KARAKTERISTIK PENDUGA *HIERARCHICAL BAYES* PADA MODEL BETA BINOMIAL DENGAN *SOFTWARE* R

(Skripsi)

Oleh

GALUH ISNAENA SETYA PUTRI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PEGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

ABSTRAK

KARAKTERISTIK PENDUGA *HIERARCHICAL BAYES* PADA MODEL BETA-BINOMIAL DENGAN *SOFTWARE* R

Oleh

GALUH ISNAENA SETYA PUTRI

Penelitian ini menggunakan metode *Hierarchical Bayes* (HB), salah satu metode dalam *small area estimation*. Tujuan penelitian ini adalah mengkaji bias dan ragam metode HB dengan model Beta-Binomial. Proses perhitungan integral multi-dimensi dalam inferensi Bayes diselesaikan menggunakan *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) dengan menerapkan algoritma *Gibbs sampling* dan *Metropolis Hasting* (MH) *within Gibbs*, dan dilakukan simulasi menggunakan *software* R. Hasil pendugaan HB dibandingkan dengan pendugaan langsung , hasil pendugaan menunjukkan bahwa penduga HB memberikan dugaan yang bias dengan nilai bias yang kecil, dan nilai ragam yang lebih kecil dibandingkan penduga langsung.

Kata Kunci : *Hierarchical Bayes,* Gibbs *Sampling,* MH *within Gibbs*

ABSTRACT

CHARACTERISTICS OF HIERARCHICAL BAYES IN BETA-BINOMIAL MODELS WITH SOFTWARE R

By

GALUH ISNAENA SETYA PUTRI

This research uses Hierarchical Bayes (HB) method, one of method in small area estimation. The purpose of this research is to study the bias and variety of HB method with Beta-Binomial model. The process of calculating the multi-dimensional integral in Bayes inference was solved using Markov Chain Monte Carlo (MCMC) by applying the Gibbs sampling algorithm and the Metropolis Hasting (MH) within Gibbs, and simulated using software R. The HB estimate result was compared with the direct estimate, that HB estimator provide biased with small biased values, and the variance which smaller than direct estimate.

Keyword : Hierarchical Bayes, Gibbs Sampling, MH within Gibbs.

KARAKTERISTIK PENDUGA *HIERARCHICAL BAYES* PADA MODEL BETA BINOMIAL DENGAN *SOFTWARE* R

Oleh

GALUH ISNAENA SETYA PUTRI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA SAINS

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2018

Judul Skripsi : **KARAKTERISTIK PENDUGA *HIERARCHICAL BAYES* PADA MODEL BETA-BINOMIAL DENGAN *SOFTWARE* R**

Nama Mahasiswa : Galuh Isnaena Setya Putri

Nomor Pokok Mahasiswa : 1317031034

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Widiarti, S.Si., M.Si.
NIP 19800502 200501 2 003

Subian Saidi, S.Si., M.Si.
NIP 19800821 200812 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Widiarti, S.Si., M.Si** ....

Sekretaris : **Subian Saidi, S.Si., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Ir. Warsono., M.S., Ph.D.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Prof. Warsito, S.Si., DEA, Ph.D
NIP 19710212 199512 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **25 Januari 2018**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama Mahasiswa	: **Galuh Isnaena Setya Putri**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1317031034**
Jurusan	: **Matematika**
Fakultas	: **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

Menyatakan bahwa skripsi yang berjudul "**Karakteristik Penduga *Hierarchical Bayes* Pada Model Beta-Binomial dengan *Software* R**" merupakan hasil karya saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya bukan merupakan hasil yang telah dipublikasikan atau ditulis orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagai persyaratan penyelesaiaan studi pada universitas atau institut lain.

Bandar Lampung, Januari 2018

METERAI TEMPEL
6AF89AEF785165791
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Galuh Isnaena Setya Putri
NPM. 1317031034

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Pancoran, Jakarta Selatan pada tanggal 04 Desember 1995, sebagai anak ketiga dari ketiga bersaudara, dari Bapak Sukarman dan Ibu Lilis Hidayati.

Penulis telah menempuh pendidikan di Taman Kanak-kanak (TK) Raudhotul Ulum Jakarta Selatan yang diselesaikan tahun 2001, Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SDN 1 Gaya Baru VI pada tahun 2007, Sekolah Menengah Pertama (SMP) diselesaikan di SMPN 1 Seputih Surabaya pada tahun 2010, dan Sekolah Menengah Atas (SMA) diselesaikan di SMAN 1 Seputih Surabaya pada tahun 2013.

Tahun 2013, penulis terdaftar sebagai Mahasiswi Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN. Selama menjadi mahasiswi penulis bergabung dalam organisasi Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA) sebagai anggota bidang dana dan usaha periode 2014-2015.

Pada tahun 2015, penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di Badan Pusat Statistika (BPS) Provinsi Lampung. Dan pada Juli – Agustus 2016 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kelurahan Sendang Agung, Kecamatan Bandar Mataram, Lampung Tengah.

PERSEMBAHAN

Yang tercinta, Allah Subhanahu Wata'ala
Terima kasih untuk rahmat yang tiada henti

Skripsi ini penulis persembahkan untuk :

Bapak Sukarman dan Ibu Lilis Hidayati
Bapak dan mamak tercinta

Adam hastawa Putra
Mamas tercinta

Galih Isnaeni Setya Putri
Kembaran tercinta

Terima kasih telah senantiasa mendoakanku, selalu memberikan semangat, dan dorongan dalam bentuk moril maupun materil.

SANWACANA

Alhamdulillahirabbil'aalamin, segala puji dan syukur atas nikmat dan kebaikan dari Allah yang Maha pengasih lagi Maha penyayang, penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Karakteristik Penduga *Hierarchical Bayes* Pada Model Beta-Binomial dengan *Software* R".

Penulisan skripsi ini merupakan tugas akhir selama menempuh pendidikan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Terselesaikannnya skripsi ini tidak terlepas dari bantuan dan kerja sama dari berbagai pihak yang telah mendukung dan membantu. Pada kesempatan kali ini penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing pertama yang telah memberikan nasihat, pengarahan, motivasi, dan bimbingan dalam penyelesaian skripsi ini.
2. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing kedua yang telah memberikan bimbingan, semangat, dan saran dalam penyelesaian skripsi ini.
3. Bapak Warsono, Ph.D. selaku pembahas yang telah memberikan nasihat, saran, dan koreksi sehingga dapat terselesaikan skripsi ini.
4. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis dari awal perkuliahan hingga sekarang.

5. Ibu Prof. Wamiliana, Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Dr. Warsito, DEA selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang telah memberikan ilmu dan bantuan dari awal perkuliahan sampai saat ini.
8. Bapak, mamak, twin Galih, mas Adam, dan keluarga besar, yang selalu mendoakan, memberikan dukungan, dan semangat.
9. Sahabat terbaik di Matematika 2013 : Rifa, Nina, Dita, Tiyas, Lia, Nafisa, Hanifah, Aulianda, Imelda. Teman seperjuangan *small area* : Shela, dela, Chaterine, teman-teman Matematika 2013. Terima kasih atas segala doa, kesenangan, bantuan, dan semangat.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan yang disebabkan keterbatasan kemampuan dan pengetahuan yang dimiliki penulis. Oleh karena itu penulis siap menerima kritik dan saran yang membangun. Semoga ilmu yang ada pada skripsi ini bermanfaat bagi penulis, pembaca maupun semua pihak yang membutuhkan.

Bandar Lampung, Januari 2018
Penulis

Galuh Isnaena Setya Putri

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Survai merupakan cara pengumpulan data yang melibatkan seluruh elemen populasi. Dalam banyak hal, survai tidak mungkin melibatkan keseluruhan elemen populasi, karena akan memerlukan waktu, tenaga dan biaya yang cukup besar. Selain itu terkadang hal tersebut tidak seimbang dengan manfaat dari informasi yang dikumpulkan. Oleh karena itu saat ini telah banyak praktisi statistika yang menangani dua permasalahan utama dalam survai, yaitu pengembangan teknik penarikan sampel dan pengembangan metode estimasi parameter populasi. Metode estimasi parameter populasi yang dikembangkan yaitu dengan mengoptimalkan data yang telah tersedia dengan metode *small area estimation.*

Small area estimation (pendugaan area kecil) merupakan suatu teknik statistika untuk memperoleh penduga subpopulasi pada area kecil, dimana pendugaan langsung tidak dapat diandalkan disebabkan tidak mampu menghasilkan penduga yang baik. Dengan demikian pendugaan area kecil dilakukan menggunakan pendugaan tidak langsung, dengan cara "meminjam kekuatan" atau memanfaatkan variabel-variabel pendukung dalam menduga parameter. Metode pendugaan tidak langsung yang sering digunakan untuk memperoleh pendugaan area kecil dengan menerapkan kaidah Bayes adalah *Empirical Bayes* (EB) dan *Hierarchical Bayes* (HB). Metode untuk pendugaan area kecil lainnya adalah *Best Linear Unbiased Prediction* (BLUP), dan *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP).

Menurut Satriya, Iriawan, dan Sutijo (2015), pada metode EB parameter model diestimasi dari distribusi marginal data kemudian inferensi didasarkan pada distribusi posterior yang diestimasi. Dalam metode HB, pendugaan parameter didasarkan pada distribusi posterior dimana parameter diestimasi dengan rata-rata posterior dan presisinya diukur dengan varian posteriornya. Dibandingkan dengan EB, setelah distribusi posterior dari HB diperoleh maka dapat langsung digunakan untuk seluruh inferensia. Selain itu jika dibandingkan dengan BLUP, HB dinilai mempunyai *Mean Square Error* (MSE) yang lebih kecil (Ghosh dan Rao, 1994).

Menurut Rao (2003), pada kenyataannya $E(\widehat{\emptyset}^{HB} - \emptyset)$ seringkali bias dimana $\widehat{\emptyset}^{HB}$ merupakan penduga HB. Hal tersebut membuat penulis tertarik untuk mengkaji bias, ragam, dan MSE dari penduga HB dengan model Beta-Binomial. Dalam penelitian ini kajian simulasi dilakukan dengan *software* R.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah

1. Mengkaji bias dan ragam metode *Hierarchical Bayes* pada pendugaan area kecil dengan model Beta-Binomial.
2. Mengevaluasi *Mean Square Error* (MSE) metode *Hierarchical Bayes* pada pendugaan area kecil.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah menambah pengetahuan tentang karakteristik penduga *Hierarchical Bayes* pada pendugaan area kecil dengan model Beta-Binomial.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 *Small Area Estimation*

Small Area Estimation (SAE) adalah suatu teknik statistika untuk menduga parameter subpopulasi dengan ukuran sampel kecil. Menurut Rao (2003), suatu area dikatakan besar apabila ukuran contoh pada area tersebut mampu menghasilkan presisi pendugaan yang baik dengan pendugaan langsung. Sebaliknya, suatu area dikatakan “kecil” apabila ukuran contoh pada area tersebut tidak cukup untuk menunjang penduga langsung agar mampu menghasilkan presisi pendugaan yang baik.

Secara umum, *small area estimation* dapat dikatakan sebagai suatu model untuk menduga parameter pada suatu area yang relatif kecil dalam sampel survai dengan memanfaatkan informasi tambahan dari luar area.

2.2 *Small Area Models*

Model s*mall area* biasanya menggunakan model linier campuran dalam bentuk

$$y = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{Z}v + e \qquad (2.1)$$

Dimana

y : vektor dari variabel respon, berukuran $n \times 1$

X : matriks peubah penyerta, berukuran $n \times p$

β : vektor dari parameter, berukuran $p \times 1$

Z : matriks yang biasa dikenal sebagai pengaruh area kecil, berukuran $n \times h$

v : vektor dari parameter, berukuran $h \times 1$

e : vektor dari galat sampel, berukuran $n \times 1$

Menurut Rao (2003) *small area model* dapat diklasifikasikan menjadi dua jenis yaitu *Basic area level model* dan *Basic unit level model.*

2.2.1 *Basic Area Level Model*

Basic Area Level Model merupakan model yang didasarkan pada ketersediaan data pendukung yang hanya ada untuk level area tertentu. Diasumsikan bahwa parameter *small area* yang ingin diamati adalah θ_i mempunyai keterkaitan dengan $x_i = (x_{1i}, \dots, x_{pi})^T$ dimana x_i adalah suatu vektor, i adalah banyaknya area, dan p adalah banyaknya peubah penyerta. Data pendukung tersebut untuk membangun model linear berikut :

$$\theta_i = x_i^T \beta + b_i v_i \quad ; \ i = 1, \dots, m \tag{2.2}$$

dengan β merupakan vektor koefisien regresi berukuran $p \times 1$ untuk data pendukung x_i, b_i konstanta positif yang diketahui, dan $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$ sebagai pengaruh acak dari area tertentu.

Untuk membuat kesimpulan tentang populasi dibawah model *area level*, diasumsikan bahwa penduga langsung $\widehat{\theta_i}$ telah tersedia pada model dan dapat dituliskan sebagai :

$$\widehat{\theta_i} = \theta_i + e_i \quad ; i = 1, \dots, m \tag{2.3}$$

dengan e_i adalah *sampling error* yang diasumsikan $e_i \sim N(0, e_{ei}^2)$ (Rao, 2003).

2.2.2 *Basic Unit Level Model*

Basic Unit Level Model merupakan suatu model dengan data pendukung yang tersedia bersesuaian secara individu dengan data respon.

Diasumsikan $x_{ij} = (x_{ij1}, \ldots, x_{ijp})^T$ tersedia untuk setiap elemen ke-j pada setiap area ke-i namun terkadang cukup dengan rata-rata populasi $\bar{x}_{ij}$ diketahui saja. Sehingga diperoleh persamaan *Basic Unit Level Model* sebagai berikut:

$$y_{ij} = x_{ij}^T\beta + v_i + e_{ij} \quad ; \; j = 1, \ldots, n \,, i = 1, \ldots, m \qquad (2.5)$$

dengan $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$ adalah pengaruh acak area, β merupakan koefisien regresi, dan diasumsikan bahwa $E(e_{ij}) = 0$ dan $var(e_{ij}) = \sigma_{e_{ij}}^2$ (Rao, 2003).

Penduga yang diperoleh dari *small area model* antara lain *Best Linear Unbiased Prediction* (BLUP), *Empirical Bayes* (EB), dan *Hierarchical Bayes* (HB). Pada penelitian ini menggunakan pendekatan HB, karena pemodelannya dilakukan secara bertahap, setiap tahap bisa relatif sederhana dan mudah dipahami, meskipun proses pemodelannya secara keseluruhan sangat rumit (Kurnia, 2009).

2.3 *Hierarchical Bayes* (HB)

Pada pendekatan HB, terlebih dahulu ditentukan sebaran *prior* subjektif $f(\theta)$ pada parameter model θ, kemudian untuk gugus data y tertentu akan diperoleh sebaran *posterior* $f(\mu|y)$ dari parameter area kecil (acak) μ yang diamati. Model dua tahap, katakan $f(y|\mu, \theta_1)$ dan $f(y|\mu, \theta_2)$ dikombinasikan dengan *prior* subjektif pada $\theta = (\theta_1^T, \theta_2^T)$, dengan menggunakan teorema Bayes, sehingga diperoleh *posterior* $f(\mu|y)$.

Berdasarkan teorema Bayes,

$$f(\mu,\theta|y) = \frac{f(y,\mu|\theta)f(\theta)}{f(y)} \qquad (2.6)$$

Dimana $f(y)$ adalah fungsi densitas *marginal* dari y yang dinyatakan dalam bentuk:

$$f(y) = \int f(y,\mu|\theta)\ f(\theta)\ d\mu\ d\theta \qquad (2.7)$$

Posterior $f(\mu|y)$ diperoleh dari (2.6) sebagai

$$f(\mu|y) = \int f(\mu,\theta|y)\ d\theta \qquad (2.8)$$

$$= \int f(\mu|y,\theta)\ f(\theta|y)\ d\theta \qquad (2.9)$$

Bentuk dalam (2.9) $f(\mu|y,\theta)$ juga digunakan untuk inferensi *Empirical Bayes.* Karena bentuk campuran dari densitas beryarat $f(\mu|y,\theta)$, HB disebut juga Bayes EB atau *fully Bayes*. Berdasarkan persamaan (2.8) dan (2.9) terlihat bahwa evaluasi dari $f(\mu|y)$ melibatkan integrasi *multi*-dimensi. Untuk mengatasi kesulitan dalam komputasi dikembangkan metode *Markov Chain Monte Carlo*.

(Rao, 2003)

2.4 Metode *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC)

MCMC merupakan metode membangkitkan sampel dari distribusi posterior sesuai proses Markov *chain* dengan menggunakan simulasi Monte Carlo secara iteratif sehingga diperoleh kondisi yang konvergen terhadap posterior (Ntzoufras, 2009). Misalkan diberikan fungsi densitas (bisa tidak ternormalkan) yaitu $f(\mu|y)$ dan akan dihitung nilai harapan

$$E(\mu|y) = \int \mu\ \ f(\mu|y)\ d\mu \qquad (2.10)$$

Pengintegralan pada (2.10), μ bisa berdimensi tinggi. Untuk melakukan inferensi pada (2.10) adalah dengan pengambilan sampel melalui simulasi. Metode Monte Carlo dapat menyelesaikannya dengan estimasi

$$E(\mu|y) \approx \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{D}\theta_i \qquad (2.11)$$

Dimana θ_i simulasi sampel saling bebas dan berdistribusi identik $\theta_i \sim (\mu|y)$ dengan proses rantai Markov (Sumarjaya, 2010).

Rantai Markov adalah sederet peubah acak, misal $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \ldots$ dimana $\theta^{(k)}$ bergantung pada peubah acak yang sebelumnya, $\theta^{(k-1)}$.

Dalam metode MCMC, terdapat dua algoritma yang sering digunakan dalam membangkitkan *Markov chain*, yaitu algoritma *Metropolis-Hastings* dan algoritma *Gibbs Sampling.*

2.5.1 *Gibbs Sampling*

Gibbs sampling adalah tehnik untuk membangkitkan peubah acak dari suatu distribusi *marginal* secara langsung tanpa harus menghitung fungsi kepekatan distribusi tersebut. Algoritma *Gibbs Sampling* menggunakan sampel sebelumnya untuk membangkitkan nilai sampel berikutnya secara acak sehingga akan didapat rantai Markov.

Menurut Rao (2003) tahapan algoritma *Gibbs sampling* adalah :

Langkah 1 : Tentukan nilai awal $\eta^{(0)}$ dengan komponen $\eta_1^{(0)}, \ldots, \eta_r^{(0)}; k = 0$

Langkah 2 : Bangkitkan $\eta^{(k+1)} = (\eta_1^{(k+1)}, \ldots, \eta_r^{(k+1)})$ sebagai berikut

$\eta_1^{(k+1)}$ dari $f(\eta_1|\eta_2^{(k)}, \ldots, \eta_r^{(k)}, y)$

$\eta_2^{(k+1)}$ dari $f(\eta_2|\eta_1^{(k+1)},\ \eta_3^{(k)},\dots,\eta_r^{(k)},y)$

.

.

.

$\eta_r^{(k+1)}$ dari $f(\eta_r|\eta_1^{(k+1)},\eta_3^{(k)},\dots,\eta_{r-1}^{(k+1)},y)$

Langkah 3 : Ulangi langkah 2 untuk $k = k + 1$.

Jika *Gibbs conditionals* tidak memuat bentuk tertutup, terdapat metode untuk membangkitkan sampel dari distribusi bersyarat. Secara khusus, dapat diadaptasi *Metropolis Hasting within Gibbs*.

2.5.2 Metropolis Hasting within Gibbs

Misal $f(\eta_i|\eta_{-i}^{(k)},y)$ dinotasikan untuk *Gibbs conditional* setelah menarik sampel ke (k + 1) dari *Gibbs sampling*, dimana

$$\eta_{-i}^{k} = \{\eta_1^{(k+1)},\dots,\eta_{i-1}^{(k+1)},\eta_{i+1}^{(k)},\dots,\eta_r^{(k)}\}$$

Menurut Rao (2003) algoritma MH untuk membangkitkan sampel $\eta_i^{(k+1)}$, dari $f(\eta_i|\eta_{-i}^{(k)},y)$ adalah sebagai berikut :

Langkah 1: aproksimasi $f(\eta_i|\eta_{-i}^{(k)},y)$ dengan densitas kandidat (atau proposal) $q_i(\eta_i|\eta_i^{(k)},\eta_{-i}^{(k)})$ yang mudah dari sampel, seperti distribusi normal atau distribusi t. Densitas proposal bergantung pada nilai $\left\{\eta_i^{(k)},\eta_{-i}^{(k)}\right\}$.

Langkah 2 : Bangkitkan "kandidat" untuk η_i, yaitu η_i^*, dari densitas kandidat dan u dari uniform (0,1).

Langkah 3 : $\eta_i^{(k+1)} = \eta_i^*$ jika $u \leq a(\eta_{-i}^{(k)}, \eta_i^{(k)}, \eta_i^*)$ dan $\eta_i^{(k+1)} = \eta_i^{(k)}$ lainnya,

dimana peluang penerimaan $a(\eta_{-i}^{(k)}, \eta_i^{(k)}, \eta_i^*)$ adalah

$$a\left(\eta_{-i}^{(k)}, \eta_i^{(k)}, \eta_i^*\right) = \min\left\{\frac{f\left(\eta_i^* \middle| \eta_{-i}^{(k)}, y\right) q_i(\eta_i^{(k)} | \eta_i^*, \eta_{-i}^{(k)})}{f\left(\eta_i^{(k)} \middle| \eta_{-i}^{(k)}, y\right) q_i(\eta_i^* | \eta_i^{(k)}, \eta_{-i}^{(k)})}, 1\right\} \tag{2.12}$$

Jika densitas kandidat adalah simetris, yaitu $q_i\left(\eta_{-i}^{(k)} | \eta_i^*, .\right) = q_i\left(\eta_i^* | \eta_i^{(k)}, .\right)$ maka peluang penerimaannya adalah

$$a\left(\eta_{-i}^{(k)}, \eta_i^{(k)}, \eta_i^*\right) = \min\left\{\frac{f\left(\eta_i^* \middle| \eta_{-i}^{(k)}, y\right)}{f\left(\eta_i^{(k)} \middle| \eta_{-i}^{(k)}, y\right)}, 1\right\} \tag{2.13}$$

Salah satu contoh penerapan *hierarchical bayes* yang disebutkan oleh Rao (2003) adalah data berdistribusi Binomial menggunakan distribusi prior Beta.

2.5 Model Beta-Binomial

HB dari Beta-Binomial dituliskan sebagai berikut :

(i) $y_i | p_i \overset{ind}{\sim}$ binomial (n_i, p_i)

(ii) $p_i | \alpha, \beta \overset{ind}{\sim}$ beta (α, β) ; $\alpha > 0, \beta > 0$

(iii) α dan β saling bebas dengan $\alpha \sim Gamma(a_1, b_1)$; $a_1 > 0, b_1 > 0$

dan $\beta \sim Gamma(a_2, b_2)$; $a_2 > 0, b_2 > 0$.

Distribusi bersyarat $[p_i | p_{l(l \neq i)}, \alpha, \beta, y]$ adalah beta$(y_i + \alpha, n_i - y_i + \beta)$, tetapi distribusi bersyarat untuk $[\alpha | p, \beta, y]$ dan $[\beta | p, \alpha, y]$ tidak memuat bentuk tertutup.

(Rao, 2003)

Setelah dilakukan simulasi dari algoritma *Gibbs sampling* ataupun MH, diperoleh barisan penduga. Kemudian rata-rata *posterior* dan ragam *posterior* yang diamati dapat dihitung.

2.6 Besaran *Posterior*

Definisi 2.6.1 (*Irreducible*)

Suatu rantai Markov dikatakan *irreducible* jika semua *state* dapat dihubungkan satu sama lain dan dikatakan *reducible* jika sebaliknya terdapat *state* yang tidak dapat dihubungkan satu sama lain.

Teorema 2.6.1 (Teorema *Ergodic*)

Misalkan P *irreducible* dan λ merupakan sebarang distribusi. Jika $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ adalah Markov(λ, P) maka

$$P\left(\frac{V_i(n)}{n} \rightarrow \frac{1}{m_i}\, dengan\, n \rightarrow \infty\right) = 1$$

Dimana $m_i = E_i(T_i)$ merupakan nilai harapan dari waktu kembali pada *state* ke-*i*, dan $V_i(n) = \sum_{k=0}^{n-1}\{X_{k=i}\}$

(Norris, 1998)

Rata-rata *posterior* (penduga HB) bagi $\phi = h(\mu)$ diduga melalui

$$\hat{\phi}^{HB} = \frac{1}{D}\sum_{k=d+1}^{d+D} \phi^{(k)} = \phi^{(.)} \quad (2.14)$$

Dimana $\phi^{(k)} = h\left(\mu^{(k)}\right)$. Dengan cara yang sama, ragam *posterior* dari ϕ diduga dengan

$$\hat{V}(\phi|y) = \frac{1}{D-1}\sum_{k=d+1}^{d+D}(\phi^{(k)} - \phi^{(.)})^2 \quad (2.15)$$

Berdasarkan teorema *ergodic* untuk rantai Markov, maka penduga $\hat{\phi}^{HB}$ akan konvergen ke $E(\emptyset|y)$ dan $V(\emptyset|y)$ konvergen ke $V(\emptyset|y)$ pada saat D → ∞.

Jika bentuk $E(\phi|y,\theta)$ diketahui, maka pendugaan $E(\phi|y)$ adalah

$$\tilde{\phi}^{HB} = \frac{1}{D}\sum_{k=d+1}^{d+D} E(\phi|y,\theta^{(k)}) \quad (2.16)$$

Dimana $\{\theta^{(k)}\}$ adalah sampel iid dari *posterior marginal* $f(\theta|y)$. Penduga $\tilde{\phi}^{HB}$ disebut pendugaan Rao-Blackwell karena prosesnya diperoleh berdasarkan teorema Rao-Blackwell. Dan pendugaan ragam *posterior* untuk $\tilde{\phi}^{HB}$ adalah

$$\tilde{V}(\phi|y) = \frac{1}{D}\sum_{k=d+1}^{d+D} V(\phi|y,\theta^{(k)}) + \frac{1}{D-1}\sum_{k=d+1}^{d+D}[E\left(\phi\middle|y,\theta^{(k)}\right) - \tilde{\phi}^{HB}]^2 \quad (2.17)$$

(Rao, 2003)

Penduga dengan pendakatan HB telah diketahui, selanjutnya dievaluasi karakteristik dari penduga.

2.7 Karakteristik Penduga Parameter

Pendugaan yang dilakukan dengan pendekatan Bayes atau pendekatan lainnya, diharapkan menghasilkan penduga yang baik. Beberapa sifat yang biasanya diinginkan dengan suatu penduga adalah tak bias dan ragam minimum. Berikut definisi tak bias dan ragam minimum :

Definisi 2.7.1 (Ketakbiasan)

Penduga $U(X)$ dikatakan sebagai penduga yang tak bias bagi $g(\theta)$ bila

$E\big(U(X)\big) = g(\theta), \forall\ \theta \in \Omega$

Definisi 2.7.2 (Ragam Minimum)

Bila $U(X)$ merupakan penduga bagi $g(\theta)$ maka $U_1(X)$ dikatakan sebagai penduga beragam terkecil jika $\sigma^2_{U_1(x)} \leq \sigma^2_{U_2(x)}$. Dimana $U(X)$ merupakan sembarang penduga bagi $g(\theta)$

(Hogg dan Craig, 1995)

2.8 *Mean Square Error* (MSE)

Small Area Estimation (SAE) digunakan untuk memperoleh dugaan pada area kecil dengan tingkat akurasi yang tinggi, tingkat akurasi penduga dapat dilihat dengan nilai *Mean Square Error* (MSE).

Jika $\tilde{p}_i{}^{HB}$ merupakan penduga bagi p_i maka MSE dari $\tilde{p}_i{}^{HB}$ dapat dituliskan seperti persamaan (2.18) berikut :

$$MSE\left(\tilde{p}_i{}^{HB}\right) = \mathrm{E}(\tilde{p}_i{}^{HB} - p_i)^2$$

$$= E(\tilde{p}_i{}^{B} - p_i)^2 + E(\tilde{p}_i{}^{HB} - p_i{}^{\mathrm{B}})^2 \qquad (2.18)$$

(Rao, 2007)

III. METODE PENELITIAN

3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung, waktu penelitian ini dilakukan pada semester genap Tahun Ajaran 2016/2017.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data Keluarga Pra Sejahtera pada level kecamatan untuk kota Bandar Lampung tahun 2015. Adapun sumber data yang digunakan dalam penelitian adalah Badan Pusat Statistika (BPS) Provinsi Lampung.

3.3 Metode Penelitian

Kajian tentang karakteristik penduga parameter pada model Beta-Binomial dengan menggunakan *hierarchical Bayes* dilakukan dengan tahapan sebagai berikut :

1. Menetapkan model dua tahap berikut :
   (i) Hirarki 1: $y_i|p_i \overset{ind}{\sim}$ binomial (n_i, p_i)
   (ii) Hirarki 2: $p_i|\alpha, \beta \overset{ind}{\sim}$ beta (α, β) ; $\alpha > 0,\ \beta > 0$

(iii) Prior : α dan β saling bebas dengan $\alpha \sim Gamma(a, b)$ dan

$\beta \sim Gamma(c, d);\ a > 0, b > 0,\ c > 0,\ d > 0$

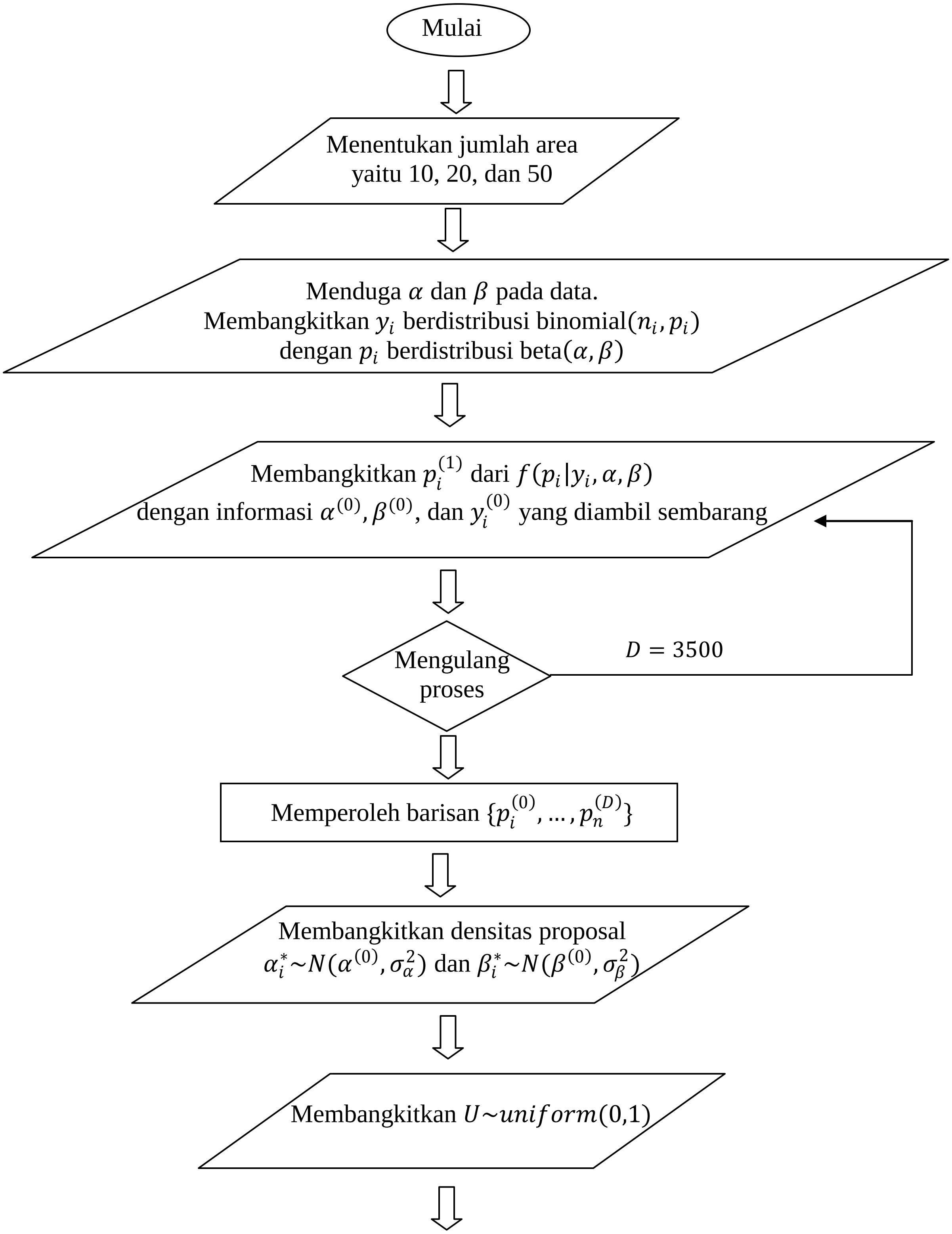
2. Menentukan fungsi kepekatan peluang bersama dan densitas *marginal* (2.7)
3. Menentukan fungsi kepekatan peluang akhir (*posterior*) dengan teorema Bayes (2.6)
4. Menentukan rata-rata *posterior* (penduga HB) secara analitik, jika tidak dapat diselesaikan maka menggunakan metode MCMC dengan algoritma *Gibbs sampling* . Dan jika distribusi bersyarat dalam *Gibbs sampling*, memuat bentuk tidak tertutup, maka diselesaikan dengan algoritma MH *within Gibbs*.
5. Mengkaji karakteristik penduga HB yaitu takbias dan ragam minimum.
6. Menentukan proporsi dari penduga HB (2.16), ragam dari penduga HB (2.17), dan MSE dari penduga HB (2.18) dengan simulasi.

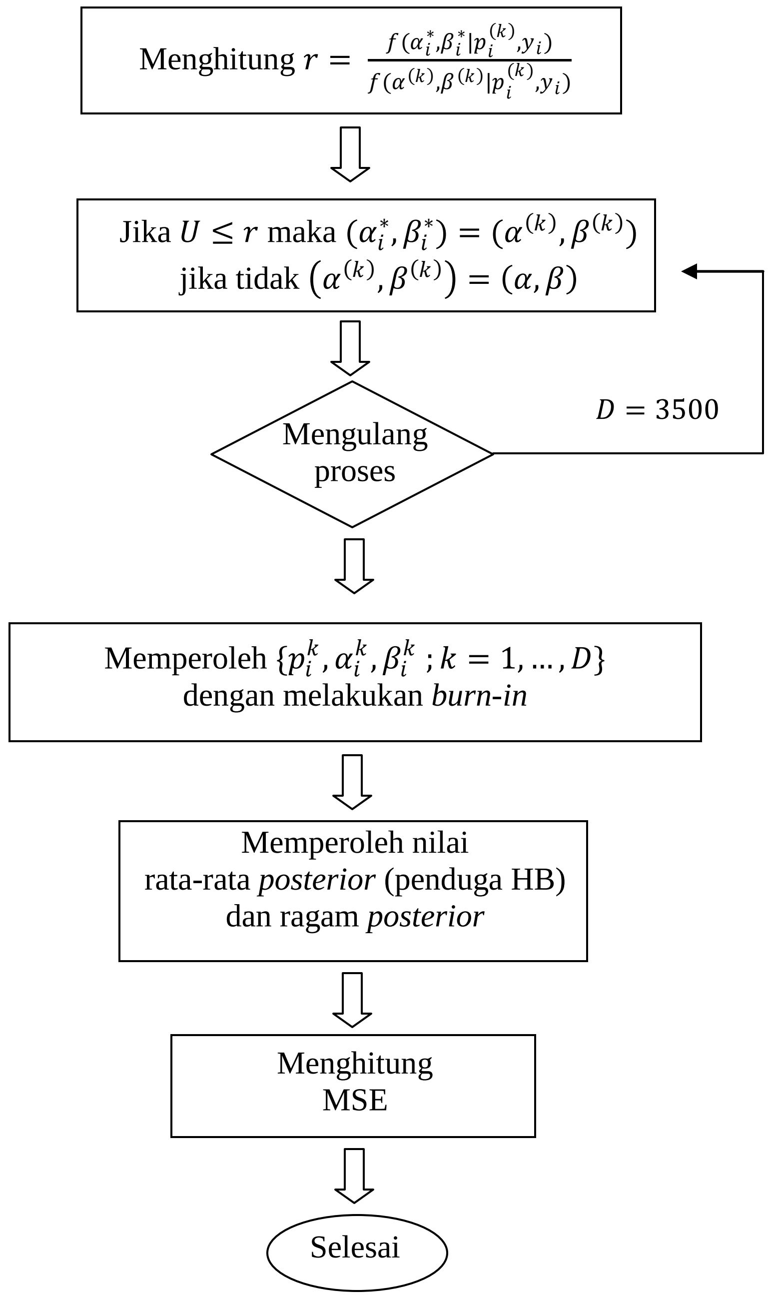
Berikut langkah-langkah dalam menentukan penduga HB dan MSE dengan menggunakan simulasi :

1. Menetapkan jumlah area yang berbeda-beda yaitu 10, 20, dan 50
2. Menduga parameter α dan β pada data Keluarga Prasejahtera Kota Bandar Lampung tahun 2015
3. Membangkitkan y_i berdistribusi binomial(n_i, p_i) dengan p_i berdistribusi beta(α, β) sesuai dengan jumlah area yang sudah ditentukan
4. Mengambil nilai awal sembarang $\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}$, dan $y_i^{(0)}$
5. Membangkitkan $p_i^{(1)}$ dari $f(p_i|y_i, \alpha, \beta)$ dengan informasi $\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}$, dan $y_i^{(0)}$

6. Mengulangi proses 4 sampai diperoleh barisan sebanyak k : $\{p_i^{(0)}, \dots, p_n^{(k)}\}$
7. Membangkitkan densitas proposal $\alpha_i^* \sim N(\alpha^{(0)}, \sigma_\alpha^2)$ dan $\beta_i^* \sim N(\beta^{(0)}, \sigma_\beta^2)$, dimana σ_α^2 dan $\sigma_\beta^2 > 0$
8. Membangkitkan $U \sim uniform(0,1)$
9. Jika $U \leq \frac{f(\alpha_i^*, \beta_i^* | p_i^{(k)}, y_i)}{f(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)} | p_i^{(k)}, y_i)}$ maka $(\alpha_i^*, \beta_i^*) = (\alpha^{(k)}, \beta^{(k)})$ jika tidak $\left(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}\right) = (\alpha, \beta)$
10. Mengulangi proses 8 sampai diperoleh sampel D = 3500 yang konvergen
11. Menghilangkan nilai awal sehingga diperoleh $\{p_i^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}, \alpha^{(k)}, \beta^{(k)} ; k = 1, \dots, D\}$
12. Memperoleh barisan penduga dan dihitung nilai rata-rata *posterior* (penduga HB) dan ragam *posterior*
13. Menghitung nilai MSE

3.4 *Flowchart*





Gambar 3.1 *Flowchart* Metode Penelitian

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Pendugaan HB yang diperoleh pada pendugaan area kecil model Beta Binomial bersifat bias, dengan nilai biasnya kecil.
2. Pendugaan proporsi dengan metode HB lebih baik dibandingkan pendugaan langsung, ditunjukkan dengan nilai ragam penduga HB lebih kecil dibandingkan ragam penduga langsung.

DAFTAR PUSTAKA

Anifa, M. A. Mukid, dan Agus Rusgiyono. 2012. Simulasi Stokastik Menggunakan Algoritma Gibbs Sampling. *Jurnal Gaussian.* 1(1) : 21–30.

Cochran, William G. 1997. *Sampling Techniques.* John Wiley & Sons, Inc., Canada.

Dagnupar, J. 1988. *Principles of Random Variate Generation.* Claredon Press, Oxford.

Gelfand, A. E. dan Smith, A. F. M. 1991. Gibbs Sampling For Marginal Posterior Expectations. *Communications in Statistics – Theory and Methods.* 20 : 1747 – 1766.

Ghosh, Malay dan J.N.K Rao. 1994. Small Area Estimation : An Appraisal. *Statistical Science.* 9(1) : 55 – 93.

Gilks, W. R. dan Wild, P. 1992. Adaptive Rejection Sampling for Gibbs Sampling. *Journal of Applied Statistics.* 41 : 337-348.

Gilks, W. R., Best, N. G., dan Tan, K. K. C. 1995. Adaptive Rejection Metropolis Sampling within Gibbs Sampling. *Journal of Applied Statistics.* 44 : 455-472.

Hogg, R.V. dan Allen T. Craig. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics.* Fifth Edition. Princtice-Hall International Inc, New Jersey.

Kurnia, Anang. 2009. Prediksi Terbaik Empirik untuk Model Transformasi Logaritma di dalam Pendugaan Area Kecil dengan Penerapan Data Susenas. (Tesis). Institut Pertanian Bogor, Bogor.

Mukid, M. Abdul dan Yuciana Wilandari. 2012. Identifikasi Pola Distribusi Curah Hujan Maksimum dan Pendugaan Parameternya Menggunakan Metode Bayesian *Markov Chain Monte Carlo. Media Statistika*. Vol.5 No.2 : 63-74.

Norris, James R. 1998. *Markov Chains.* University of Cambridge Press.

Ntzoufras, I. 2009. *Bayesian Modeling in WinBugs*. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.

Rao, J.N.K. 2007. Jackknife and Bootrstrap Methods for Small Area Estimation.

Section on Survey Research Methods .

Rao, J.N.K. 2003. *Small Area Estimation.* John Wiley & Sons, inc., New Jersey.

Satriya, A.M., Nur Iriawan., dan Brodjol Sutijo. 2015. Small Area Estimation Pengeluaran Per Kapita di Kabupaten Bangkalan Dengan Metode Hierarchical Bayes. *Statistika*. 3(2).

Sumarjaya, I Wayan. 2010. Inferensi Berbasis Simulasi. *Jurnal Matematika.* 1(2) : 81 – 90.

You, Yong. 1999. Hierarchical Bayes and Related Methods for Model-Based Small Area Estimation (Thesis). Carleton University. Canada.