PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL NON HOMOGEN DENGAN METODE PERTURBASI HOMOTOPI DAN CRANK NICHOLSON

SKRIPSI

Oleh

DARMAWANSYAH

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRAK

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL NON HOMOGEN DENGAN METODE PERTURBASI HOMOTOPI DAN CRANK NICHOLSON

Oleh

DARMAWANSYAH

Persamaan diferensial merupakan suatu persamaan yang memuat satu atau lebih peubah. Persamaan diferensial merupakan bentuk matematika dari masalah-masalah yang timbul berdasarkan faktor-faktor tertentu serta disusun dalam bentuk kalimat matematika. Persamaan diferensial parsial merupakan representasi matematika dari masalah yang bergantung pada dua atau lebih faktor, salah satunya faktor waktu. Metode perturbasi homotopi merupakan metode yang menggabungkan metode analisis homotopi dan menerapkan teknik perturbasi. Solusi akhir dari metode ini adalah berupa deret tak hingga yang selanjutnya diaproksimasi menggunakan prinsip deret taylor. Metode crank nicholson merupakan skema yang menerapakan prinsip beda maju dan beda mundur sekaligus dalam langkah penyelesaiannya. Hasil penelitian ini menunjukan bahwa metode perturbasi homotopi cukup baik menghampiri solusi persamaan diferensial parsial non homogen secara analitik. Sedangkan metode crank nicholson cukup baik untuk menghampiri solusi secara numerik.

Kata Kunci : Persamaan Diferensial, Persamaan Diferensial Parsial, Metode Perturbasi Homotopi, Metode Crank Nicholson.

ABSTRACT

SOLUTION OF NON HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL PARTIAL EQUATIONS WITH HOMOTOPY PERTURBATION AND CRANK NICHOLSON METHOD

By

DARMAWANSYAH

The differential equation is an equation that contain one or more variables. The differential equation is a mathematical form of problems that appear based on fixed factors and arranged to the mathematical sentences form. The partial differential equation is mathematical representation of problems that depends on two or more factors; one of them is time factor. Homotopy perturbation method is method that combining homotopy analysis method and applying perturbation techniques. The final solution of this method is in the form of an infinite series which is subsequently approximated using the principle of Taylor series. Crank Nicholson method is a scheme that applied the principle of forward and backward as well as in step settlement. The result of this research indicated that homotopy perturbation method passably approach the solution of nonhomogeneous partial differential equation analytically. Crank Nicholson method passable to approach the solution numerically.

Keywords: Differential Equation, Partial Differential Equation, Homotopy Perturbation Method, Crank Nicholson Method.

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL NON HOMOGEN DENGAN METODE PERTURBASI HOMOTOPI DAN CRANK NICHOLSON

Oleh

DARMAWANSYAH

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi	: **PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL NON HOMOGEN DENGAN METODE PERTURBASI HOMOTOPI DAN CRANK NICHOLSON**
Nama Mahasiswa	: *Darmawansyah*
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1417031037
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.
NIP. 19720227 199802 1 001

Subian Saidi, S.Si., M.Si.
NIP. 19800821 200812 1 001

2. Mengetahui

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA Universitas Lampung

Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Subian Saidi, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI UNIVERSITAS LAMPUNG FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Prof. Warsito, S.Si., D.E.A., Ph.D.
NIP. 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **01 Februari 2018**

PERNYATAAN

Nama : Darmawansyah

Nomor Induk Mahasiswa : 1417031037

Program Studi : Matematika

Jurusan : Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Non Homogen dengan Metode Perturbasi Homotopi dan Crank Nicholson"** adalah hasil karya saya sendiri. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 01 Februari 2018

Penulis

Darmawansyah
NPM. 1417031037

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Darmawansyah, dilahirkan di Kotabumi pada tanggal 03 Oktober 1998, dan merupakan anak keempat dari empat bersaudara dari pasangan Alm. Bapak Effendi dan Almh. Ibu Herawati.

Penulis menempuh pendidikan di TK Dharma Wanita Bumi Pratama Mandira 2003-2004, SD Negeri 1 Bumi Pratama Madira 2004-2006, SD Negeri 1 Yukum Jaya 2006-2008 serta SD Negeri 4 Bandar Jaya pada tahun 2008-2010, pendidikan menengah pertama di SMP Negeri 3 Way Pengubuan Lampung Tengah pada tahun 2010-2012, pendidikan menengah atas di SMA Negeri 1 Terbanggi Besar Lampung Tengah pada tahun 2012-2014. Pada tahun 2014 penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Program Studi S1 Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung Bandar Lampung melalui jalur SNMPTN.

Penulis menjadi anggota bidang Keilmuan HIMATIKA FMIPA Universitas Lampung pada periode 2015-2016 dan 2016. Pada bulan Januari – Februari 2017 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Buyut Udik Kecamatan Gunung Sugih Kabupaten Lampung Tengah. Pada bulan Juli – Agustus 2017 melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Kantor Pos Indonesia Pahoman Bandar Lampung.

KATA INSPIRASI

"Hidup bukan hanya tentang apa yang ada di masa lalu, masa kini atau masa yang akan datang, tetapi hidup tentang proses bagaimana masa lalu dapat berharga untuk masa yang akan datang."

"Bukan kita penentu hidup karena bukan kita yang merencanakan hidup kita hanya seoarang pemain dalam skenario dimana diawalnya adalah kelahiran dan akhirnya adalah kematian tanpa tahu skenario apa yang berada diantaranya."

"Sesulit apapun hari yang akan kau jalani, cukup yakini satu hal bahwa hari itu pasti akan terlewati."

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil 'alamiin dengan penuh rasa syukur kepada Allah SWT yang telah memberikan petunjuk dan kemudahan untuk menyelelsaikan studi Ku ini, dengan segala kerendahan dan ketulusan hati kupersembahkan karya kecilku ini untuk orang-orang yang selalu mengasihi, menyayangi, dan memotivasiku dalam segala hal.
keluargaKu tercinta bibi serta paman yang selalu mendukung, mendoakan, memberi semangat dan motivasi.

Kedua orang tuaku yang telah tenang disisi-Nya terimakasih telah menghadirkan diriku ke dunia ini serta atas kasih sayang kalian yang belum mampu kubalas.

Kakak-kakak ku tercinta,

Erik Frayoga Adhinata, Bagus Sugiarta, Bagus Sugiarto

yang banyak membantu,menemani, memotivasi dan memberi kasih sayang kepadaku agar aku bisa menjadi seseorang yang bermanfaat bagi orang lain.

Dosen Pembimbing dan Penguji yang sangat berjasa dan selalu memberikan motivasi untuk segera menyelesaikan tugas-tugas Ku.

Sahabat dan teman-teman ku, Terimakasih atas kebersamaan, keceriaan, canda dan tawa serta doa dan semangat yang telah
diberikan kepadaku.

Almamater Universitas Lampung.

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT, karena atas limpahan rahmat, hidayah, serta kasih sayang-Nya Penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Non Homogen dengan Metode Perturbasi Homotopi dan Crank Nicholson" ini. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari dukungan berbagai pihak. Sehingga dengan segala kerendahan dan ketulusan hati Penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S. Si., M. Si. selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan serta saran dan kesedian waktu selama penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Subian Saidi, S. Si., M. Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, serta saran selama penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S. Si., M. Si. selaku Dosen penguji yang telah banyak membantu dalam mengevaluasi serta mengarahkan penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.

4. Bapak Prof. Drs. Mustofa Usman, M. A., Ph. D selaku Pembimbing Akademik yang mengarahkan dan memotivasi selama proses perkuliahan.
5. Ibu Dra. Wamiliana, M. A., Ph. D selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Prof. Warsito, S. Si., D.E.A., Ph. D selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Staff Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
8. Keluarga besar penulis yang senantiasa selalu mendukung, mendo’akan serta memberi semangat kepada penulis.
9. Teman-temanku Nandra, Lucia, Nourma, Vinsensia, Abdillah Zul dan Ni Wayan yang selalu memberi semangat dan keceriaan serta motivasi.
10. Teman-teman seperjuangan, Kasandra, Fitrotin, Riyana, Restika, Septi, Annisa TW, Faranika, Shelvi, Vindi, Nevi, Zhofar, Agus, Ketut, Rahmad, Alvin, Abdurrois, Abror serta seluruh Keluarga Matematika 2014 terimakasih atas kebersamaannya selama ini.
11. Rekan-rekan bidang keilmuan Himatika FMIPA Periode 2015/2016 dan periode 2016 serta rekan pengurus lain yang telah memotivasi penulis.
12. Alamamater Universitas Lampung dan semua pihak yang terlibat dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu-persatu.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun.

Bandar Lampung,   Februari 2018
Penulis

Darmawansyah

DAFTAR ISI

Halaman

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

V. KESIMPULAN DAN SARAN

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Matematika merupakan bidang ilmu yang digunakan untuk menunjang bidang ilmu lain. Pada era globalisasi, diperlukan pemahaman tentang ilmu matematika untuk menyikapi pengaruh dari globalisasi. Permasalahan yang sering timbul berupa beberapa bentuk objek, dalam matematika dikenal pemodelan. Penerapan pemodelan matematika saat ini tidak hanya berfokus pada masalah matematika saja melainkan digunakan pada bidang ilmu lain, contohnya fisika, teknik, pertanian, ekonomi, dan lainnya. Pemahaman dasar tentang model matematika diperlukan untuk membantu memecahkan masalah yang berkaitan dengan pemodelan matematika sehingga memperoleh solusi dari model yang dimiliki.

Persamaan diferensial merupakan suatu persamaan yang memuat satu atau lebih peubah serta menghubungkan fungsi dan turunannya dalam berbagai orde. Persamaan diferensial merupakan bentuk matematika dari masalah-masalah yang timbul berdasarkan faktor-faktor tertentu serta disusun dalam bentuk kalimat matematika. Diferensial berarti perbedaan suatu nilai, sehingga masalah-masalah yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan diferensial merupakan masalah yang memiliki perubahan nilai didalamnya berdasarkan faktor-faktor yang mempengaruhinya. Terdapat dua macam persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial parsial merupakan representasi matematika dari masalah yang bergantung pada dua atau lebih faktor, salah satunya faktor waktu. Penyelesaian umum persamaan diferensial pada umumnya dilakukan dengan pemisahan peubah. Persamaan diferensial akan dikelompokan berdasarkan peubah terikatnya dan masing-masing dicari solusinya. Pada penerapannya tidak semua persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan mudah menggunakan prinsip pemisahan peubah. Persamaan diferensial parsial non homogen salah satu persamaan diferensial parsial yang sedikit sulit diselesaikan dengan prinsip pemisahan peubah. Untuk mengatasi hal tersebut mulai berkembang metode-metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial selain menggunakan prinsip pemisahan peubah. Salah satu metode yang berkembang adalah metode perturbasi homotopi.

Metode perturbasi homotopi merupakan metode yang menggabungkan metode analisis homotopi dan menerapkan teknik perturbasi untuk memperoleh solusi dari persamaan diferensial parsial. Pada penerapannya, persamaan diferensial parsial akan diubah kedalam persamaan deformasi yang selanjutnya diselesaikan dengan menerapkan teknik perturbasi. Solusi akhir dari metode ini adalah berupa deret tak hingga yang selanjutnya diaproksimasi menggunakan prinsip deret taylor.

Pada penerapannya, penggunaan metode-metode untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial parsial memilki keakuratan yang berbeda-beda dalam setiap metodenya. Sehingga, berkembang metode numerik untuk menghampiri solusi dari suatu persamaan. Banyak skema numerik yang berkembang untuk menghampiri solusi numerik suatu persamaan, salah satunya metode Crank Nicholson. Metode Crank Nicholson merupakan skema yang menerapakan prinsip beda maju dan beda mundur sekaligus dalam langkah penyelesaiannya. Karena menggunakan prinsip beda maju serta beda mundur sekaligus dalam langkah penyelesaian metode ini memiliki kesalahan yang relatif yang sedikit kecil daripada metode beda hingga lainnya. Berdasarkan hal tersebut maka metode Crank Nicholson dapat dikatakan cukup baik dalam mengahampiri solusi numeric untuk suatu kasus persamaan diferensial parsial.

Berdasarkan uraian tersebut maka akan diterapkan metode perturbasi homotopi untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial non homogen sebagai metode penyelesaiaan persamaan secara analitik. Untuk memastikan solusi yang didapat merupakan solusi sejati dari persamaan diferensial parsial non homogen maka akan diterapkan metode Crank Nicholson untuk menghampiri solusi dari persamaan tersebut. Sehingga didapat solusi yang akurat untuk penyelesaiaan persamaan diferensial parsial non homogen.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menerapkan metode perturbasi homotopi dan Crank Nicholson pada persamaan diferensial parsial non homogen .
2. Membandingkan solusi penyelesaian persamaan diferensial parsial non homogen dari metode perturbasi homotopi dan Crank Nicholson.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menambah pengetahuan mengenai metode perturbasi homotopi dan Crank Nicholson.
2. Memahami cara menyelesaikan masalah persamaan diferensial parsial non homogen dengan menerapkan metode perturbasi homotopi dan Crank Nicholson dan diharapkan dapat digunakan sebagai referensi untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial non homogen lainnya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan-turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui, yang dapat dituliskan seperti berikut.

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)\ atau\ y' = f(t, y) \tag{2.1}$$

Peubah bebas t menyatakan perubahan waktu dalam model-model dinamika. Peubah tak bebas y menunjukan fungsi yang tidak diketahui yang membentuk solusi dari suatu persamaan difernsial. Solusi persamaan harus memenuhi persamaan diferensial untuk semua nilai t (Farlow dkk, 2002).

2.2 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan dari suatu fungsi tidak diketahui, yang biasa dinotasikan $y(x)$. Persamaan tersebut juga dapat mengandung peubah tak bebas y dalam persamaannya, dari fungsi dengan peubah bebas x atau konstanta. Dengan demikian persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan yang memiliki turunan dengan satu peubah bebas dari suatu fungsi tak diketahui. Sebagai contoh

$$y' = \cos x$$

$$y' + 9y - e^{-2x} = 0 \qquad (2.2)$$

$$y' + y'' - \frac{3}{2}y'^2 = 0$$

(Kreyszig, 2011).

2.3 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diiferensial parsial adalah persamaan yang memiliki peubah tak bebas (fungsi tidak diketahui) dan turunan parsialnya. Peubah tak bebas pada persamaan diferensial parsial, seperti $u = u(x, t)$ atau $u = u(x, y, t)$ merupakan suatu fungsi yang tidak diketahui dengan lebih dari satu peubah bebas. Jika $u = u(x, t)$ maka artinya fungsi u terikat pada peubah bebas x dan peubah bebas t. Contoh persamaan diferensial parsial adalah sebagai berikut.

$$u_t = ku_{xx}$$

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}) \qquad (2.3)$$

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

(Wazwaz, 2009).

2 .4 Metode Analisis Homotopi

Homotopi dideskripsikan sebagai variasi kontinu atau deformasi di matematika. Homotopi didefinisikan suatu penghubung antara dua benda yang berbeda di matematika yang memiliki karakteristik yang sama dalam beberapa aspek.

Metode analisis homotopi adalah teknik semi analitik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial linear dan nonlinear. Metode ini menggunakan konsep homotopi dari topologi untuk menghasilkan solusi konvergen
(Liao, 2011).

Misalkan terdapat persamaan diferensial berikut.

$$O(u) - f(r) = 0 \tag{2.4}$$

Dengan $O(u)$ merupakan persamaan diferensial dengan peubah bebas u dan r serta $f(r)$ merupakan fungsi dengan peubah bebas r atau fungsi konstanta. Dengan cara mengeneralisasi metode homotopi sederhana, disusun persamaan deformasi orde nol dari persamaan (2.3)

$$H(v,p) = (1-p)\,[L(v) - L(u_0)] + p[O(v) - f(r)] \tag{2.5}$$

dengan p adalah parameter homotopi dan u_0 adalah tebakan awal solusi persamaan (2.3) yang memenuhi nilai awal.

Selanjutnya dari persamaan (2.4) akan didiferensialkan sebanyak m kali sehingga pada akhir akan diperoleh solusi sebagai berikut.

$$u(x,t) = u_0\,(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x,t) \tag{2.6}$$

(Adawi dan Awawdeh, 2009).

2.5 Metode Perturbasi Homotopi

Metode perturbasi homotopi adalah metode penyelesaian analitik untuk persamaan diferensial parsial baik linear maupun nonlinear.

Misalkan persamaan diferensial berikut.

$$A(u) - f(r) = 0 \tag{2.7}$$

$A(u)$ merupakan persamaan diferensial dengan peubah bebas u dan r serta $f(r)$ merupakan fungsi dengan peubah bebas r atau fungsi konstanta.

dengan syarat batas

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \tag{2.8}$$

Artinya untuk $A(u, 0)\ = 0$ dan $A(\frac{\partial u}{\partial r}, 0) = 0$.

Secara umum akan ditentukan dua bagian linear dan nonlinear L dan N, dengan L adalah operator linear dan N operator nonlinear. Persamaan (2.6) dapat ditulis menjadi

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \tag{2.9}$$

dengan menerapkan teknik homotopi, dapat disusun persamaan deformasi orde nol sebagai berikut

$$H(v,p) = (1-p)\,[L(v) - L(u_0)] + p[L(v) + N(v) - f(r)] \tag{2.10}$$

dimana $p \in [0,1]$ adalah parameter yang kecil dan u_0 adalah nilai aproksimasi yang memenuhi nilai awal. Berdasarkan persamaan (2.9) didapat

$$H(v,0) = L(v) - L(u_0) = 0 \tag{2.11}$$

$$H(v,1) = L(v) + N(v) - f(r) = 0 \tag{2.12}$$

Proses perubahan nilai p dari 0 ke satu satuan misalnya $v(r,p)$ adalah bentuk dari $u_0(r)$ ke $u(r)$, di dalam topologi, disebut deformasi dan $L(v) - L(u_0)$, $L(v) + N(v) - f(r)$ adalah homotopi. Asumsi dasar untuk solusi persamaan (2.9) dapat dibentuk dalam deret kuasa p

$$v(x,t) = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots \tag{2.13}$$

dengan memilih $p = 1$ sehingga, solusi untuk persamaan diferensial parsial tersebut adalah

$$u(x,t) = \lim_{p\to 1} v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \tag{2.14}$$

(He, 1999).

2.6 Deret Taylor

Deret Taylor adalah bentuk khusus dari suatu fungsi yang dapat digunakan sebagai pendekatan dari integral suatu fungsi yang tidak memilki anti turunan elementer dan dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial (Kreyszig, 2011).

Andaikan f memenuhi

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots \quad (2.15)$$

Untuk semua x dalam suatu interval di sekitar a, maka

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

(Valberg, Purcell dan Rigdon, 2011).

2.7 Metode Numerik

Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan operasi aritmatika. Hasil dari penyelesaian numerik merupakan nilai perkiraan atau pendekatan dari penyelesaian analitik atau eksak. Karena merupakan nilai pendekatan, maka terdapat kesalahan atau galat terhadap nilai eksak. Nilai kesalahan tersebut harus cukup kecil terhadap tingkat kesalahan yang ditetapkan (Triatmodjo, 2002).

2.8 Metode Crank Nicholson

Metode Crank Nicholson adalah salah satu metode numerik yang menggunakan teknik pemberat untuk diskritisasi waktu sekarang (t^n) dan dikritisasi waktu yang akan datang (t^{n+1}) dengan cara yang lebih fleksibel yaitu dengan menggunakan faktor pemberat waktu. Beda hingga terhadap ruang

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i = \theta\left(\frac{f_{i+1}^{n+1}-2f_i^{n+1}+f_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}\right)+(1-\theta)\left(\frac{f_{i+1}^{n}-2f_i^{n}+f_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2}\right) \qquad (2.15)$$

dengan $0 \leq \theta \leq 1$ adalah faktor pemberat waktu

beda hingga terhadap waktu

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_i = \left(\frac{f_{i+1}^{n+1}-f_i^{n}}{\Delta t}\right) \qquad (2.16)$$

(Luknanto, 2003).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2017/2018 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metodologi Penelitian

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Merumuskan contoh kasus pada persamaan diferensial parsial non homogen sebagai berikut.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x,t) \tag{3.1}$$

Syarat Awal

$$u(x,0) = f(x) \tag{3.2}$$

Syarat Batas

$$u(0,x) = h(t) \tag{3.3}$$

(Habermann, 1987)

2. Menentukan beberapa contoh kasus untuk persamaan diferensial parsial non homogen sebagai berikut.

Contoh kasus pertama

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u-e^{-x}(1+2t)=0 \tag{3.4}$$

Syarat Awal

$$u(x,0)=f(x)=x \tag{3.5}$$

Syarat Batas

$$u(0,t)=t$$

$$u(1,t)=t\,e^{-1}+\ e^{-t} \tag{3.6}$$

Contoh kasus kedua

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin x \tag{3.7}$$

Syarat Awal

$$u(x,0)=f(x)=\cos x \tag{3.9}$$

Syarat Batas

$$u(0,t)=e^{-t}$$

$$u(\pi,t)=-e^{-t} \tag{3.10}$$

Contoh kasus ketiga

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x \tag{3.11}$$

Syarat Awal

$$u(x,0) = f(x) = 0 \tag{3.12}$$

Syarat Batas

$$u(0,t) = 1 - e^{-t}$$
$$u(\pi,t) = e^{-t} - 1 \tag{3.13}$$

Dengan solusi eksak dari masing-masing contoh kasus adalah sebagai berikut.

$u(x,t) = t\, e^{-x} + x\, e^{-t}$ (Kasus Pertama)

$u(x,t) = e^{-t} \cos x + (1 - e^{-t}) \sin x$ (Kasus Kedua)

$u(x,t) = (1 - e^{-t}) \cos x$ (Kasus Ketiga)

3. Menentukan operator linear L dan operator nonlinear N pada persamaan langkah ke-1 untuk dikontruksi ke bentuk persamaan deformasi orde ke nol.
4. Mengontruksi persamaan deformasi orde ke nol sebagai berikut

$$H\ (V,u) = L(V) - L\ (u_{0t}) + pL(u_{0t}) + p[N(V) + q(x,t)] \tag{3.14}$$

5. Mengasumsikan solusi persamaan sebagai deret kuasa dengan teknik perturbasi

$$V = V_0 + \ pV_1 + \ p^2V_2 + \cdots \tag{3.15}$$

dengan memilih $p = 1$, sehingga didapat

$$u(x,t) = \lim_{p \to 1} V_0 + V_1 + V_2 + \cdots \tag{3.16}$$

6. Menyamakan koefisien pada orde pangkat p pada langkah ke-3 untuk mendapat solusi persamaan
7. Menyederhakan bentuk solusi yang didapat dengan aproksimasi deret taylor.
8. Menyelesaikan contoh kasus I, II, dan III dengan metode Crank Nicholson
9. Menguji kestabilan metode Crank Nicholson pada contoh kasus I, II, dan III.
10. Membuat grafik solusi untuk solusi contoh kasus I, II, dan III dengan *software* Matlab R2013b
11. Membandingkan solusi analitik yang didapat dari metode perturbasi homotopi dan solusi hampiran yang didapat dari metode Crank Nicholson berdasarkan grafik solusi yang dibentuk..

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Adapun kesimpulan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Metode perturbasi homotopi dan crank nicholson dapat diterapkan dengan baik pada persamaan differensial parsial non-homogen.
2. Solusi metode perturbasi homotopi dan crank nicholson menghampiri solusi eksak dengan galat yang relatif kecil.

5.2 Saran

Pada penelitian ini penulis menggunakan contoh kasus persamaan differensial parsial non homogen yang cukup sederhana diharapkan pada penelitian selanjutnya dapat menggunakan persamaan differensial parsial non homogen yang lebih kompleks serta dapat juga membandingkan dengan metode numerik lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Adawi, A. dan Awawdeh, F. 2009. "A Numerical Method for Solving Nonlinear Integral Equation". *International Mathematical Forum, 805-817.*

Farlow, dkk. 2002. *Differential Equations and Linear Algebra.* Second Edition. Prentice Hall, New York.

Habermann, R., 1987. *Elementary Applied Partial Differential Equations.* Second Edition. Englewood Cliffs, New Jersey.

He, J. H. 1999. "Homotopy Perturbation Technique", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 178: 257-262.

Kreyszig, E. 2011. *Advanced Engineering Mathematics.* Tenth Edition. John Wiley, New York.

Liao, S. 2011. *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equation.* Higher Education Press, Beijing.

Luknanto, D. 2003. *Model Matematika.* Jurusan Teknik Sipil FT UGM, Yogyakarta.

Wazwaz, A. H. 2009. Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory. Higher Education Press, Beijing.