PERBANDINGAN PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI *GENERALIZED* RAYLEIGH (α, λ) MENGGUNAKAN METODE MOMEN, *MAXIMUM LIKELIHOD ESTIMATION* (MLE), DAN *PROBABILITY WEIGHT MOMENT* (PWM)

(Skripsi)

Oleh

TARA YUNIKA FERUSIA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRACT

COMPARISON ESTIMATION OF PARAMETER OF *GENERALIZED* RAYLEIGH DISTRIBUTION (α, λ) USING METHOD OF MOMENT, *MAXIMUM LIKELIHOD ESTIMATION* (MLE), AND *PROBABILITY WEIGHT MOMENT* (PWM)

By

Tara Yunika Ferusia

The Generalized Distribution of Rayleigh is one of the continuous probability distributions with scale parameters α and shape parameters . The predicted Generalized Rayleigh distribution parameters can be obtained using the moment method, Maximum Likelihood Estimation (MLE) method, and Probability Weight Moment (PWM) method. This study will also examine the characteristics of estimators which include unbiased, minimum variety and consistency analytically as well as numerical comparisons. The results show that parameter estimators $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$ are good predictors and the Maximum Likelihood Estimation (MLE) method is the best method for predicting parameters α and λ.

Keywords : *Generalized* Rayleigh Distribution, Method of Moment, *Maksimum Likelihood Estimation* (MLE), *Probability Weighted Moment* (PWM), Unbiased, Minimum Variety, Consistent.

ABSTRAK

PERBANDINGAN PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI *GENERALIZED* RAYLEIGH (α, λ) MENGGUNAKAN METODE MOMEN, *MAXIMUM LIKELIHOD ESTIMATION* (MLE), DAN *PROBABILITY WEIGHT MOMENT* (PWM)

Oleh

Tara Yunika Ferusia

Distribusi *Generalized* Rayleigh merupakan salah satu distribusi peluang kontinu dengan parameter skala α dan parameter bentuk λ . Penduga parameter distribusi *Generalized* Rayleigh dapat diperoleh dengan menggunakan metode momen, metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), dan metode *Probability Weight Moment* (PWM). Penelitian ini juga akan mengkaji tentang karakteristik penduga yang meliputi tak bias, ragam minimum dan kekonsistenan secara analitik serta membandingkannya secara numerik. Berdasarkan hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa penduga parameter $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda})$ merupakan penduga yang baik dan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) merupakan metode terbaik untuk menduga parameter α dan λ .

Kata kunci : Distribusi *Generalized* Rayleigh, Momen, *Maksimum Likelihood Estimation* (MLE), *Probability Weighted Moment* (PWM), Tak Bias, Ragam Minimum, Konsisten.

PERBANDINGAN PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI *GENERALIZED* RAYLEIGH (α, λ) MENGGUNAKAN METODE MOMEN, *MAXIMUM LIKELIHOD ESTIMATION* (MLE), DAN *PROBABILITY WEIGHT MOMENT* (PWM)

Oleh

TARA YUNIKA FERUSIA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **PERBANDINGAN PENDUGAAN PARAMETER DISTRIBUSI *GENERALIZED* RAYLEIGH (α, λ) MENGGUNAKAN METODE MOMEN, *MAXIMUM LIKELIHOD ESTIMATION* (MLE), DAN *PROBABILITY WEIGHT MOMENT* (PWM)**

Nama Mahasiswa : Tara Yunika Ferusia

Nomor Pokok Mahasiswa : 1317031084

Jurusan/Program Studi : Matematika / S1 Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Pembimbing 1	Pembimbing 2
Ir. Warsono, M.S., Ph.D.	Dr. Aang Nuryaman, M.Si
NIP. 19630216 198703 1 003	NIP. 19740316 200501 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika FMIPA

Prof. Wamiliana, MA., Ph.D.
NIP. 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Ir. Warsono, M.S., Ph.D.** ....

   Sekretaris : **Dr. Aang Nuryaman, M.Si** ....

   Penguji
   Bukan Pembimbing : **Prof. Mustofa Usman, Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, D.E.A., Ph.D.
NIP. 197102121995121001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **07 Desember 2017**

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	: Tara Yunika Ferusia
No. Pokok Mahasiswa	: 1317031084
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dengan ini menyatakan bahwa, penelitian ini merupakan hasil karya saya sendiri. Semua hasil penulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung dan sepanjang pengetahuan saya skripsi ini tidak ada dan belum pernah ditulis oleh pihak lain atau tidak berisi materi yang telah dipublikasikan. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil karya pihak lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, Desember 2017

Penulis

Tara Yunika Ferusia
NPM. 1317031084

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Lampung Selatan pada tanggal 01 Juni 1995, dan merupakan anak pertama dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Zakaria Efendi dan Ibu Rukmini.

Penulis memulai pendidikan dari Taman Kanak-Kanak Dharma Wanita Bumi Dipasena Sejahtera, Rawajitu Timur pada tahun 1999. Kemudian penulis melanjutkan ke Sekolah Dasar Negeri 1 Bumi Dipasena Sejahtera pada tahun 2001, Sekolah Menengah Pertama Negeri 3 Kota Metro pada tahun 2007, dan Sekolah Menengah Atas Negeri 2 Kota Metro. Selanjutnya penulis mengikuti Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN) dan diterima sebagai mahasiswi di Universitas Lampung Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswi, penulis pernah aktif dalam berorganisasi dan pernah menjadi anggota Biro Kesekretariatan HIMATIKA (Himpunan Mahasiswa Matematika).

Pada tahun 2016 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata di Desa Muara Asri Kecamatan Mesuji Timur Kabupaten Mesuji selama 60 hari dari bulan Januari – Maret 2016 dan pada bulan Juli – September 2016 penulis juga melaksanakan Kerja Praktik di Badan Pusat Statistik Provinsi Lampung selama 20 hari dengan judul "Analisis Hubungan Jumlah Penduduk Miskin Terhadap Indeks Pembangunan Manusia Provinsi Lampung Tahun 2010 -2015".

Kata Inspirasi

Lakukan yang terbaik, bersikaplah yang baik maka kau akan menjadi orang yang terbaik.

Siapapun yang menempuh suatu jalan untuk mendapatkan ilmu, maka Allah akan memberikan kemudahan jalannya menuju surga.

(H.R Muslim)

Tidaklah penting dari mana anda berasal.

Yang penting adalah ke mana anda akan melangkah.

(Brian Tracy)

Mengetahui saja tidak cukup, kita harus menerapkan.

Keinginan saja tidak cukup, kita harus melakukan.

(Johann Wolfgang von Goethe)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan rasa syukur Kepada Allah SWT

Kupersembahkan karya kecilku ini kepada :

Orang tuaku Zakaria Efendi dan Rukmini

Adik-adikku Farah dan Fathir

Atas semua doa, semangat, motivasi, dan segala dukungan yang diberikan.

Semua Sahabat dan saudara atas semangat dan doa sertas selalu mendukung dan menemani saat suka maupun duka,

Dan Almamaterku tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Puji dan syukur Penulis ucapkan kepada Allah SWT, karena atas rahmat dan karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan Skripsi yang berjudul "**Perbandingan Pendugaan Parameter Distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ) menggunakan Metode Momen, *Maximum Likelihod Estimation* (MLE), dan *Probability Weight Moment* (PWM)**" sebagai salah satu syarat meraih gelar Sarjana Sains pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Terselesaikannya skripsi ini tidak terlepas dari banyaknya pihak yang telah membantu. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Ir. Warsono, M.S., Ph.D., selaku Pembimbing I yang telah memberikan ilmunya serta membimbing penulis selama menyelesaikannya skripsi ini.
2. Bapak Dr. Aang Nuryaman, M.Si., selaku Pembimbing II yang dengan sabar membimbing, memberikan saran dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Prof. Mustofa Usman, M.A., Ph.D., selaku Pembahas atas saran dan bimbingan dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak Drs. Rudi Ruswandi, M.Si., selaku Pembimbing Akademik yang telah memberikan dukungan dan semangat serta arahan selama masa studi.
5. Ibu Dra. Wamiliana, MA., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Bapak Prof. Warsito.S.Si., DEA,. Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika Universitas Lampung.
8. Ayah dan ibuku tercinta serta adik-adikku Farah dan Fathir yang selalu mendoakan, memberi motivasi dan semangat dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Sahabat-sahabatku Nisa Ul Fitri, Oktarini Husaini dan Nurma Nurlita.
10. Teman - teman seperjuangan selama penelitian Oktarini, Hanggita, Ega, Afif, dan Dafri.
11. Keluarga besar Matematika terkhususnya Matematika 2013, yang telah menjalin kekeluargaan selama ini semoga sukses selalu untuk kita semua.
12. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi yang tidak dapat penulis ucapkan satu – persatu.

Semoga Allah memberikan kebaikan dan balasan atas segala yang telah diberikan kepada penulis. Penulis mohon maaf atas segala kekurangan dan ketidaksempurnaan dalam penulisan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak. Aamiin.

Bandar Lampung, Desember 2017
Penulis,

Tara Yunika Ferusia

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Secara umum ilmu statistika dibagi menjadi dua kategori yaitu statistika deskriptif dan statistika inferensial. Statistika deskriptif adalah metode mengatur, merangkum, dan mempresentasikan data dengan cara informatif, sedangkan stastistika inferensial adalah metode yang digunakan untuk mengestimasi sifat populasi berdasarkan pada sampel.

Dalam statistika inferensial pemodelan terhadap suatu fenomena, terutama fenomena yang menghasilkan data tertentu sangat berhubungan dengan menentukan distribusi peluang yang terbaik untuk data tersebut. Tahap awal dalam penentuan distribusi terbaik adalah dengan mengestimasi parameter-parameter yang terdapat dalam distribusi tersebut.

Dalam menentukan penduga yang baik untuk parameter dari suatu populasi tersebut, terdapat beberapa metode pendugaan yang dapat digunakan diantaranya metode momen, metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), metode *Probability Weighted Moment* (PWM), dan lain – lain. *Metode Maximum Likelihood Estimation* (MLE) adalah metode yang sering digunakan dalam mengestimasi parameter. Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) didasarkan pada teori untuk sampel berukuran besar, sehingga metode ini seringkali bekerja kurang baik untuk data dengan ukuran sampel kecil. Beberapa penelitian diantaranya Greenwood (1979) telah memperkenalkan " Metode *Probability Weighted Moment* " sebagai alternatif untuk menghasilkan estimasi parameter dari berbagai distribusi.

Berdasarkan hal tersebut, penulis tertarik untuk membandingkan metode momen, metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), dan metode *Probability Weighted Moment* (PWM) . untuk mengetahui metode terbaik dalam mengestimasi parameter distribusi *generalized* Rayleigh. Distribusi *generalized* Rayleigh merupakan salah satu keluarga distribusi peluang kontinu yang biasa digunakan dalam pemodelan data kelangsungan hidup. Distribusi *generalized* Rayleigh memiliki dua parameter yaitu parameter skala (α) dan parameter bentuk (λ).

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini yaitu :

1. Menentukan penduga parameter (α, λ) dari distribusi *generalized* Rayleigh (α, λ) menggunakan metode momen, metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), dan metode *Probability Weighted Moment* (PWM) .
2. Memeriksa karakteristik penduga (α, λ) dari distribusi *generalized* Rayleigh (α, λ) yaitu ketakbiasan,ragam minimum dan kekonsistenan.
3. Membandingkan secara numerik pendugaan parameter (α, λ) dari distribusi *generalized* Rayleigh (α, λ) menggunakan metode momen, metode *Maximum*

Likelihood Estimation (MLE), dan metode *Probability Weighted Moment* (PWM) .

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang bisa didapatkan dari penelitian ini yaitu :

1. Mendapatkan dugaan parameter (α, λ) dari distribusi *generalized* Rayleigh(α, λ) menggunakan metode momen, metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), dan metode *Probability Weighted Moment* (PWM) .
2. Mengetahui karakteristik penduga parameter dari distribusi *generalized* Rayleigh (α, λ) yang meliputi ketakbiasan, ragam minimum dan kekonsistenan penduga menggunakan metode momen, metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), dan metode *Probability Weighted Moment* (PWM) .
3. Mengetahui metode terbaik untuk mengestimasi distribusi *generalized* Rayleigh(α, λ).

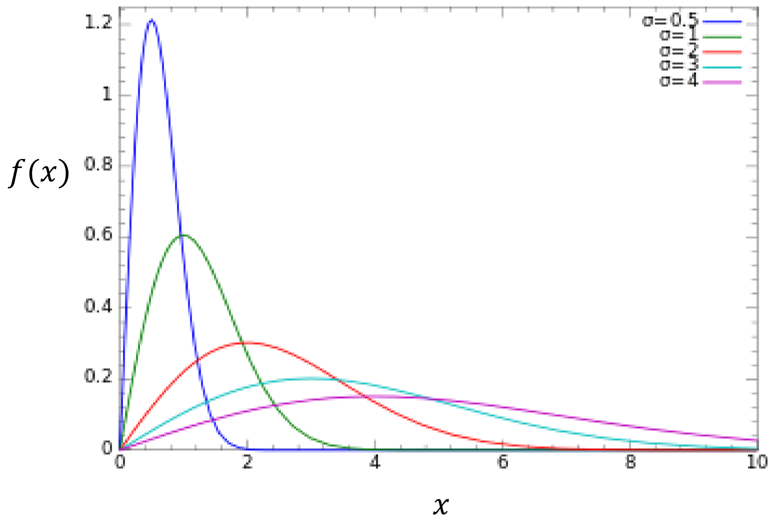
II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Rayleigh

Distribusi Rayleigh diperkenalkan oleh Lord Rayleigh pada tahun 1880. Distribusi Rayleigh merupakan salah satu keluarga distribusi peluang kontinu yang biasa digunakan dalam pemodelan data kelangsungan hidup.

Spiegel dan Stephens (2004) menjelaskan bahwa distribusi Rayleigh memiliki fungsi kepekatan peluang (fkp) sebagai berikut :

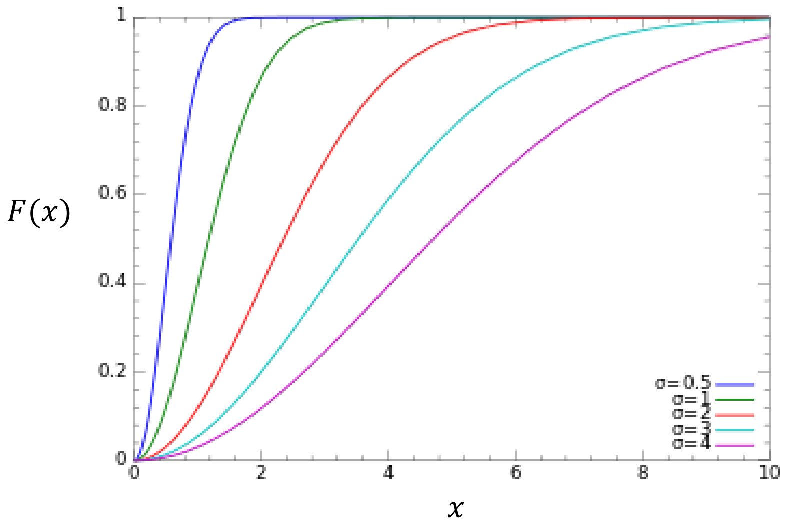
$$f(x, \alpha) = \frac{x}{\alpha^2} e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}} ; \alpha > 0$$



Gambar 1. Grafik Fungsi Kepekatan Peluang Distribusi Rayleigh

Dan memiliki fungsi distribusi kumulatif yaitu :

$$F(x;\alpha) = \frac{2xe^{\frac{-x^2}{\alpha}}}{\alpha}\ ; x > 0; \alpha > 0$$



Gambar 2. Grafik Fungsi Kumulatif Distribusi Rayleigh

2.2 Distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ)

Burr (1942) memperkenalkan 12 bentuk fungsi distribusi kumulatif yang berbeda untuk pemodelan data kelangsungan hidup. Diantara distribusi-distribusi itu Burr Tipe X dan Burr Tipe XII adalah yang paling populer. Surles dan Padgett (2001) memperkenalkan distribusi Burr Tipe X dengan 2 parameter dan dinamai sebagai distribusi *Generalized* Rayleigh. Distribusi *Generalized* Rayleigh merupakan anggota khusus dari distribusi *exponentiated* Weibull.

Raqab (2005) menjelaskan bahwa distribusi *Generalized* Rayleigh dengan dua parameter *(GR)* merupakan salah satu distribusi kontinu yang memiliki dua parameter, yaitu parameter skala (α) dan parameter bentuk (λ). Raqab memisalkan X adalah peubah acak dari distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ) sehingga fungsi kepekatan peluang (fkp) dari distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ) yaitu :

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{2\alpha}{\lambda^2} x e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2} \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2}\right)^{\alpha-1} \; ; x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \qquad (2.1)$$

2.2.1 Nilai Harapan dari Distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ)

Fungsi kepekatan peluang bagi distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ) telah ditunjukkan pada persamaan (2.1), maka nilai harapan dari distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$E(X^r) = \int_0^\infty x^r f(x) dx$$

$$= \int_0^\infty x^r \frac{2\alpha}{\lambda^2} x e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2} (1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2})^{\alpha-1} \, dx$$

$$= \frac{2\alpha}{\lambda^2} \int_0^\infty x^{r+1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2} (1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2})^{\alpha-1} \, dx \qquad (2.2.1)$$

Karena $\int_0^\infty x^{v-1} e^{-\mu x^p} \, dx = \frac{1}{p} \mu^{-\frac{v}{p}} \Gamma\left(\frac{v}{p}\right)$, untuk $p, v, \mu > 0$ (Gradshtein and Ryzhnik, 2000) , dan $(1 - z)^{b-1} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \Gamma(b)}{\Gamma(b-k)k!} z^k$, untuk $|z| < 1$ maka persamaan (2.2.1) menjadi :

$$= \frac{2\alpha}{\lambda^2} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha - k) k!} \int_0^\infty x^{r+1} e^{-(k+1)\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2} dx$$

$$= \frac{2\alpha}{\lambda^2} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha - k) k!} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{(k+1)}{\lambda^2} \right)^{-\frac{r+2}{2}} \Gamma\left(\frac{r+2}{2} \right) \right)$$

$$= \frac{\alpha}{\lambda^2}\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{(k+1)}{\lambda^2}\right)^{-\frac{r+2}{2}}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k)k!}$$

$$= \frac{\alpha}{\lambda^{-r}}\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+1)^{-\frac{r+2}{2}}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k)k!}$$

Ambil r = 1, maka kita peroleh:

$$E(X) = \alpha\lambda\,\Gamma\left(\frac{1+2}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+1)^{-\frac{1+2}{2}}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k)k!}$$

$$= \alpha\lambda\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+1)^{-\frac{3}{2}}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k)k!}$$

Jadi nilai harapan dari distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ) adalah

$$E(X) = \alpha\lambda\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+1)^{-\frac{3}{2}}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k)k!} \quad (2.2)$$

Selanjutnya, untuk $E(X^2)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$E(X^2) = \frac{\alpha}{\lambda^{-2}}\Gamma(2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+1)^{-2}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k)k!}$$

$$= \alpha\lambda^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+1)^{-2}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k)k!}$$

Jadi nilai $E(X^2)$ dari distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ) adalah

$$E(X^2) = \alpha\lambda^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+1)^{-2}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k)k!} \quad (2.3)$$

Menurut Kundu dan Raqab (2005), nilai $E(X^2)$ juga dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$E(X^2) = (\lambda^2)\big(\psi(\alpha+1) - \psi(1)\big)$$

2.2.2 Ragam dari Distribusi *Generalized* Rayleigh $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})$

Ragam dari distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ) dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.2) dan (2.3) yaitu sebagai berikut:

$$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= \alpha\lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)^{-2} \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k)k!} - \left[\alpha\lambda\, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)^{-\frac{3}{2}} \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k)k!}\right]^2$$

$$= \alpha\lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)^{-2} \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k)k!} \text{ x } \left(1 - \left[\alpha\left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)^{-1} \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k)k!}\right]\right) \quad (2.4)$$

2.3 Pendugaan Parameter

Dalam statistik inferensia dibutuhkan pemahaman mengenai kaidah-kaidah pengambilan kesimpulan tentang suatu parameter populasi berdasarkan karakteristik sampel. Hal ini membangun apa yang disebut dengan pendugaan titik dari fungsi kepekatan peluang parameter yang tidak diketahui.

Definisi 2.1

Misal $X_1, X_2, \ldots, X_n$ berdistribusi bebas stokastik identik dengan fungsi kepekatan peluang $f\,(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$. Suatu statistik $U(X_1, X_2, \ldots, X_n) = U(X)$ yang digunakan untuk menduga $g(\theta)$ disebut sebagai penduga bagi $g(\theta)$.

Untuk menduga parameter dari suatu distribusi dapat dilakukan dengan beberapa metode. Dalam penelitian ini pendugaan parameter distribusi *Generalized* Rayleigh akan dilakukan dengan menggunakan metode momen, metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan metode *Probability Weight Moment* (PWM).

2.4 Metode Momen

Definisi 2.2

Misalkan $X_1, \dots, X_n$ merupakan sampel dari populasi yang memiliki fungsi kepekatan peluang $f(x|\theta_1, \dots, \theta_k)$. Metode pendugaan dengan momen dilakukan dengan cara menyamakan k momen pertama sampel dengan k momen pertama yang berkaitan dari populasi dan menyelesaikan sistem persamaan tersebut secara bersama.

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^1, \quad && \mu'_1 = EX^1 \\ m_2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \quad && \mu'_2 = EX^2 \\ &\vdots && \vdots \\ m_k &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \quad && \mu'_k = EX^k \end{aligned}$$

Momen populasi μ'_j sering ditulis sebagai fungsi dari $(\theta_1, \dots, \theta_k)$, yaitu $\mu'_j(\theta_1, \dots, \theta_k)$. Metode momen penduga $\left(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k\right)$ dari $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ di dapat dengan menyelesaikan sistem persamaan untuk $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ dalam notasi $(m_1, \dots, m_k)$ sebagai berikut :

$$m_1 = \mu'_1(\theta_1, \dots, \theta_k),$$

$$m_2 = \mu'_2(\theta_1, \dots, \theta_k),$$

$$\vdots$$

$$m_k = \mu'_k(\theta_1, \dots, \theta_k).$$

(Casella Berger, 1990)

2.5 Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)

Definisi 2.3

Misalkan $X_{1,}X_2,\ldots,X_n$ adalah sampel acak berukuran n yang saling bebas stokastik identik dari suatu distribusi yang mempunyai fungsi kepekatan peluang $f\ (x;\ \theta), \theta\ \in\ \Omega$. Fungsi kepekatan peluang bersama dari $X_{1,}X_2,\ldots,X_n$ adalah $f\ (x_1;\ \theta)\ f\ (x_2;\ \theta)\ldots f\ (x_n;\ \theta)$ yang merupakan fungsi kemungkinan (*Likelihood Function*).

Untuk $x_{1,}x_2,\ldots,x_n$ tetap, fungsi kemungkinan merupakan fungsi dari θ dan dilambangkan dengan $L(\theta)$ dan dinotasikan sebagai berikut:

$$L(\theta)\ =\ \prod_{i=1}^{n} f\ (x_i\,;\theta)$$

$$=\ f\ (x_1;\ \theta)\ f\ (x_2;\ \theta)\ldots f\ (x_n;\ \theta), \theta\ \in\ \Omega$$

Definisi 2.4

$L(\theta)\ =\ f\ (x_{1,}x_2,\ldots,x_n\,;\ \theta),\ \ \theta\ \in\ \Omega$ merupakan fungsi kepekatan peluang dari $x_{1,}x_2,\ldots,x_n$. Untuk hasil pengamatan $x_{1,}x_2,\ldots,x_n$, nilai $\hat{\theta}$ berada dalam Ω ($\hat{\theta}\ \in\ \Omega$), dimana $L(\theta)$ maksimum yang disebut sebagai *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dari θ. Jadi, $\hat{\theta}$ merupakan penduga dari θ.

Jika $f\ (x_{1,}x_2,\ldots,x_n\,;\ \theta)\ =\ \max\ f\ (x_{1,}x_2,\ldots,x_n\,;\ \theta),\ \ \theta\ \in\ \Omega$ maka untuk memaksimumkan $L(\theta)$ terhadap parameternya dengan mencari turunan dari $L(\theta)$. Biasanya mencari turunan dari $L(\theta)$ terhadap parameternya relatif sulit, sehingga dalam penyelesainnya dapat diatasi dengan menggunakan logaritma atau fungsi ln dari $L(\theta)$ yaitu: $\ln L(\theta))\ =\ \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i\,;\ \theta)$. Untuk memaksimumkan ln $L(\theta)$

adalah dengan mencari turunan dari ln $L(\theta)$ terhadap parameternya, kemudian hasil turunannya dibuat sama dengan nol.

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

(Hogg and Craig, 1995)

2.6 Metode *Probability Weighted Moment* (PWM)

Definisi 2.5

Secara umum metode *Probability Weighted Moment* (PWM) didefinisikan sebagai berikut:

$$M_{r,s,t} = E[(X(F))^r(F(x))^s(1-F(x))^t]$$

Dimana

X(F) = invers distribusi

$F(x)$ = distribusi fungsi kumulatif

r,s,t = bilangan real

Untuk nilai *s* = *t* = 0 dan *r* adalah bilangan bulat tidak negatif, maka dapat ditulis :

$$M_{r,0,0} = E[(X(F))^r(F(x))^0(1-F(x))^0]$$

(Greenwood, *et al.*, 1979).

Adapun kelas bagian dari fungsi PWM dengan X(F) adalah invers dari fungsi distribusi kumulatif maka fungsi PWM adalah

$$M_{1,s,t}(r = 1; s = 0,1,2,\dots; t = 0,1,2,\dots)$$

Sementara $M_{1,s,t}$ dapat dibagi menjadi dua bagian, yaitu $s = 0$ ($M_{1,0,t}$) dan $t = 0$ ($M_{1,s,0}$), sehingga fungsi diatas dapat dinyatakan dalam bentuk

$M_{1,0,t} = E[X(F)(1-F(x))^t]$ dimana $M_{1,0,t} = \int_0^1 [X(F)(1-F(x))^t] dF$ dan $M_{1,s,0} = E[X(F)(F(x))^s]$ dimana $M_{1,s,0} = \int_0^1 [X(F)(F(x))^s]\, dF$

Adapun penduga tak bias bagi M_s diperoleh berdasarkan sampel tataan $x_{(1)} < x_{(2)} < \cdots < x_{(n)}$ dari sampel berukuran n, dan s biangan positif dengan menyelesaikan pesamaan

$$\widehat{M}_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-t} \frac{\binom{i-1}{s}}{\binom{n-1}{s}} x_{(i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-t} \frac{(i-1)\ldots(i-r)}{(n-1)\ldots(n-r)} x_{(i)}$$

Selanjutnya dengan mengganti M_s dengan $\widehat{M}_s$ akan didapatkan penduga parameter dari setiap parameter distribusi (Greenwood, 1979).

2.7 Metode Newton Raphson

Apabila dalam proses pendugaan parameter didapat persamaan akhir yang non linear biasanya diperoleh pendugaan parameter yang tidak dapat diselesaikan secara analitik, sehingga perlu diselesaikan dengan cara numerik. Salah satu cara yang digunakan adalah dengan teknik iteratif yaitu metode Newton Raphson. Jika θ_0 merupakan nilai awal dari θ atau θ_0 merupakan nilai ke 1 dari , maka dapat dimisalkan $\theta_0 = \theta_1$ dan $\theta_1 = \theta_{i+1}$ dengan i awal 0.

Metode ini dapat diperluas untuk menyelesaikan sistem persamaan dengan lebih dari satu parameter. Misal $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_p$, maka iterasinya sebagai berikut:

$$\hat{\theta}_{i+1} = \hat{\theta}_i - \left[\left(H(\theta)\right)^{-1} . g(\theta)\right]$$

Vektor gradien atau vektor turunan pertama terhadap parameternya dan lambangnya dengan $g(\theta)$yaitu:

$$g(\theta) = \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}$$

Matriks Hessian atau matriks turunan kedua dari fungsi logaritma natural terhadap parameter θ_1 dan θ_2 dilambangkan dengan $H(\theta)$ yaitu:

$$H(\theta) = \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta\, \partial \theta'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_1\, \partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_n\, \partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_n^2} \end{bmatrix}$$

(Seber and Wild, 2003).

2.8 Sifat-Sifat Penduga yang Baik

Untuk mengetahui karakteristik penduga dari distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ), maka harus memenuhi sifat – sifat penduga yang baik diantaranya sebagai berikut:

2.8.1 Tak Bias

Penduga $U(\boldsymbol{X}) = U(X_1, X_2, \dots, X_n)$ dikatakan sebagai penduga tak bias bagi $g(\boldsymbol{\theta})$ jika

$$E(U(X)) = g(\theta), \forall\theta \in \Omega$$

(Hoog and Craig, 1995).

2.8.2 Sifat Efisien

Suatu penduga dikatakan efisien jika ragamnya minimum. Sifat ragam minimum suatu penduga didefinisikan sebagai berikut.

Jika $U(X)$ merupakan penduga bagi $g(\boldsymbol{\theta})$, dan ada $U(X_1)$ sebarang penduga bagi $g(\boldsymbol{\theta})$, maka $U(X)$dikatakan penduga dengan ragam minimum jika

$$Var(U(X)) \leq Var(U(X_1))$$

(Hoog and Craig, 1995).

Ragam minimum suatu penduga juga dapat diketahui dengan menggunakan matriks Informasi Fisher dan pertidaksamaan Rao-Cramer dengan definisi sebagai berikut.

2.8.2.1 Informasi Fisher

Menurut Hogg dan Craig (1995), Informasi Fisher dinotasikan dengan $I(\theta)$, dimana:

$$I(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial \ln f\ (x;\theta)}{\partial \theta}\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \ln f\ (x;\theta)}{\partial \theta}\right]^2 f(x;\theta)dx$$

Atau $I(\theta)$ juga dapat dihitung dengan:

$$I(\theta) = -E\left\{\left[\frac{\partial^2 \ln\ f(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right]\right\} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \ln\ f(x;\theta)}{\partial \theta^2} f(x;\theta)dx$$

Informasi fisher dalam sampel acak dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$I(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial \ln L(x;\theta)}{\partial \theta}\right]^2\right\} = nE\left\{\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right]^2\right\}$$

2.8.2.2 Matriks Informasi Fisher

Menurut Hogg dan Craig (1995), misalkan sampel acak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dari suatu distribusi dengan fungsi kepekatan peluang $f(x; \theta_{1,} \theta_2); (\theta_{1,} \theta_2) \in \Omega$. Tanpa memperhatikan kondisi yang rinci, misalkan dikatakan bahwa ruang dari X dimana $f(x; \theta_{1,} \theta_2) > 0$ yang tidak meliputi θ_1 dan θ_2, dan dapat diturunkan di bawah integral. Sehingga matriks informasi fisher adalah sebagai berikut:

$$I = -n \begin{bmatrix} E\left[\dfrac{\partial^2 \ln f(x; \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1}\right] & E\left[\dfrac{\partial^2 \ln f(x; \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right] \\ E\left[\dfrac{\partial^2 \ln f(x; \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right] & E\left[\dfrac{\partial^2 \ln f(x; \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2}\right] \end{bmatrix}$$

atau

$$I = - \begin{bmatrix} E\left[\dfrac{\partial^2 \ln L(x; \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1}\right] & E\left[\dfrac{\partial^2 \ln L(x; \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right] \\ E\left[\dfrac{\partial^2 \ln L(x; \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right] & E\left[\dfrac{\partial^2 \ln L(x; \theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2}\right] \end{bmatrix}$$

2.8.2.3 Pertidaksamaan *Rao-Cramer*

Misalkan Y merupakan penduga tak bias dari suatu parameter θ dalam kasus pendugaan titik. Statistik y disebut penduga efisien dari θ jika dan hanya jika ragam dari Y mencapai batas bawah *Rao-Cramer*.

Menurut Elandt-Johnson (1971), ketidaksamaan *Rao-Cramer* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Var(\hat{\theta}) \geq -\frac{1}{nE\left(\dfrac{\partial^2 \ln f(x; \theta)}{\partial \theta^2}\right)} = -\frac{1}{E\left(\dfrac{\partial^2 \ln L(x; \theta)}{\partial \theta^2}\right)}$$

atau

$$Var(\hat{\theta}) \geq -\frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]} = -\frac{1}{E\left[\left(\frac{\partial \ln L(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]}$$

Karena

$$-nE\left(\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right) = nE\left[\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{\partial \ln L(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right] \quad = I(\theta)$$

Maka

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I(\theta)},$$

dimana $\frac{1}{I(\theta)}$ disebut sebagai *Lower bound of the variance* dari penduga θ.

2.8.3 Konsisten

U(**X**) dikatakan sebagai penduga konsisten bagi $g(\theta)$ jika $U(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{p} g(\theta)$ untuk $\rightarrow \infty, \forall\, \theta \in \Omega$, yaitu bila:

$$\lim_{n\rightarrow\infty} P\{|U(X) - g(\theta)| \geq \varepsilon\} = 0$$

atau

$$\lim_{n\rightarrow\infty} P\{|U(X) - g(\theta)| < \varepsilon\} = 1$$

(Hogg and Craig, 1995).

Teorema 2.1 (Teorema *Chebysev*)

Misalkan X variabel acak dengan rata-rata μ dan ragam σ^2. Untuk $\forall\, \varepsilon > 0$,

$$P\{|X - \mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Atau

$$P\{|X-\mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

(Larsen dan Marx, 2012).

Teorema 2.2

Jika $U(\boldsymbol{X}) = U(X_1, X_2, \dots, X_n)$ merupakan rangkaian dari penduga suatu parameter θ, maka berlaku:

- $\lim_{n\to\infty} Var_\theta\, U(\boldsymbol{X}) = 0$
- $\lim_{n\to\infty} Bias\, U(\boldsymbol{X}) = 0$

Untuk $\forall\theta \in \Theta$, $U(\boldsymbol{X})$ merupakan rangkaian penduga konsisten dari suatu parameter θ.

(Casella and Berger, 2002).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini akan dilakukan pada semester genap tahun akademik 2016/2017, bertempat di jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah peneliti dalam melakukan penelitian ini yaitu :

1. Menduga parameter distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ) menggunakan metode momen
2. Menduga parameter distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ) menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dengan langkah-langkah sebagai berikut :
   - Membentuk fungsi kemungkinan yang berasal dari fungsi kepekatan peluang distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ).
   - Mengubah fungsi kepekatan peluang ke dalam bentuk logaritma natural (ln).

- Mencari penduga parameter dengan mencari turunan pertama dari logaritma natural fungsi kepekatan peluang terhadap parameter yang akan diduga dan disamadengankan nol.
- Untuk penduga parameter yang tidak dapat diselesaikan secara analitik maka, dapat diselesaikan menggunakan metode Newton Raphson dengan cara mencari turunan kedua terhadap masing-masing parameter dan membentuk matriks Hessiannya.

3. Menduga parameter distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ) menggunakan metode *Probability Weighted Moment* (PWM) dengan langkah-langkah sebagai berikut :
   - Mencari fungsi distribusi kumulatif (CDF) dari distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ) .
   - Mencari invers dari distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ) .
   - Mencari bentuk momen ke-r atau fungsi PWM.
   - Mencari penduga parameter (α, λ) dari distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ) dengan menggunakan metode PWM secara analitik.
4. Memeriksa karakteristik yang terdiri dari ketakbiasan, ragam minimum , dan kekonsistenan penduga parameter (α, λ) pada distribusi *Generalized* Rayleigh (α, λ).
5. Melakukan simulasi menggunakan software R versi 3.3.2 , dengan langkah-langkah sebagai berikut :
   - Membuat kurva fungsi kepekatan peluang dengan nilai α dan λ yang akan diduga.

- Membangkitkan data berukuran 100, 200, 250, dan 400 dengan masing-masing pengulangan sebanyak 100 kali.
- Mencari dan membandingkan nilai ketakbiasan, ragam minimum, dan kekonsistenan dugaan parameter dari penduga yang telah dicari menggunakan metode momen, metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), dan metode *Probability Weighted Moment* (PWM) .

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Dari hasil penelitian ini dapat diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Pendugaan parameter *Generalized* Rayleigh (α, λ) dengan metode momen dan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) menghasilkan pendugaan parameter α dan λ tidak dapat diselesaikan secara analitik , sehingga diselesaikan dengan cara numerik. Sedangkan pendugaan parameter *Generalized* Rayleigh (α, λ) dengan metode *Probability Weight Moment* (PWM) adalah sebagai berikut :

$$\hat{\alpha} = \frac{\sqrt{8}M_0 + M_0 - \sqrt{8}M_1}{2M_0}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{2{M_0}^2}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left(\sqrt{8}M_0 + M_0 - \sqrt{8}M_1\right)}$$

2. Secara analitik, penduga parameter parameter α dan λ memenuhi karakteristik yang meliputi tak bias, ragam minimum, dan konsisten.
3. Berdasarkan hasil simulasi dapat dilihat bahwa nilai tak bias, ragam minimum dan *Mean Square Error* yang dihasilkan menunjukkan bahwa penduga parameter dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) memiliki hasil yang paling baik dibandingkan dengan pendugaan dengan metode momen dan *Probability Weight Moment* (PWM) untuk setiap ukuran sampel.

DAFTAR PUSTAKA

Burr, I.W., 1942. “Cumulative Frequency Distribution”, *Annals of Mathematical Statistics*, 13: 215-232

Casella, G. dan Berger, R.L., 1990. *Statistical Inference*. Wadsworth, Inc., California.

Greenwood, J.A., *et al* . 1979. Probability-weighted moments: definition and relation to parameters of several distributions expressable in inverse form, *Water Resources Research*, **15,** 1049-1054.

Hogg, R.V. and Craig, A.T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics*. Edisi kelima. Prentice-Hall Inc., New Jersey.

Kundu, D. And Raqab, M.Z. 2005. Generalized Rayleigh distribution: different methods of estimation, Computational Statistics and Data Analysis, 49, 187-200

Raqab, Muhammad Z. 2005. “Discriminating between the Generalized Rayleigh and Weibull distributions”. Publishing Statistics 41(6), 505 – 515

Seber and Wild. 2003. *Nonlinear Regression.* New Jersey. The United States of America

Spiegel, Murray dan Larry J. Stephens. 2004. “Schaum’s Outlines of Theory and Problems of Statistics Third Edition”. PT. Gelora Aksara

Surles, J.G. and W.J Padgett, 2004. “Some properties of a scaled Burr type X distribution”, *to appear in the Journal of Statistical Planning and Inference.*