KETERKAITAN KOEFISIEN BINOMIAL DENGAN

RELASI KONGRUENSI

(Skripsi)

Oleh
Imroatul Azizah

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
2018

ABSTRACT

LINKAGE OF BINOMIAL COEFFICIENT WITH CONGRUENCE RELATIONSHIP

By

IMROATUL AZIZAH

Congruent have a meaning that if an integers *a* and *b* is said to be congruent modulo *n* is write $a \equiv b \ (mod\ n)$ if and only if *n* is split (*a* - *b*). And vice versa if *n* is not divisible (*a* - *b*) it is said that *a* is not congruent to *b* modulo *n* is write $a \not\equiv b \ (mod\ n)$, for *n* are positive integers. Congruence relations are concerned with binomial coefficients, namely in the form of binomial coefficient

$$\sum_{n=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$$

Can be verified by using the relation of congruence modulo p^2 ie

$$U(2f) \equiv (-1)^f \binom{-\frac{1}{2}}{f} (mod\ p^2)$$

With $p = 4f + 1$, *p* is a prime number, and *f* is the Legendre symbol.

Keywords: Binomial coefficient, congruence, modulo, array, prime numbers, positive integers, Taylor series, the series Maclaurin.

ABSTRAK

KETERKAITAN KOEFISIEN BINOMIAL DENGAN RELASI KONGRUENSI

Oleh

IMROATUL AZIZAH

Kongruen mempunyai makna bahwa jika suatu bilangan bulat a dan b dikatakan kongruen modulo n ditulis $a \equiv b$ ($mod\ n$) jika dan hanya jika n habis membagi (a – b). Dan sebaliknya jika n tidak habis membagi (a – b) maka dikatakan bahwa a tidak kongruen terhadap b modulo n ditulis $a \not\equiv b$ ($mod\ n$), untuk n bilangan bulat positif. Relasi kongruensi mempunyai kaitan dengan koefisien binomial, yaitu koefisien binomial dalam bentuk

$$\sum_{n=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$$

Dapat dibuktikan kebenarannya dengan menggunakan relasi kongruensi modulo p^2 yaitu

$$U(2f) \equiv (-1)^f \binom{-\frac{1}{2}}{f} (mod\ p^2)$$

Dengan $p = 4f + 1$, p adalah bilangan prima dan f adalah simbol Legendre.

Kata Kunci : Koefisien binomial, kongruensi, modulo, deret, bilangan prima, bilangan bulat positif, deret Taylor, deret Maclaurin.

KETERKAITAN KOEFISIEN BINOMIAL DENGAN

RELASI KONGRUENSI

Oleh

Imroatul Azizah

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar

SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **KETERKAITAN KOEFISIEN BINOMIAL DENGAN RELASI KONGRUENSI**

Nama Mahasiswa : *Imroatul Azizah*

No. Pokok Mahasiswa : 1217031036

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

[illegible], S.Si., M.Si.	**Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**
NIP 19730314 200012 1 002	NIP 19610128 198811 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Amanto, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Drs. Tiryono Ruby, M.Sc., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **29 Januari 2018**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Imroatul Azizah**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1217031036**
Program Studi	: **Matematika**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri, dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagai persyaratan penyelesaian studi pada universitas atau institute lain.

Bandar Lampung, 29 Januari 2018

Yang menyatakan

Imroatul A
NPM. 1217031036

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Tanjung Ratu Ilir pada tanggal 14 Desember 1994, sebagai anak pertama dari dua bersaudara dari Bapak Riadi dan Ibu Rita Dewi.

Pendidikan Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SD Negeri 1 Tanjung Ratu Ilir pada tahun 2005, Madrasah Tsanawiyah (MTs) Negeri 1 Poncowati pada tahun 2008, Madrasah Aliyah (MA) Negeri 1 Poncowati pada tahun 2012.

Tahun 2012 penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, FMIPA UNILA melalui jalur UMPTN. Selama menjadi mahasiswa, penulis pernah bergabung di Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) yang diamanahkan menjadi anggota bidang Eksternal periode 2013-2014. Pada tahun 2015 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Dinas PU Bina Marga Bandar Lampung . Penulis melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Giham Sukamaju, Kecamatan Sekincau, Kabupaten Lampung Barat pada tahun 2016.

PERSEMBAHAN

Dengan Mengucap puji dan syukur kehadirat Allah SWT

Kupersembahkan karya kecilku ini untuk :

Ayah, Ibu dan adikku tercinta yang menjadi sosok inspirasiku dalam bertingkah laku dan berfikir

Keluarga Besarku tercinta yang selalu memberikan

semangat untuk menyelesaikan skripsi ini

Dosen Pembimbing dan Penguji yang sangat berjasa,

seluruh sahabat-sahabatku dan Almamaterku Universitas Lampung

KATA INSPIRASI

Sains dibentuk oleh pengetahuan.kebaikan dibentuk oleh hati masing - masing manusia itu sendiri.

(Imroatul Azizah)

Cobalah untuk tidak menjadi seseorang yang SUKSES, tapi jadilah seseorang yang BERNILAI.

(Albert Einstein)

Semua orang berpikir untuk merubah dunia, tapi tak satupun berpikir untuk merubah dirinya sendiri.

(Leo Tolstoy)

KATA PENGANTAR

Puji dan Syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Skripsi ini bertujuan untuk mencapai gelar sarana pada jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dalam usaha menyelesaikan skipsi ini, banyak pihak yang telah membantu penulis dalam memberikan bimbingan, dorongan, dan saran-saran. Sehingga pada kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar besarnya kepada :

1. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku pembimbing I terima kasih atas segala bantuan dan waktunya untuk membimbing, memberi arahan, dan menasehati dalam penyelesaian skripsi ini.
2. Ibu Dra. Dorrah Azis, M.Si. selaku Dosen Pembimbing II terima kasih untuk bimbingan, kritik dan saran selama penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Tiryono Rubby, Ph.D. selaku Dosen Penguji, atas kesediaannya untuk menguji, memberikan saran dan kritik yang membangun dalam proses penyelesaian skripsi ini.
4. Kedua orangtuaku, Ibu tersayang yang telah mempertaruhkan hidupnya demi melahirkanku, menjagaku dengan penuh kasih, membesarkanku dengan cinta dan kasih sayang yang teramat besar, yang selalu menyelipkan namaku di dalam do’anya, menjadi orang pertama yang meneteskan air mata ketika aku terjatuh, dan ayah tercinta yang tak pernah lelah mendidikku, menjagaku,

membimbingku dengan kasih sayang, memberikan semangat dan beliaulah yang selalu memberikan contoh terbaik dalam hidupku, tidak ada kata yang bisa menggambarkanku betapa bahagianya aku memiliki kedua orang tua yang teramat luar biasa seperti beliau, Ibu Ayah terima kasih untuk segalanya yang telah diberikan, ‘I love you both so much’.

5. Seluruh keluarga besarku terima kasih atas do’a, semangat dan dukungannya.
6. Seluruh civitas matematika, dosen dan staf jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Lampung.
7. Sahabat dan adik – adikku Ulva, Anjani, Syahid, Sisye, Fariz, Kayla, Jinan, Aisya, Syanum, Lutfi, Adelia, Nanda, Lina, Siska, Icha. Terima kasih atas do’a dan semua dukungannya.
8. Teman-teman seperjuangan jurusan matematika angkatan 2012.
9. Seluruh pihak yang telah berperan dalam penyelesaian skripsi ini, yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis berharap semoga Allah SWT selalu melimpahkan rahmat dan karunia-Nya dan membalas budi baik dari semua pihak yang telah berjasa kepada penulis. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Bandar Lampung, 29 Januari 2018
Penulis

Imroatul Azizah
NPM. 1217031036

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR NOTASI

$\equiv$	: Kongruen
$\not\equiv$	: Tidak kongruen
mod	: Modulo yaitu pembagi dalam kekongruenan
$\neq$	: Tidak sama dengan
f	: Simbol Legendre
p	: Bilangan prima
$U(n)$	: Deret ke- n
$U(2f)$	: Deret ke- f
$\binom{n}{k}$	: Kombinasi n terhadap k
$a \mid b$	: a habis dibagi oleh b
$a \nmid b$	: a tidak habis dibagi oleh b
$>$	: Lebih dari
$<$	: Kurang dari
$\leq$	: Kurang dari sama dengan

$\geq$	: Lebih dari sama dengan
Fpb (a,b)	: Faktor persekutuan besar dari *a* dan *b*
$\sum_k^n x_i$	: Penjumlahan dari x_i untuk $i = 1,2,3,....m$.
!	: Faktorial
λ	: Banyaknya sisa positif dari ½ (p-1)
μ	: Banyaknya sisa negative dari ½ (p-1)
α	: Sembarang bilangan riil
e	: Bilangan
log	: Logaritma
$f(x)$	: Fungsi dari x
$f''(x)$	: Turunan ke-n dari $f(x)$
$\Leftrightarrow$	: Jika dan hanya jika
$\Longrightarrow$	: Jika maka
■	: Akhir bukti

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam mempelajari ilmu matematika, khususnya teori bilangan dikenal istilah **kongruen.** Konsep kekongruenan pertamakali diperkenalkan oleh seorang ahli matematika Jerman yang bernama Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) dalam bukunya *Disquisitiones aritmaticeae*, tepatnya pada tahun 1801 pada saat Gauss berusia 24 tahun. Kongruen mempunyai makna bahwa jika suatu bilangan bulat a dan b dikatakan kongruen modulo n ditulis $a \equiv b \ (mod\ n)$ jika dan hanya jika n habis membagi $(a - b)$. Dan sebaliknya jika n tidak habis membagi $(a - b)$ maka dikatakan bahwa a tidak kongruen terhadap b modulo n ditulis $a \not\equiv b \ (mod\ n)$, untuk n bilangan bulat positif (Burton, 1994).

Contoh

$25 \equiv 1 \ (mod\ 4)$ sebab 4 habis membagi (25 – 1)

$31 \not\equiv 5 \ (mod\ 6)$ sebab 6 tidak habis membagi (31 – 5)

Kekongruenan modulo suatu bilangan bulat positif adalah suatu relasi antara bilangan – bilangan bulat. Relasi kongruen juga merupakan relasi ekuivalen.

Relasi kekongruenan mempunyai kemiripan sifat dengan persamaan pada bilangan bulat, tetapi tidak berlaku sepenuhnya. Ada syarat – syarat tertentu yang harus dipenuhi. Syarat tersebut adalah faktor dalam kekongruenan dapat dihapus jika faktor tersebut dan bilangan modulonya saling prima (sukirman, 1997).

Contoh

$24 \equiv 12 \ (mod\ 4)$

$\Leftrightarrow 12 \equiv 6 \ (mod\ 2)$

$\Leftrightarrow 6 \equiv 3 \ (mod\ 1)$

$\Leftrightarrow 6 \equiv 3 \ (mod\ 1)$

$24 \equiv 12 \ (mod\ 4)$

$\Leftrightarrow 8 \equiv 4 \ (mod\ 2)$

$\Leftrightarrow 4 \equiv 2 \ (mod\ 1)$

$\Leftrightarrow 2 \equiv 1 \ (mod\ 1)$

Kekongruenan dapat digunakan untuk memeriksa kebenaran dari suatu perkalian dan penjumlahan bilangan – bilangan bulat besar. Selain itu dapat juga digunakan untuk memeriksa kebenaran pengurangan bilangan – bilangan bulat serta keterbagian dari suatu bilangan bulat. Kekongruenan yang digunakan memeriksa kebenaran tersebut adalah modulo 9 (*mod* 9). Kekongruenan juga dapat digunakan untuk menentukan hari dari suatu tanggal yang telah ditetapkan, kekongruenan yang digunakan adalah kekongruenan modulo 7 (*mod* 7).

1.2 Rumusan masalah

Dari uraian di atas diketahui bahwa kekongruenan mempunyai cakupan yang sangat luas. Salah satunya adalah kekongruenan dengan modulo bilangan prima (*mod* p) dengan *p* adalah prima.

Pada tugas akhir ini permasalahan yang akan dibahas adalah mengetahui kaitan antara koefisien binomial dengan $U(n)$ ditulis

$$U(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+1}{k}$$

Dengan suatu relasi kongruensi modulo *p*, *p* adalah Prima yaitu

$$U(2f) \equiv (-1)^{f}\left(2a - \frac{p}{2a}\right) (mod\ p^2)$$

Dengan

$p = 4f + 1$ adalah prima

f adalah simbol legendre

$p = a^2 + b^2$ dan $a \equiv (mod\ 4)$

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah untuk menunjukkan kebenaran koefisien Binomial dengan menggunakan relasi kekongruenan.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah

1. Dapat memberikan sumbangan pemikiran dalam rangka memperluas dan memperdalam pengetahuan ilmu matematika khususnya mengenai kekongruenan.
2. Memberikan masukan dan dorongan bagi peneliti yang lain agar dapat mengkaji lebih lanjut tentang sifat – sifat kekongruenan dan kegunaan kekongruenan dalam operasi perhitungan matematika maupun dalam kehidupan sehari – hari .

II. LANDASAN TEORI

Dari bab ini akan dibahas beberapa teori bilangan dan beberapa konsep dasar deret yang mendukung penyelesaiaan tugas akhir ini.

2.1 Kongruen

Definisi 2.1.1 (Sukirman,1997)

Misal n adalah suatu bilangan bulat positif tertentu. Dua bilangan bulat a dan b dikatakan **kongruen** modulo n ditulis dengan

$$a \equiv b \ (\ mod\ n\ )$$

Jika n membagi habis a dan b, maka a dan b = kn untuk suatu bilangan bulat k.

Dan jika n tidak habis membagi a - b dikatakan a dan b **tidak kongruen** modulo n, ditulis dengan $a \not\equiv b$ (mod n).

Teorema 2.1.2 (Burton, 1994)

Untuk setiap bilangan bulat a dan b, $a \equiv b$ (mod n) jika dan hanya jika a-b bersisa positif jika dibagi oleh n, dengan n adalah bilangan bulat positif.

Bukti

Diambil $a \equiv b$ (mod n), sehingga $a = b + kn$ untuk suatu bilangan bulat k. Atas pembagiaan n, b mempunyai sisa r, Maka

$b = qn + r$, dimana $0 \leq r \leq n$, sehingga

$a = b + kn = (qn + r) + kn = (q + k)\, n + r$

Dengan catatan bahwa *a* mempunyai sisa yang sama dengan *b*.

Misalkan $a = q_1 n + r$ dan $b = q_2 n + r$ dengan sisa yang sama yaitu r ($0 \leq r \leq n$).

Maka

$a - b = (q_1 n + r) - (q_2 n + r) \;\; kn = (q_1 - q_2)n$

dengan

$n | a - b$. Sehingga terbukti $a \equiv b \ (mod\ n)$. ■

Teorema 2.1.3 (Burton, 1994)

Jika $n > 0$, dan a,b,c,d adalah sembarang bilangan bulat, maka :

1) $a \equiv a$ (mod n)
2) Jika $a \equiv b$ (mod n), dan $b \equiv a$ (mod n)
3) Jika $a \equiv b$ (mod n), dan $b \equiv c$ (mod n), maka $a \equiv c$ (mod n)
4) Jika $a \equiv b$ (mod n), dan $c \equiv d$ (mod n), maka $a + b \equiv b + d$ (mod n) dan $ac \equiv bd$ (mod n)
5) Jika a ≡ b (mod n), maka a + c ≡ b + c (mod n) dan ac (mod n)
6) Jika $a \equiv b$ (mod n), maka $a^k \equiv b^k$(mod n) untuk bilanngan positif k.

Bukti

a) Untuk setiap bilangan bulat a, berlalaku $a - a = 0 \,.\, n$

sehingga $a \equiv a \ (\ mod\ n\ )$. ■

b) Jika $a \equiv b \ (\ mod\ n\ )$, maka $a - b = km$ untuk beberapa bilangan bulat k.

Oleh karena itu, diperoleh

$$b - a = -(\ kn\ ) = (\ -k\ )\ n$$

dengan $-k$ adalah bilangan bulat. ■

c) Jika $a \equiv b \ (\ mod\ n\ )$ maka $a - b = kn$ untuk bilangan bulat k. (2.1)

Jika b ≡ c ($mod\ n$) maka $b - c = hn$ untuk bilangan bulat h. (2.2)

Sehingga jika persamaan (2.1) dan (2.2) dijumlahkan maka diperoleh

$$(\ a - b\ ) + (\ b - c\ ) = kn + hn$$

$$\Leftrightarrow a - b + b - c = (\ k + h\ )\ n$$

$$\Rightarrow a - c = (\ k + h\ )\ n$$

Karena $k + h$ adalah bilangan bulat maka terbukti bahwa $a \equiv c \ (\ mod\ n\ )$■

d) Jika $a \equiv b \ (\ mod\ n\ )$ maka dapat ditentukan bahwa $a - b = k_1 n$ dan $(c - d)$ $= k_2 n$ untuk suatu bilangan bulat k_1 dan k_2 sehingga diperoleh

$$(a - b) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$$

$$= k_1 n + k_2 n$$

$= (k_1 + k_2)\ n$

Atau dengan pernyataan kekongruenan, $a + c \equiv b + d$ (*mod n*)

- Begitu juga untuk perkalian

$ac = (b + k_1 n)\ (d + k_2 n)$

$= bd + (\ bk_2 + dk_1 + k_1 k_2 n)\ n$

Karena $bk_2 + dk_1 + k_1 k_2 n$ adalah suatu bilangan bulat, berarti bahwa *ac* - *bd* habis dibagi oleh *n*, sehingga *ac* = *bd* (*mod n*). ■

e) Jika *a* = *b* (*mod n*) maka $a + b = b + c$ (*mod n*) dan *ac* ≡ *bc* (*mod n*)

Bukti

- Dari Teorema 2.1.3 bagian 1 *a* ≡ *a* (*mod n*) maka *c* ≡ *c* (*mod n*)

  a ≡ *b (mod n*) berarti $a – b = k_1 n$ sehingga $a = b + k_1 n$, untuk suatu k_1 bilanga bulat.

  c ≡ *c (mod n*) berarti $c – c = k_2 n$ sehingga $c = c + k_2 n$ untuk suatu k_2 bilangan bulat.

$a + c = (\ b + k_1 n\ )\ (\ d + k_2 n\ )$

$= (\ a + b\ ) + k_1 n + k_2 n$

$a + c = b + c\ (k_1 n + k_2 n +)n$

$(\ a – c\ ) - (\ b + c\ ) = (\ k_1 + k_2)n$

Dengan $(k_1 + k_2\ )$ adalah bilangan bulat. ■

Hal ini berarti

$a + c \equiv c + b$ (mod n)

- $a \equiv b$ (mod n)

  ($a - b$) $= k_1 n$ untuk suatu k_1 bilangan bulat.

  $a = b + k_1 n$ (2.3)

  $c \equiv c$ (mod n)

  $c - c = k_2 n$ untuk suatu k_2 bilangan bulat.

  $c = c + k_2 n$ (2.4)

  Sehingga dari (2.3) dan (2.4) diperoleh

  $ac = (b + k_1 n) (c + k_2 n)$

  $ac = bc + (\mathrm{b}k_2 n + ck_1 n) n^2$

  $ac = bc + (\mathrm{b}k_2 n + ck_2 + n) n$

  Dengan ($bk_2 n + ck_{2+} n$) adalah bilangan bulat

  Sehingga diperoleh

  $$ac - \mathrm{b}c = (bk_2 n + ck_1 n)\, n$$

Dengan kata lain $ac \equiv bc$ (mod n) ■

f) Jika $a \equiv b$ ($mod\ n$), maka $a^k \equiv b^k$ ($mod\ n$) untuk bilangan bulat positif k

Bukti

Dengan induksi matematika

$a^k \equiv b^k$(mod n) benar untuk k =1

$a^1 \equiv b^1$(mod n)

$a \equiv b$ (mod n)

Misalkan benar untuk bilangan bulat positif k sehingga $a^k \equiv b^k$(mod n)

Dari Teorema (2.1.3 ke 4)

$a.a^k \equiv b.b^k$(mod n)

$a^{k+1} = b^{k+1}$(mod n)

Sehingga pernyataan benar $k = 1$

Berdasarkan indukasi matematika pernyataan $a^k \equiv b^k$(mod n) adalah benar. ■

Akibat 2.1.4 (Burton, 1994)

Jika $ca \equiv cb$ (mod n) dan fpb (c,n) = 1, maka $a \equiv b$ (mod n).

Teorema 2.1.5 (Burton, 1994)

Jika $p(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$ adalah sebuah fungsi polinomial x dengan koefisien integral c_k.

Jika $a \equiv b\ (mod\ n)$, maka $p(a) \equiv p(b)\ (mod\ n)$

Bukti

Apabila $a \equiv b\ (mod\ n)$, pada Teorema 2.1.3 bagian 6, telah dibuktikan bahwa $a^k \equiv b^k\ (mod\ n)$ untuk $= 0,1,...,m$. Sehingga $c_k a^k \equiv c_k a^k\ (mod\ n)$ untuk setiap nilai k . Dengan menambahkan $m + 1$ yang kongruen maka dapat disimpulkan bahwa

$$\sum_{k=0}^{m} c^k a^k \equiv \sum_{k=0}^{m} c_k b^k\ (mod\ n)$$

Atau dengan kata lain $p(a) \equiv p(b)\ (mod\ n)$. ■

Akibat 2.1.6 (Burton 1994)

Jika a adalah solusi dari $p(x) \equiv 0\ (mod\ n)$ dan $a \equiv b\ (mod\ n)$ maka b adalah sebuah solusi juga.

Bukti

Diketahui bahwa $p(a) \equiv p(b)\ (mod\ n)$.

Oleh sebab itu jika a adalah solusi dari $p\ (x) \equiv 0\ (mod\ n)$, maka $p(a) \equiv 0\ (mod\ n)$ karena $p(a) \equiv p(b)\ (mod\ n)$ maka dengan (Teotema 2.1.3 bagian 3) $p(b) \equiv 0\ (mod\ n)$ jadi b adalah solusi juga. ■

Teorema 2.1.7 (Burton, 1994 / Teorema Fermat)

Jika p adalah bilangan prima dan $p \nmid a$ maka $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$

Bukti

Perkalian antara bilangan bulat a dengan bilangan positif sampai dengan p - 1 adalah a, $2a$, $3a$,..., (p - 1) a.

Dari hasil perkalian tersebut tidak ada bilangan yang kongruen modulo p terhadap satu dengan bilangan yang lainnya, atau dengan kata lain tidak ada yang kongruen terhadap 0. Tentu saja jika hal ini terjadi, maka

$$ra \equiv sa \ (mod\ p),\ 1 \leq r \leq s \leq p\text{-}1$$

Sehingga a dapat dihilangkan menjari $r \equiv s \ (mod\ p)$, dan ini tidak mungkin.

Sedangkan, himpunan bilangan bulat di atas harus kongruen modulo p untuk p adalah 1, 2, 3,..., p-*1*, begitu juga sebaliknya.

Dengan mengalikan semua perkalian pada kedua sisi diperoleh

$a.2a.\ 3a...(p\text{-}1)\ a \equiv 1.2.3...(\ p\text{-}1)\ (mod\ p)$

Sehingga

$a^{p-1}(p\text{-}1)! \equiv (p\text{-}1)!\ (mod\ p)$

Jika (p-1)! Dihapus dari sisi kongruenan (ini mungkin jika $p \nmid (p\text{-}1)!$, dan disimpulkan bahwa $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$. ■

Akibat 2.1.8 (Burton, 1994)

Jika p adalah bilangan prima, maka $a^p \equiv 1\ (mod\ p)$ untuk setiap bilangan bulat a.

Bukti

Jika $p \mid a$, pernyataan ini benar untuk bentuk $a^p \equiv 0 \equiv a\ (mod\ p)$.

Jika $p \nmid a$, maka dengan memperhatikan Teorema Fermat, diperoleh:

$a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$. Dan apabila kekongruenan ini dikali dengan a, diperoleh hasil $a^p \equiv a\ \ (mod\ p)$. ■

Teorema 2.1.9 (Burton, 1994)

Jika p dan q adalah bilangan prima yang berbeda dengan satu sama lain maka

$a^p \equiv a$ (mod q) dan $a^q \equiv a$ (mod p) maka $a^{pq} \equiv a$ (mod pq)

Bukti

Diketahui dari Akibat 2.1.8 bahwa $(a^q)^p \equiv a^q$ (mod p) maka $(a^q) \equiv a$ (mod p) dengan menggabungkan kekongruenan tersebut, kita peroleh $a^{pq} \equiv a$ (mod p) atau dengan kata lain $p \mid a^{pq} - a$.

Dengan cara yang sama $a^{pq} \equiv a\ (mod\ q)$ maka $p \mid a^{pq} - a$. sehingga diperoleh

$p \mid a^{pq} - a$ atau $a^{pq} \equiv a\ (mod\ \mathrm{p}q)$. ■

Teorema 2.1.10 (Burton, 1994)

Kekongruenan linier $ax \equiv b(mod\ n)$ mempunyai sebuah penyelesaian jika dan hanya jika $d \mid b$, dimana d = fpb (a,n).

Teorema 2.1.11 (Burton, 1994)

Jika p adalah prima, maka

(p-1)! ≡ -1 $(mod\ p)$

Bukti

Dengan tidak memperhitungkan dua bilangan prima pertama (2 dan 3), kita ambil $p > 3$. Misal a salah satu bilangan bulat pada 1, 2, 3,..., *p-1*. Dan misalkan

$ax \equiv 1(mod\ p)$ jika fpb (a,b) = 1, dengan Teorema 2.1.10 kekongruenan ini hanya mempunyai satu penyelesaian tunggal modulo p oleh sebab itu, ada sebuah bilangan bulat a', dengan $1 \leq a' \leq p - 1$, sehingga diperoleh $a'' \equiv 1\ (mod\ p)$.

sehingga p adalah bilangn prima , $a = a'$ jika dan hanya jika $a = 1$ atau $a = p$-1.

Sesungguhnya kekongruenan $a^2 \equiv 1\ (mod\ p)$ ekuivalen dengan

$(a - 1)\ (a+1) \equiv 0\ (mod\ p)$.

Oleh sebab itu, $a - 1 \equiv 0\ (mod\ p)$. Dengan $a = 1$ atau $a + 1 \equiv 0\ (mod\ p)$. Dengan $a = p - 1$. Jika nilai 1 dan $p - 1$ diabaikan, akibatnya himpunan sisa bilangan bulat 2, 3,...,($p - 2$) ≡ berpasangan dengan a, a', dimana $a \neq a'$, dengan demikian perkaliannya adalah aa'= 1 $(mod\ p)$. Apabila ($p-3$)$\mid$2 dikalikan dengan kedua sisi kekongruenan, Maka diperoleh

$$2, 3,..., (p-2) \equiv 1\ (mod\ p)$$

Atau

$$(p-2)! \equiv 1\ (mod\ p)$$

Dan perkalian dengan $p-1$ mengakibatkan bentuk kekongruenan

$$(p-2)! \equiv p-1 \equiv 1\ (mod\ p) \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.1.12 (Burton, 1994)

Kekongruenan $x^2 + 1 \equiv 0\ (mod\ p)$, dengan p adalah bilangan prima yang ganjil, mempunyai penyelesaian jika dan hanya jika $p \equiv 1\ (mod\ 4)$.

Bukti

Misal a penyelesaian dari $x^2 + 1 \equiv 0\ (mod\ p)$ sehingga $a^2 \equiv -1\ (mod\ p)$ jika

$p \nmid a$, selanjutnya berdasarkan Teorema Fermat diperoleh

$$1 \equiv a^{p-1} \equiv (a^2)^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{(p-1)/2}\ (mod\ p).$$

Kemungkinan bahwa $p = 4k + 3$ untuk suatu k. Tidak terpenuhi, dengan k adalah bilangan bulat positif. Jika hal itu terjadi diperoleh

$$(-1)^{(p-1)/2} = (-1)^{2k+1} + 1$$

Dari sini 1 ≡ -1 $(mod\ p)$. Hasil akhirnya adalah $p \mid 2$, dimana jelas bahwa itu adalah tidak benar. Oleh sebab itu , p harus dalam bentuk $4k$ + 1.

Sekarang untuk bukti sebaliknnya.

Dalam perkalian

$$(p\text{-}1)! = 1, 2, 3, \ldots \frac{p-1}{2} . \frac{p+1}{2} \ldots (p\text{-}2) . (p\text{-}1)$$

Diketahui bahwa

$$p - 1 \equiv -1 \ (mod\ p)$$

$$p - 2 \equiv -2 \ (mod\ p)$$

.

.

.

$$\frac{p+1}{2} \equiv \frac{p-1}{2} \ (mod\ p)$$

Sehingga diperoleh

$$(p-1)! \equiv 1\ (-1).2.(-2) \ldots \frac{p-1}{2} . \left(1.2 \ldots \frac{p-1}{2}\right)^2 (mod\ p).$$

$$\equiv (-1)^{(P-1)/2} \left(1.2 \ldots \frac{P-1}{2}\right)^2 \ (mod\ p).$$

Selama $(p-2)/2$ bertanda negatif, ini menunjukkan bahwa Teorema *Wilson* dapat dipertahankan, untuk $(p-1)! \equiv -1\ (mod\ p)$, dengan

$$\equiv (-1)^{(p-1)/2} \left(\left(1.2 \ldots \frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \ (mod\ p).$$

Jika diasumsikan bahwa p dalam bentuk $4k$ + 1, maka $(-1)^{(p-1)/2}$ = 1

Maka diperoleh

$$-1 \equiv \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \ (mod\ p)$$

Jadi ((p-1)/2)! Memenuhi bentuk kekongruenan x^2+ 1≡ 0 $(mod\ p)$.

Definisi 2.1.13 (Burton,1994)

jika p adalah bilangan ganjil yang prima dan fpb (a, p) = 1

Simbol Legendre (a/p) didefinisikan sebagai

$$(a/p) = \begin{cases} 1 \text{ jika } a \text{ adalah sisa dari kuadratik } p \\ -1 \text{ jika } a \text{ adalah bukan sisa dari kuadratik dari } p \end{cases}$$

pada definisi ini a disebut numerator dan p disebut demomirator dari (a/p).

Secara umum simbol Legengre ditulis $\left(\frac{a}{p}\right)$ atau (a/p).

Teorema 2.1.14 (Burton,1994)

Jika p adalah bilangan ganjil prima, a dan b bilangan bulat yang saling prima, maka simbol Legengre memiliki sifat-sifat seperti di bawah ini

1. Jika $a \equiv b$ (mod p), maka $(a/p) = (b/p)$
2. (a^2/p) = 1
3. $(a/p) \equiv a^{(p-1)/2}$ (mod p).

4. $(ab/p) = (a/p)(b/p)$

5. $(1/p) = 1$ dan $(-1/p) = a^{(p-1)/2}$

Corollary 2.1.15 (Burton, 1994)

Jika p adalah bilangan ganjil yang prima, maka

$$(-1/p) = \begin{cases} 1 \text{ jika } p \equiv 1 (\bmod p) \\ -1 \text{ jika } p \equiv 3 (\bmod p) \end{cases}$$

Teorema 2.1.16 (Hardy dan Wright, 1945)

Jika p adalah bilangan prima yang ganjil dan a tidak habis dibagi oleh p, maka

$$(p-1)! \equiv -\left(\frac{a}{p}\right) a^{(p-1)/2} \ (\bmod p)$$

Dimisalkan bahwa p adalah bilangan prima yang ganjil. Ini jelas bahwa 0 = 0^2, 1 = 1^2, dan begitu juga dengan bilangan yang lainnya, adalah sisa kuadrat dari 2,

Jika p = 2 simbol Legendre tidak dapat didefinisikan

Dua masalah sederhana adalah jika $a = 1$ dan a = -1

- Jika $a = 1$, maka diperoleh

$$x^2 \equiv 1 \ (mod\ p)$$

Persamaan diatas mempunyai solusi $x = \pm 1$. Oleh sebab itu 1 adalah sisa kuadratik dari p dan $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$

Jika diambil a = 1 dalam Teorema 2.1.16, maka diperoleh Teorema berikut

Teorema 2.1.17 (Hardy dan Wright, 1945)

$(p\ \text{-}1)! \equiv \text{-}1\ (\text{mod}\ p\ )$

$(p\ \text{-}1)! + 1 \equiv 0\ (\text{mod}\ p^2\ )$

Kekongruenan yang benar untuk $p = 5$, $p = 13$.

- Jika a = -1

Maka Teorema 2.1.16 dan 2.1.17 menjadi

$$\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)a^{\ 1/2(p-1)}(p\ - 1)! \equiv (-1)a^{\ 1/2(p-1)}$$

Teorema 2.1.18 (Hardy dan Wright, 1945)

Bilangan -1 adalah kuadratik prima berbentuk $4k$ + 1 dan bukan sisa kuadratik prima berbentuk $4k$ + 3, yakni

$$\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)a^{\ 1/2(p-1)}$$

Teorema 2.1.19 (Hardy dan Wright, 1945)

$$\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv a^{\ 1/2(p-1)}\ (mod\ p)$$

Teorema 2.1.20 (Hardy dan Wright, 1945)

$$2^{\mathrm{p}-1} - 1 \equiv (\text{mod p}^2)$$

Dengan p adalah bilangan prima Jika p adalah bilangan prima yang ganjil, hanya terdapat satu sisa dari $n\ (mod\ p)$antara -1/2p dan 1/2 p. Ini disebut sisa terkecil dari n $(mod\, p)$, positif atau negatif tergantung dari sisa positif terkecil dari n, berada antara 0 dan 1/2 p atau antara 1/2p dan p.

Diduga bahwa *m* adalah bilangan bulat (positif atau negatif), tidak habis dibagi oleh *p*, dan bilangan – bilangan *m* adalah sisa minimal dari $\frac{1}{2}(p-1)$ yaitu

m,2m,3m,..., $\frac{1}{2}(p-1)\ m$

Sisa tersebut dapat ditulis dalam bentuk

r_1,r_2,...,r_λ $\qquad$ r'_1,r'_2,...,r'_μ

Dengan $\lambda + \mu = \frac{1}{2}(p-1)$, $0 < r_i < \frac{1}{2}(p-1)$, $0 < r'_i < \frac{1}{2p}$

Karena (2.5) tidak kongruen atau satu sama lain, maka tidak ada *r* yang sama, dan begitu juga untuk *r'*.

Jika *r* dan *r'* sama, katakan $r_i = r_j'$, misal *am, bm,* dua bilangan – bilanagan dalam (2.5) sedemikian sehingga

$$am \equiv r_i,\ bm \equiv -r'_j\ (mod\, p)$$

maka $am + bm \equiv 0$ $(mod\, p)$ dan selanjutnnya $a + b \equiv (mod\, p)$, dan ini tidak mungkin sebab $0 < a < \frac{1}{2p}$, $\quad 0 < b < \frac{1}{2p}$

ini berdasarkan bilangan – bilangan r_i, r'_j adalah bilangan terakhir dari bilangan – bilangan 1, 2, ... , $\frac{1}{2(p-1)}$ dan oleh sebab itu

$$m\ .\ 2m\ ...\ \frac{1}{2(p-1)}m \equiv (-1)^{\mu}1.2\ ...\ \frac{1}{2(p-1)}(mod\, p)$$

$$m^{\frac{1}{2(p-1)}} \equiv (-1)^{\mu}\ (mod\ p).$$

Tapi $\left(\frac{m}{p}\right) \equiv m^{\frac{1}{2(p-1)}}\ (mod\ p)$

Teorema 2.2.21 (Hardy dan Wrigh, 1954)

$$\left(\frac{m}{p}\right) = (-1)^{\mu}$$

Dengan μ adalah bilangan dari anggota himpunan dari

$$m, 2m, 3m\ ...\ \frac{1}{2(p-1)} m$$

dengan sisa positif terkecil $(mod\ p)$ adalah lebih besar dari $\frac{1}{2p}$

Bukti

Misal diambil bilangan anggota m = 2, sehingga bilangan – bilangan dalam (2.5) menjadi

$$2, 4, ..., p - 1$$

Dalam masalah ini λ adalah bilangan positif genap dari bilangan bulat yang kurang dari $\frac{1}{2p}$

Kita tulis $[x]$ adalah bilangan bulat terbesar yang tidak melebihi x, yaitu

$$\times = [x] + f, \text{ dimana } 0 \leq f < 1.$$

Dengan notasi

$$\lambda = \left[\frac{1}{4p}\right]$$

Tapi $\lambda + \mu = \frac{1}{2(p-1)}$

Sehingga $\mu = \frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{4p}$

Jika $p \equiv 1\ (mod\ 4)$, maka $\mu = \frac{1}{2(p-1)}$ - $\frac{1}{4(p-1)}$ = $\frac{1}{4(p-1)}$ = $\left[\frac{1}{4(p-1)}\right]$, dan

Jika $p \equiv 3\ (mod\ 4)$, maka $\mu = \frac{1}{2(p-1)}$ - $\frac{1}{4(p-3)}$ = $\frac{1}{4(p+1)}$ = $\left[\frac{1}{4(p+1)}\right]$.

Oleh karena itu $\left(\frac{2}{p}\right) \equiv 2^{\frac{1}{2(p-1)}} \equiv (-1)^{\left[\frac{1}{4(p+1)}\right]}\ (mod\ p)$.

Hal ini berarti $\left(\frac{2}{p}\right)$ = 1, jika p = 8n + 1 atau 8n – 1

$\left(\frac{2}{p}\right)$ = -1, jika p = 8n + 3 atau 8n – 3

Jika p = 8n $\pm$ 1, maka $\frac{1}{8(p^2-1)}$ adalah genap, dan jika p = 8n $\pm$ 3, maka $p =$ $\frac{1}{8(p^2-1)}$ adalah ganjil.

Oleh karena itu, diperoleh

$$(-1)^{\left[\frac{1}{4}(p+1)\right]} = (-1)^{\frac{1}{8}(p2-1)}$$

Teorema 2.1.22 (Hardy dan Wright, 1954)

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\left[\frac{1}{4}(p+1)\right]}$$

Teorema 2.1.23 (Hardy dan Wright, 1954)

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}(p2-1)}$$

Teorema 2.1.24 (Hardy dan Wright, 1954)

2 adalah sisa kuadrat dari bilangan – bilangan prima dengan bentuk $8n \pm 1$ dan bukan sisa kuadrat dari bilangan – bilangan prima dengan bentuk $8n \pm 3$.

2.2 Koefisien Binomial

Definisi 2.2.1 (Leithold, 1991)

Diketahui deret Binomial yaitu

$$(1 + x)^p = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \dots + \binom{p}{p} x^p$$

dengan

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)}{k!}$$

Untuk *p* dan *k* adalah bilangan bulat positif.

Definisi 2.2.2 (Leithold, 1991)

Lambang $\binom{n}{r}$ dengan *r* dan *n* adalah bilangan positif dengan $r \leq n$, didefinisikan sebagai berikut

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots(r-1)r}$$

Atau

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

Bilangan – bilangan seperti yang didefinisikan di atas disebut **Koefisien Binomial.**

Definisi 2.2.3 (Knopp, 1947)

Pada deret binomial dengan pangkat positif, ditulis dalam bentuk

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n \text{ , } \begin{cases} |x| < 1 \\ \alpha \quad \text{sembarang bilangn riil} \end{cases}$$

Bilangan ini tidak akan berubah untuk pangkat bilangan bulat negatif dengan ketetapan $|x| < 1$. Dan bentuk pangkat sebarang bilangan riil α dalam bentuk

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

Simbol $\binom{a}{n}$ didefinisikan untuk sembarang bilangan riil a dan bilangan bulat $n \geq 0$ dengan dua ketentuan sebagai berikut.

$$\binom{a}{0} = 1, \qquad \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{1.2\ldots n} \text{ untuk } n \geq 1$$

2.3 Deret

Definisi 2.3.1 (Lipschutz, 1988)

Deret kuasa ialah deret tak hingga yang berbentuk

1. $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = a_0 + a_1(x - x_0) + a_1 + a_1(x - x_0) + \ldots$
2. dengan a_0, a_1, a_2, ... adalah konstanta, yang disebut koefisien deret itu x_0 juga konstanta, disebut pusat deret tersebut, sedangkat *x* adalah peubah, jika x_0 = 0 maka diperoleh deret kuasa dalam *x*.
3. $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

dalam pasal ini diasumsikan bahwa semua peubah dan konstanta mempunyai nilai bilangan nyata.

Definisi 2.3.2 (Kaplan, 1993)

Jika $f(x)$ adalah penjumlahan dari deret kuasa dengan interval

$|x - r| < a, (r > 0)$:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - a)^m, a - r < x < a + r$$

Deret ini disebut **deret Taylor** $f(x)$ untuk $x = a$

Jika koefisien c_m diberikan rumus

$$c_0 = f(a), \; c_1 = \frac{f'(a)}{1!}, \; c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \; . . . \; c_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

Maka

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \ldots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x - a)^{n}$$

Definisi 2.3.3 (Kaplan,1993)

Pada bentuk **deret Taylor** di mana $a = 0$ untuk $f(x)$ menjadi

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^{2}}{2!} + \ldots + \frac{f^{n}(0)x^{n}}{n!}$$

$f(x)$ disebut **deret Maclaurin**.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Lokasi dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di jurusan matematika, Fakultas Matematika dan ilmu pengetahuan alam Universitas Lampung. Waktu penelitian dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2017 – 2018.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penyelesaian tugas akhir ini adalah

a. Studi Literatur

   Penulisan menggunakan literatur yang ada di perpustakaan Unila dan literatur-literatur lain yang berhubungan dan mendukung topik yang dibicarakan dalam tugas ini.

b. Presentasi

   Presentasi dilakukan untuk mengetahui perkembangan kegiatan studi yang dilakukan dan untuk mendapatkan masukan dari dosen pembimbing maupun rekan-rekan kelas seminar tentang materi yang sedang dibahas.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari penelitian ini telah dapat disimpulkan bahwa relasi kongruensi mempunyai kaitan dengan koefisien binomial, yaitu koefisien binomial dalam bentuk

$$\sum_{n=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$$

Dapat dibuktikan kebenarannya dengan menggunakan relasi kongruensi modulo p^2 yaitu

$$\mathrm{U}(2f) \equiv (-1)^{f} \binom{-\frac{1}{2}}{f} (mod\ p^2)$$

Dengan $p = 4f + 1$, p adalah bilangan prima dan f adalah simbol Legendre.

5.2 Saran

Masih banyak penelitian yang perlu dikaji dalam mempelajari kongruensi terutama dalam kegunaannya bagi ilmu matematika maupun dalam kehidupan sehari – hari, oleh karena itu para penulis berharap para pembaca untuk menelaah lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

Burton, D. M. 1980. *Elementary Number Theory*. University Of New Hampshire.United State of Afrika.

Hardy, G. H. dan Wright, E. M. 1995. *An Introduction To The Theory of Numbers*. *Thriid Editions*. Oxford At The Clarendon Press.

Leithold, K. 1991. Kalkulus dan Ilmu Analitik. Erlangga. Jakarta.

Lipschuz, S. 1988. *Matematika Hingga. Teori dan Soal-Soal. Edisi* S1. Diterjemahkan oleh Hall. G. G. Erlangga. Jakarta.

Sukirman, M. P. 1997. *Ilmu Bilangan.* Universitas Terbuka. Jakarta.