
b. Himpunan semua fungsi *linear* kontinu pada X disebut ruang dual X, biasanya ditulis $X^* \in l_c(X, Y)$ (Kreyszig, 1989).

Teorema 2.1.7

Misal X dan Y ruang BK (Banach lengkap). Jika A matriks tak hingga yang memetakan X ke Y maka A kontinu.

Bukti :

Misal A = (a_{ij})

X = $\left(x_j\right) \in X$

y = $(y_i) \in Y$ dapat dinyatakan

$$y_i = \sum_{j=i}^{\infty} a_{ij} x_j$$

Mendefinisikan suatu fungsi linear kontinu pada X. Jelas bahwa untuk setiap :

$$f_m(x) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j$$

Misal $s = (s_j)$, $t = (t_j)$ dan $\alpha \in R$

$$f_m(s) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}s_j \qquad f_m(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}t_j$$

$$(i)\ f_m(s) + f_m(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}s_j + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}t_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (a_{ij}s_j + a_{ij}t_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(s_j + t_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(s + t)_j$$

$$= f_m(s + t)$$

$$(ii)(f_m)(ax) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(a_{xj})$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a\left(a_{ij}x_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j$$

$$= a(f_m(x))$$

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti f_m merupakan fungsi linear pada X.

Selanjutnya akan ditunjukkan f_m kontinu pada X.

Hal ini sama saja membuktikan f_m terbatas pada X.

Diketahui X ruang BK maka terdapat M > 0 sehingga $|P(x)| = |x_k| \leq M$

Oleh karena itu :

$$|f_m(x)| = \left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}||x_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|M$$

Berdasarkan pembuktian di atas, f_m mendefinisikan fungsi linear kontinu pada *x*

$$f_m(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$$

Maka *f* juga kontinu pada *x*.

Karena *y* ruang BK diperoleh

$$y_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j^{(n)}$$

Atau

$$Ax^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{2} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} x_j^{(n)} \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} x_j^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$y_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j^{(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} f\left(x^{(n)}\right)$$

$$= f(x)$$

$$A(x)_i \ , \forall_i$$

Jika $y = Ax$ maka bukti lengkap (Ruckle, 1991).

Definisi 2.1.8

a. Matriks takhingga $A = (a_{ij})$ adalah matriks dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$ dan elemen pada baris dan kolom sebanyak takhingga (Berberian, 1996).
b. Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ masing-masing matriks takhingga dan α skalar maka $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right), \alpha A = \left(\alpha a_{ij}\right)$, dan $AB = (\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj})$ dengan $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj} \in R$, (Cooke, 1955).

Definisi 2.1.9

Diketahui suatu operator $T \in B(H_1, H_2)$ maka $T^* \in B(H_1, H_2)$ disebut operator adjoint operator T jika untuk setiap $x \in H_1$ dan $y \in H_2$ berlaku $(Tx, y) = (x, T^* y)$ (Fuhrmann,1987).

2.2 Barisan

Definisi 2.2.1

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan bulat positif. Misal terdapat bilangan bulat positif 1, 2, 3,...,n,... yang bersesuaian dengan bilangan real x_n tertentu, maka x_1, x_2,...,x_n,... dikatakan barisan (Mizrahi dan Sulivan, 1982).

Definisi 2.2.2

Bilangan-bilangan $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ disebut barisan bilangan tak hingga dan c_n disebut suku umum dari barisan. Bilangan n, (n = 1, 2, 3,...) adalah nomor urut atau indeks yang menunjukkan letak bilangan tersebut dalam barisan (Yahya, Suryadi, Agus, 1990).

Definisi 2.2.3

Barisan bilangan real adalah suatu fungsi bernilai real yang didefinisikan pada himpunan $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$. Dengan kata lain, barisan bilangan real adalah suatu fungsi $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan aturan $k \rightarrow x(k)$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, dalam hal ini dapat ditulis $x(k) = x_k$. Pada barisan $x = x(k)$, bilangan real x_k disebut suku ke-k dari barisan $x = x(k)$.

Suatu barisan yang ditulis dengan notasi $e^{[n]} = \left(e_k{}^{[n]}\right)^{\infty}{}_{k=0}$ untuk $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan sebagai barisan dengan entrinya bernilai 1 hanya pada suku ke-n dan yang lain bernilai 0, yaitu

$$e_k{}^{[n]} = \begin{cases} 1, & untuk\ k = n \\ 0, & untuk\ k \neq n \end{cases}$$

Dengan kata lain, $e^{[n]} = (0,\cdots,0,1,0,\cdots)$ dengan entri 1 berada pada posisi ke-n. Koleksi semua barisan dinotasikan dengan ω; yaitu ω = $\{x = (x_k) : x_k \in \mathbb{R}, \forall\ k \in \mathbb{N}\}$. Sebarang ruang linier bagian dari ω disebut ruang barisan. Ruang-ruang barisan berikut yang ditulis dengan notasi c, c_0 dan l_∞ masing - masing disebut ruang barisan konvergen, ruang barisan konvergen ke nol, dan ruang barisan terbatas, yaitu

$c = \{x = (x_k) \in \omega : (\exists\ l \in \mathbb{R})\ x_k \rightarrow l\}$,

$c_0 = \{x = (x_k) \in \omega : x_k \rightarrow 0\}$, dan

$l_0 = \{x = (x_k) \in \omega : \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_k| < \propto \}$

Selanjutnya, ruang barisan dengan deret mutlak-p konvergen untuk $1 \leq p < \infty$ ditulis dengan notasi l_p yaitu;

$l^p = \{x \in \{x_k\} \in \omega : \sum_{i=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}$.

Ruang-ruang barisan yang dinotasikan tersebut di atas merupakan salah satu bentuk ruang barisan klasik.

Ruang barisan X dikatakan ruang *Banach* jika X merupakan ruang bernorma dan untuk setiap barisan *Cauchy* di dalamnya dapat diperoleh nilai kekonvergenannya. Ruang barisan X disebut ruang *BK (Banach Kantorovich)* jika X merupakan ruang Banach dan fungsi koordinat p_i: X $\rightarrow \mathbb{R}$ dengan aturan $x \rightarrow p_k(x) = xk$ kontinu pada X untuk semua $x = (x_k) \in$ X dan setiap $k \in \mathbb{N}$. Ruang barisan c, c_0 dan l_∞ yang diberikan di atas masing-masing merupakan ruang *BK* terhadap norma supremum $\|.\|_\infty$, yaitu

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|.$$

Adapun ruang barisan p dengan $1 \leq p < \infty$ merupakan ruang *BK* terhadap norma $\|.\|_p$; yaitu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

untuk setiap $x = (x_k) \in l_p$ (Kamthan dan Gupta, 1981).

Definisi 2.2.4

Misal L adalah suatu bilangan real dan $\{x_n\}$ suatu barisan, $\{x_n\}$ konvergen ke L jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan asli N, sehingga $|x_n - L| < \varepsilon$ untuk setiap $n > N$.

Suatu bilangan L dikatakan limit dari suatu barisan takhingga $x_1, x_2, \ldots$ jika ada bilangan real positif ε sehingga dapat ditemukan bilangan asli N yang tergantung pada ε sehingga $|x_n - L| < \varepsilon$ untuk setiap $n > N$, daan suatu barisan dikatakan konvergen jika ia mempunyai nilai limit (Mizrahi dan Sulivan, 1982).

Teorema 2.2.5

Setiap barisan bilangan real yang konvergen selalu terbatas.

Bukti :

Misalkan barisan bilangan real $\{a_n\}$ konvergen ke a, akan ditunjukkan terdapat suatu bilangan real $M > 0$ sehinga $|a_n| \leq M$ untuk setiap $n \in N$. Karena $\{a_n\}$ konvergen ke a, maka terapat suatu $n_0 \in N$ sehingga $n > n_0 \Longrightarrow |a_n - a| < 1$. Akibatnya $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ untuk setiap $n > n_0$.

Ambillah $M = maks\left(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|, |a| + 1\right)$, maka setiap $n \in M$ berlaku $|a_n| \leq M$, yang berarti bahwa barisan bilangan real $\{a_n\}$ terbatas (Martono, 1984).

Definisi 2.2.6

Suatu barisan $x = (x_n)$ dikatakan terbatas jika dan hanya jika terdapat suatu bilangan $M \geq 0$ sehingga $|x_n| \leq M \; \forall n \in N$. Himpunan dari semua barisan terbatas dilambangkan dengan l_∞ (Maddox, 1970).

Definisi 2.2.7

Suatu barisan $\{x_n\}$ dikatakan mempunyai limit L bila untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dapat dicari suatu nomor indeks n_0 sedemikian sehingga untuk $n \geq n_0$ berlaku $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$ (atau $|x_n - L| < \varepsilon$) artinya jika L adalah limit dari $\{x_n\}$ maka x_n mendekati L jika n mendekati tak hingga (Yahya, Suryadi, Agus, 1990).

Definisi 2.2.8

Suatu barisan yang mempunyai limit dinamakan barisan konvergen dan barisan yang tak konvergen dinamakan barisan divergen (Martono, 1984).

Definisi 2.2.9

Diberikan ω yaitu koleksi semua barisan bilangan *real*, jadi :

$$\omega = \{\bar{x} = \{x_k\} : x_k \in \mathbb{R}\}$$

a. Untuk setiap bilangan *real p* dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan

$$l^p = \left\{x \in \{x_j\} \in \omega : \sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right|^p < \infty\right\}$$

dan norm pada l^p yaitu

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

b. Untuk $p = \infty$ didefinisikan

$$l_\infty = \left\{\bar{x} = \{x_k\} \in \omega : \sup_{k \geq 1} |x_k| < \infty\right\}$$

dan norm pada l_∞ yaitu

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x_k|$$

(Darmawijaya, 2007).

Definisi 2.2.10

Misal $p, q \in (1, \infty)$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q konjugat p), untuk $x \in l^p$ dan $y \in l^p$

$$\left(x_j y_j\right)_{j \in N} \in l^\infty \text{ dan } \sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j y_j\right| \leq \|x\|^p \|y\|^q$$

(Darmawijaya, 2007).

Teorema 2.2.11

$l^p (1 \leq p \leq \infty)$ merupakan ruang bernorma terhadap norm $\|.\|_p$.

Bukti :

a) Akan dibuktikan bahwa l^∞ merupakan ruang bernorm terhadap $\|.\|_\infty$. Untuk setiap skalar α dan $\bar{x} = \{x_k\}, \{y_k\} \in l^\infty$ diperoleh

i) $\|\tilde{x}\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x_k| \geq 0$ karena $|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$$\|\tilde{x}\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x_k| = 0 \Leftrightarrow |x_k| = 0 \text{ untuk setiap } k \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$$

ii) $\|\alpha\tilde{x}\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |\alpha x_k| . \sup_{k \geq 1} |x_k| = \alpha \|x\|_\infty$.

karena $\sup_{k \geq 1} |x_k| < \infty$ maka $\|\alpha\tilde{x}\|_\infty = \alpha \|x\|_\infty < \infty$ atau $\alpha\tilde{x} \in l^\infty$

iii) $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_\infty \leq \|\tilde{x}\|_\infty + \|\tilde{y}\|_\infty$ dan $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_\infty \leq \infty$ yaitu $\tilde{x} + \tilde{y} \in l^\infty$

berdasarkan i), ii) dan iii) terbukti bahwa l^∞ merupakan ruang linear dan $\|.\|_\infty$ norm pada l^∞. Dengan kata lain $(l^\infty, \|.\|_\infty)$ ruang bernorma.

b) Untuk $1 \leq p < \infty$ diambil sebarang $\tilde{x} = \{x_k\}, \tilde{y} = \{y_k\} \in l^p$ dan skalar α.

Diperoleh :

iv) $\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \geq 0$ karena $|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$$\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |x_k| \geq 0 \text{ untuk setiap } k \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$$

v) $\|\alpha\tilde{x}\|_\mathrm{p} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|x\|_p$

jelas bahwa $\|\alpha x\|_\infty < \infty$

vi) $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$

Berdasarkan iv), v) dan vi) terbukti bahwa l^p merupakan ruang linear dan $\|.\|_p$ norm pada l^p. Dengan kata lain $\left(l^p, \|.\|_p\right)$ ruang bernorm (Darmawijaya, 2007).

Teorema 2.2.12

Jika bilangan *real* p dengan $1 \leq p \leq \infty$, maka $\left(l^p, \|.\|_p\right)$ merupakan ruang Banach.

Bukti :

Telah dibuktikan bahwa $\left(l^p, \|.\|_p\right)$ merupakan ruang bernorm.

Jadi tinggal membuktikan bahwa ruang bernorm itu lengkap.

Dibuktikan dahulu untuk $1 \leq p \leq \infty$ diambil sebarang barisan Cauchy $\left\{\tilde{x}^{(n)}\right\} \subset l^p$ dengan

a) $\tilde{x}^{(n)} = \left\{\tilde{x}^{(n)}\right\} = \left(\tilde{x}_1{}^{(n)}, \tilde{x}_2{}^{(n)}, \tilde{x}_3{}^{(n)}, \dots\right)$

Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ berlaku.

b) $\left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\|_p < \frac{\varepsilon}{4}$ atau $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right|^p < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p$.

Hal ini berakibat untuk setiap dua bilangan asli $m, n > 0$ diperoleh $\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$ untuk setiap *k*. Dengan kata lain diperoleh barisan Cauchy $x_k^{(n)}$ untuk setiap *k*. Jadi terdapat bilangan x_k sehingga $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ atau $\lim_{n\to\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = 0$. Berdasarkan b) diperoleh untuk $n \geq n_0$ berlaku $\left|x_k^{(n)} - x_k\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Selanjutnya dibentuk barisan $\tilde{x} = \{x_k\}$. Menurut ketidaksamaan minkowski.

c) $\{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$

$$= \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Yang berarti $\tilde{x} = \{x_k\} \in l^p$. Berdasarkan pertidaksamaan a) diperoleh untuk $n \geq n_0$ berlaku.

d) $\left\|\tilde{x} - \tilde{x}^{(n)}\right\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} = \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4}$

Maka barisan $\left\{\tilde{x}^{(n)}\right\}$ konvergen ke $\tilde{x}$. Berdasarkan hasil c) dan d), terbukti bahwa barisan Cauchy $\left\{\tilde{x}^{(n)}\right\} \subset l^p$ konvergen ke $\tilde{x} = \{x_k\} \in l^p$ atau terbukti bahwa $(l^p, \|.\|_p)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ merupakan ruang banach (Darmawijaya, 2007).

Definisi 2.2.13

Misalkan X merupakan ruang barisan, X dikatakan ruang BK (banach lengkap) jika X merupakan ruang banach dan pemetaan koordinatnya $P_n(x) = x_n, x = (x_k) \in X$ kontinu.

Contoh ruang BK (banach lengkap) adalah ruang barisan l^p, $1 \leq p \leq \infty$ (Ruckle, 1991).

2.3 Ruang Vektor

Definisi 2.3.1

Ruang vektor adalah suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi dengan fungsi penjumlahan $(+): X \times X \to X$ dan fungsi perkalian skalar $(\cdot): F \times X \to X$ sehingga untuk setiap skalar λ, μ dengan elemen $x, y, z \in X$ berlaku :

i. $x + y = y + x$
ii. $(x + y) + z = x + (y + z)$
iii. ada $\theta \in X$ sehingga $x + \theta = x$
iv. ada $-x \in x$ sehingga $x + (-x) = \theta$
v. $1 \cdot x = x$
vi. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda x$
vii. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
viii. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (Maddox, 1970)

2.4 Basis

Definisi 2.4.1

Ruang vektor V dikatakan terbangkitkan secara hingga (*finitely generated*) jika ada vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sehingga $V = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. Dalam keadaan seperti itu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ disebut pembangkit (*generator*) ruang vektor *V*.

Menurut definisi di atas, ruang vektor V terbangkitkan secara hingga jika dan hanya jika ada vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sehingga untuk setiap vektor $x \in V$ ada skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

Secara umum, jika $B \subset V$ dan V terbangkitkan oleh B, jadi $|B| = V$ atau B pembangkit V, maka untuk setiap $x \in V$ terdapat vektor-vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ dan skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sehingga

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_n x_n$$

(Darmawijaya, 2007).

Definisi 2.4.2

Diberikan ruang vektor V. Himpunan $B \subset V$ dikatakan bebas linear jika setiap himpunan bagian hingga di dalam B bebas linear (Darmawijaya, 2007).

Definisi 2.4.3

Diberikan ruang vektor V atas lapangan $\mathscr{F}$. Himpunan $B \subset V$ disebut basis (*base*) V jika B bebas linear dan $|V| = B$.

Contoh :

Himpunan $\{\check{e}_1, \check{e}_2, \dots, \check{e}_n\}$, dengan $\tilde{e}_k$ vektor di dalam R^n yang komponen ke-k sama dengan 1 dan semua komponen lainnya sama dengan 0, merupakan basis ruang vektor R^n (Darmawijaya, 2007).

2.5 Ruang Metrik

Ruang metrik merupakan ruang abstrak, yaitu ruang yang dibangun oleh aksioma-aksioma tertentu. Ruang metrik merupakan hal yang fundamental dalam analisis fungsional, sebab memegang peranan yang sama dengan jarak pada *real line R.*

Definisi 2.5.1

Misal X adalah himpunan tak kosong, suatu metriks di X adalah suatu fungsi $d: X \times X \to [0, \infty)$, sehingga untuk setiap pasangan $(x, y) \in X \times X$ berlaku :

i. $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$
ii. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
iii. $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$ (sifat simetri)
iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$ (ketidaksamaan segitiga)

Selanjutnya pasangan (X, d) dengan d adalah metrik pada X disebut ruang metrik. Setiap anggota X disebut titik dan nilai *d(x,y)* disebut jarak(*distance)* dari titik *x* ke titik *y* atau jarak antara titik *x* dan titik *y* (Kreyszig, 1989).

Definisi 2.5.2

Suatu barisan (x_n) dalam ruang metrik (X, d) dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N = N(\epsilon)$ sehingga $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ untuk setiap $m, n > N$. Ruang X dikatakan X dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen (Kreyszig, 1989).

Definisi 2.5.3

Suatu ruang metrik (X, d) dikatakan lengkap jika dan hanya jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. Dengan kata lain jika $d(x_m, x_n) \to 0(m, n \to \infty)$ maka terdapat $x \in X$ seningga $d(x_m, x) \to 0(m \to \infty)$ (Maddox, 1970).

Definisi 2.5.4

Misal (X,d) adalah suatu ruang metrik. Suatu barisan $(x_n) \in X$ dikatakan konvergen jika terdapat suatu titik $x \in X$ sehingga $d(x_n, x) \to 0$ untuk $n \to \infty$ (yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0, d(x_n, x) < \varepsilon$). Titik x adalah unik sebab jika $d(x_n, x) \to 0$ maka $0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0$ menunjukkan bahwa $x = y$. Dapat dikatakan x_n konvergen ke limit x (dalam X) sehingga dapat ditulis $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ (Beberian, 1996).

Lemma 2.5.5

Jika X = (X,d) adalah ruang metrik, maka :

i. Suatu barisan konvergen di X adalah terbatas dan limitnya adalah unik.
ii. Jika $x_n \to x$ dan $y_n \to y$ di X, maka $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ (Kreyszig, 1989).

Teorema 2.5.6

Setiap barisan Cauchy adalah terbatas.

Bukti :

Jika $\{a_n\}$ barisan Cauchy maka untuk $\varepsilon = 1$ ada bilangan asli N sehingga $|a_m - a_n| < 1$ dimana $n, m > N$. Perhatikan bahwa untuk $n_0 > N$ maka $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ untuk setiap $n > N$. Jika $M = maks(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|, 1 + |a|)$ jelas $|a_n| \leq M$ untuk setiap bilangan asli N sehingga barisan $\{a_n\}$ terbatas (Parzynsky dan Zipse, 1987)**.**

2.6 Ruang Bernorma

Definisi 2.6.1

Diberikan ruang linear X. Fungsi $x \in X \to \|x\| \in R$ disebut norm vektor yang mempunyai sifat-sifat :

i. $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$

ii. $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)

iii. $\|\alpha x\| = \|\alpha\| \cdot \|x\|$ untuk setiap skalar α dan $x \in X$

iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

disebut norma (*norm*) pada X dan bilangan nonnegatif $\|x\|$ disebut norma vektor *x*. Ruang linear X yang dilengkapi dengan suatu norma $\|\cdot\|$ disebut ruang bernorma (*norm space*) dan dituliskan singkat dengan $X, \|\cdot\|$ atau X saja asalkan normanya telah diketahui (Darmawijaya, 1970).

Lemma 2.6.2

Dalam ruang linier bernorm X berlaku $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ untuk setiap $x, y \in X$.

Bukti :

untuk setiap $x, y \in X$ diperoleh :

$\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \leq \|x - y\| + \|y\| - \|y\| = \|x - y\|$ (Maddox, 1970).

Definisi 2.6.3

Norm Matriks Ruang matriks M_n adalah suatu ruang vektor berdimensi n^2. Dengan demikian sifat-sifat norm vektor di ruang berdimensi hingga tetap berlaku di sana. Perbedaannya, untuk sebarang A dan B di M_n kita dapat mengalikan keduanya yang menghasilkan matriks baru AB di M_n juga. Sangatlah wajar jika kita menginginkan suatu ukuran matriks yang memberikan hubungan antara ukuran ketiganya.

Definisi 2.6.4

Suatu fungsi $|||\bullet||| : M_n \rightarrow R$ disebut norm matriks jika untuk sebarang $A, B \epsilon M_n$ berlaku lima aksioma berikut:

i. $|||A||| \geq 0$

ii. $|||A||| = 0$, jika dan hanya jika $A = 0$

iii. $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot |||A|||$ untuk setiap skalar α

iv. $|||A + B||| \leq |||A||| + |||B|||$

v. $|||AB||| \leq |||A||| \ |||B|||$ (sub-multikatif)

Pada definisi di atas keempat sifat pertama tidak lain merupakan sifat-sifat norm vektor. Adapun sifat terakhir ditambahkan untuk menghubungkan “ukuran” matriks - matriks A, Bdan hasil perkalian keduanya yaitu matriksAB. Inilah yang membedakan norm matriks dengan norm vektor.

Disamping norm matriks natural di atas ada beberapa contoh norm matriks yang lain, diantaranya :

i. Norm jumlah kolom maksimum

$$|||A|||_1 \equiv \max_{1<j<n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

ii. Norm jumlah baris maksimum

$$|||A|||_\infty \equiv \max_{1<i<n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

iii. Norm Spektral

$$|||A|||_2 \equiv \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda \text{ nilai eigen dari } A^* \, A \}$$

iv. Norm Similaritas

Misalkan $|||\bullet|||$ suatu nomr M_n dan S matriks non-singular di M_n. Didefinisikan

$$|||A|||_S \equiv |||S^{-1}AS||| \text{ untuk semua } A \in M_n$$

Bukti :

Sifat (i) sampai sifat (iii) cukup mudah dibuktikan, adapun sifat (iv) adalah berdasarkan fakta :

$$|||AB|||_S \equiv |||S^{-1}AS||| = |||(S^{-1}AS)(BS)||| \leq |||S^{-1}AS||||||S^{-1}BS|||$$

$$= |||A|||_S|||A|||_S$$

(Gozali, 2010).

2.7 Ruang Banach

Definisi 2.7.1

Ruang Banach (*Banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap) jika dalam suatu ruang bernorm X berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di X adalah konvergen (Darmawijaya, 2007)

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2017/2018 di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini antara lain :

1. Mengkonstruksikan operator A dari ruang barisan $\ell_3$ke ruang barisan $\ell_{3/2}$ dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = (0,0,\dots,1_{(k)},\dots)$.
2. Mengkonstruksikan norma operator A.
3. Menyelidiki apakah koleksi semua operator membentuk ruang Banach.
4. Merepresentasikan operator A sebagai matriks takhingga yang dikerjakan pada barisan ℓ_3 ke ruang barisan $\ell_{3/2}$dengan basis standar $\{e_k\}$ dengan $e_k = (0,0,\dots,1_{(k)},\dots)$.

V. KESIMPULAN

Operator linear dan kontinu A : $\ell_3 \to \ell_{3/2}$ merupakan operator-SM jika dan hanya jika terdapat suatu matriks $A = (a_{ij})$ yang memenuhi :

1. $Ax = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j\right\} \in \ell_{3/2}$ untuk setiap $x = (x_i) \in \ell_3$
2. $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|^{3/2} < \infty$
3. $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right| < \infty$

Koleksi semua operator SM A : $\ell_3 \to \ell_{3/2}$ yang dinotasikan dengan SM $(\ell_3, \ell_{3/2})$ membentuk ruang Banach.

DAFTAR PUSTAKA

Berberian, S. K. 1996.*Fundamentals of Real Analysis*.Springer, Texas.

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Fuhrmann, P. A. 1981. *Linear Syatem and Operator in Hilbert Space*.Mc GrawHill and Sons, New York.

Gozali, S. M. 2010. Norm Vektor dan Norm Matriks. Juni 2010. https://id.scribd.com/doc/58611039/Norm-Vektor-Dan-Norm-Matriks. Diakses pada 28 November 2017.

Kamthan, P. K dan Gupta, M. 1981.*Sequence Spaces and Series*. Marcel Dekker Inc, New York.

Kreyszig, E. 1989.*Introductory Function Analysis with Application*.Willey Classic Library, New York.

Maddox,I.J. 1970. *Element of Functional Analysis*.Cambridge Univercity Press, London.

Martono, K. 1984. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik 2*. Angkasa, Bandung.

Mizrahi, A. dan Sullivan, M. 1982.*Calculus and Analytic Geometry*.Wadsworth Publishing Company Belmont, California.

Ruckle, W. H. 1991. *Modern Analysis*. PWS-KENT Publishing Company, Boston.

Yahya, Y., Suryadi, D. H. S. dan Agus, S. 1990. *Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi*. Ghalia Indonesia, Jakarta.